MATEMATİKSEL MANTIK

Mehmet Sait Eroğlu
Kemal Ilgar Eroğlu

PAPATYA YAYINCILIK EĞİTİM
İstanbul, Ankara, İzmir, Adana

© PAPATYA YAYINCILIK EĞİTİM
BİLGİSAYAR SİS. SAN. VE TİC. A.Ş.

Ankara Cad. Prof. F. Kerim Gökay Vakfı İşhanı, 31/3
Cağaloğlu/İstanbul

Tel : 0212 - 527 52 96 Cep Tel: 0532 - 311 31 10
Faks : 0212 - 527 52 97
e-posta : admin@papatya.gen.tr
Web : www.papatya.gen.tr www.papatya.info.tr

Matematiksel Mantık – Mehmet Sait EROĞLU ve Kemal Ilgar EROĞLU

1. Basım Temmuz 2016

Yayın Danışmanı : Toros Rifat ÇÖLKESEN
Üretim : Cengiz UĞURKAYA
Pazarlama : Ziya ÇÖLKESEN
Satış : Mustafa DEMİR
Kapak Tasarım : Ilgım EROĞLU
Basım ve Ciltleme : Pasifik Ofset Ltd. Şti. (Sertifika No: 12027) – İstanbul
Haramidere, Avcılar/İstanbul (0212 - 412 17 77)

© Bu kitabın her türlü yayın hakkı yayınevine aittir. Yayınevinden yazılı izin alınmaksızın alıntı yapılamaz, kısmen veya tamamen hiçbir şekil ve teknikle ÇOĞALTILAMAZ, BASILAMAZ, YAYIMLANAMAZ. Kitabın, tamamı veya bir kısmının fotokopi makinası, ofset vs. gibi teknikle çoğaltılması, hem çoğaltan hem de bulunduranlar için yasadışı bir davranıştır. Emeğe saygı hepimizin ortak tutumu olmalıdır.

Eroğlu, Mehmet Sait; Eroğlu, Kemal Ilgar.
Matematiksel Mantık/Mehmet Sait Eroğlu ve Kemal Ilgar Eroğlu – İstanbul: Papatya Yayıncılık Eğitim (Toroslu Kitaplığı), 2015
xvi, 540 sayfa; 24 cm
Kaynakça ve dizin var.
ISBN 978-975-6342-76-3
1. Önermeler Mantığı 2. Birinci Dereceden Mantık 3. Modeller Kuramı
4. Gödel Eksiklik Teoremi 5. Hesaplanabilirlik
I. Title

Ilgım'a, Yıldız'a ve ailemizin artık hayatta olmayan büyüklerine...

İçindekiler

GİRİŞ **ix**

1 ÖN BİLGİLER **1**
1.1 Kümeler Kuramı 1
1.2 Abeceler ve Sözcükler 4
1.3 Tümevarım ve Yineleme 6

2 ÖNERMELER MANTIĞI **13**
2.1 Anlamsal Önermeler 15
2.2 Dizimsel (veya Dilbilimsel) Yapı 26
2.2.1 Önermeler Mantığının Formülleri 27
2.2.2 Tek Türlü Okunabilirlik 31
2.2.3 Ayraç Azaltma Uzlaşması 35
2.2.4 Ön Yazılımda Önermemantıksal Formüller 36
2.3 Tümevarımsal Kanıtlar ve Yinelgen Tanımlar 37
2.4 Anlamsal Yapı 42
2.4.1 Yorumlar-Değerlemeler 42
2.4.2 Hepdoğrular ve Çelişkiler 46
2.4.3 Mantıksal Denklik 49
2.4.4 Yerine Koyma ve Yer Değiştirme 51
2.4.5 İkililik İlkesi 53
2.5 Boole Fonksiyonları 57
2.6 Mantıksal Çıkarımlar 65
2.6.1 Modeller ve Mantıksal Çıkarımlar 65
2.6.2 Kompaktlık Teoremi 70
2.6.3 Kompaktlık Teoremi'nin Uygulamaları 74
2.7 Frege-Lukasiewicz (FL) Önermeler Mantığı 80

3 BİRİNCİ DERECEDEN KURAMLAR **97**
3.1 Yapılar 101

3.1.1 Çok Türlü Yapılar 104
3.2 Anlamsal Alan Hakkında Bazı Notlar 105
3.3 Birinci Dereceden Biçimsel Diller 111
3.4 Fm L'nin Önermemantıksal Yapısı 128
3.5 L-Yapıları ve Yorumlar 131
3.5.1 L-Yapıları 131
3.5.2 Yorumların Anlamsal Özü 134
3.6 Temel Doğrular 152
3.7 Mantıksal Çıkarımlar 156
3.8 Anlamsal Denklik 165
3.9 Biçimsel Kuramlar 169
3.10 Bazı Matematiksel Kuramlar 179
3.11 Temel Biçimsel Teoremler 189
3.11.1 Bir Başka Yaklaşım 199
3.12 Biçimsel Denklik 202
3.13 Yerine Koyma ve Değişken Değiştirmeler 209
3.14 Biçimsel Tutarlılık 217
3.15 Tutucu Kuram Genişletmeleri 222
3.16 Gödel Tamlık Teoremi 225
3.17 Gödel Tamlık Teoremi'nin Basit Sonuçları 248
3.18 Tanımsal Dil Zenginleştirme 253
3.19 Biçimsel Kuramların Birbirlerinde Yorumu 260

4 MODELLER KURAMINA GİRİŞ 265
4.1 Altyapılar ve Yapı Dönüşümleri 265
4.1.1 Benzeşmeler 272
4.2 Basit Denklik ve Basit Altyapılar 274
4.2.1 Diyagramlar 281
4.2.2 Açık veya Evrensel Kuramlar 282
4.3 Arakesitler, Birleşimler ve Zincirler 284
4.4 Aksiyomlaştırma, Tamlık ve Kesinlik 291
4.4.1 Aksiyomlaştırma 292
4.4.2 Tamlık ve Kesinlik 297
4.5 Yaban Aritmetik 303
4.6 Yaban Analiz 308
4.6.1 $\mathfrak{R}^\star$'ın Kurulumu 309
4.6.2 $\mathfrak{R}^\star$'ın Cebirsel Yapısı 314
4.6.3 $\mathfrak{R}^\star$'da Limit 323

5 GÖDEL EKSİKLİK TEOREMLERİ **333**
5.1 Gödel Teoremlerine Giden Yol 333
5.2 Algoritmalar 349
5.3 Belirlenebilirlik ve Hesaplanabilirlik 354
5.4 Bir Sezgisel Deneme 364
5.5 Aritmetik Silsile 369
5.6 Gödel Teoremlerine Sezgisel Yaklaşım 374
5.7 Gödel Eksiklik Teoremleri 384
5.8 Yinelgen Fonksiyonlar 395
5.9 Yinelgen Fonksiyonlara Farklı Bir Yaklaşım 410
5.10 Basit Yinelgen Kodlama 412
5.11 (Basit) Yinelgen Kısmi Fonksiyonlar 422
5.12 Yarı Yinelgen Bağıntılar 431
5.13 Kayıt Makinaları 437
5.14 Aritmetikleştirme 452
5.15 Temsil Edilebilirlik 469
5.16 İki Farklı Yaklaşım 478
5.17 İkinci Dereceden Yüklem Mantığı 483
5.18 Nedir, Ne Değildir 492

İmler Dizini **501**

Kaynakça **513**

GİRİŞ

Bu kitabı hazırlarken şunlar göz önünde tutulmuştur: (a) Mantığın konusu matematiğin diğer alanlarına göre daha fazla bir zihinsel çaba gerektirmemesine karşın onlardan tümüyle farklı bir yapısı olduğundan başlangıçta insanı daha fazla zorlar, (b) Bünyesinde diğer alanlarda hiç bulunmayan bir sürü yeni kavram ve bunların beraberinde getirdiği bir sürü yeni imler barındırır ve bunun okur için itici bir etkisi vardır, (c) Okurlar arasında mantık alanında hiçbir donanımı olmayan, ancak örneğin Gödel Eksiklik Teoremleri'nin tam ifadesini ve ayrıntıya girmeden kanıtın ana fikrini öğrenmek isteyenler de olacaktır.

İm fazlalığına yaklaşımımız şudur: İm sayısını azaltmanın karşılığında çok anlamlılık çıkıyorsa buna yanaşmadık, tersine literatürde karşılaştığımız çok anlamlı im kullanımını, im sayısını çoğaltma pahasına elimine etmeye özen gösterdik. Biçimsel kuramları herhangi bir matematiksel alanı inceler gibi inceleyeceğiz. Bu biçimsel kuramımızın *sözeden kuramıdır* (metateori). Kitabın büyük bölümü sözeden kuramdır. Bazı teoremlerin kanıtlarında geçen yöntemin teoremlerin kendilerinden daha önemli olduğunu düşünüyoruz. Aynı teoremin farklı kanıtlarından biri bize kolay anlaşılır gelirken bir diğeri tam tersi olabilir. Bu nedenle bazı önemli teoremlerin farklı kanıtlarını verdik. Gödel Eksiklik Teoremleri'nin ana fikriyle ilgilenen okurlar gözetilerek onlara önce sezgisel olarak yaklaşılmış, daha sonra bir iki teorem ödünç alınarak tam kanıtları verilmiş, ileride bu borçlar fazlasıyla ödenmiştir.

Kitap beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Kümeler Kuramı'ndan gerekli ön bilgiler verilmiştir. İkinci bölüm önermeler mantığına ayrılmıştır. Bu konuda bilgisi olanlar, oldukça uzun tutulmuş bu bölümü atlayabilirler. Onların nasıl devam edecekleri s. 190'da belirtilmiştir. Bu bölümün uzun ve ayrıntılı tutulmasının nedeni, mantıkla ilgili hiç bilgisi olmayan okurların kitabın kalanını kolayca izlemelerini sağlamaktır. Bu bölümün en önemli teoremlerinden biri kuşkusuz Kompaktlık Teoremi'dir. Özünde anlamsal alana ilişkin olan bu teoremin iki ayrı kanıtı ve bazı uygulamaları verilmiştir. İleride ayrıca biçimsel olarak kanıtlanmıştır. Kısaca FL Önermeler Mantığı diyeceğimiz Frege-Lukasiewicz yaklaşımı izlenmiştir. Modeller

üzerinden tanımlanan anlamsal çıkarımının biçimsel çıkarıma denk olduğu, diğer deyişle önermeler mantığı için tamlık teoremi kanıtlanmıştır.

Üçüncü bölüm birinci dereceden biçimsel kuramlara ayrılmıştır. Mantığı da bir biçimsel kuram olarak ele alacağımız için bu bölümde anlamsal alana, mantıksal çıkarım, mantıksal denklik, anlamsal tutarlılık ve mantığın temel doğrularına fazlaca yer verdik. Bunun bir nedeni de okurun bunlara matematiğin diğer dallarında her zaman gereksinim duymasıdır. Mantığın kendisi de dahil olmak üzere kuramlarımızı biçimselleştirip, açıkladığımız biçimsel çıkarımımızın anlamsal çıkarıma denk olduğunu kanıtladık (Gödel Tamlık Teoremi). Her kuramda bazı özel sabit, fonksiyon veya bağıntılara isimler verir yolumuza devam ederiz. Bunların karşılığı olan biçimsel alanda tanımsal dil zenginleştirilmesi, tutucu kuram genişletmeleri, bir kuramın bir diğerinde yorumu yine bu bölümün konuları arasındadır. Elbette Tamlık Teoremi'nin bazı basit sonuçlarına da bu bölümde değinilmiştir.

Dördüncü bölüm modeller kuramına ayrılmıştır. Bu bölümün en önemli teoremlerinin başında kuşkusuz en az Gödel Eksiklik Teoremleri kadar beklenmedik ve matematiğin görecelik teoremleri diyeceğimiz Aşağı ve Yukarı Doğru Löwenheim-Skolem Teoremleri'dir. Gödel'in Tamlık ve Kompaktlık teroemleri ve Löwenheim-Skolem Teoremleri burada şaşırtıcı sonuçlara ulaşmamızı sağlar. Örneğin doğal sayılar ve gerçel sayılar yapılarının kendileriyle eşyapılı olmayan ancak aynı teoremlere sahip modelleri vardır; bunlara *yaban* modeller diyeceğiz. Bu bölümün sonunda yaban analize kısaca da olsa değindik.

Beşinci bölüm Gödel Eksiklik Teoremleri'ne ayrılmıştır. Birbirinden farklı biçimde tanımlansa da aynı fonksiyon sınıfını belirleyen belirlenebilirlik tanımları vardır. Gödel'in basit yinelgen fonksiyonları yerine Herbrand'ın önerisi üzerine yinelgen fonksiyonlara geçilmiş, ardından zorunlu olarak kısmi fonksiyonları da incelemek gerekmiştir. Biz kayıt makinaları ile hesaplanabilir fonksiyonları tanımladık ve bir kısmi fonksiyonun kısmi yinelgen olması için gerek ve yeter koşulun bir kayıt makinası ile kısmi hesaplanabilir olması olduğunu kanıtladık. 5.1-5.7 kesimlerinde Gödel'in teoremlerine, fazla bir matematiksel donanım gerektirmeyen, sezgisel tarzda yaklaşılmıştır. Yalnızca Gödel Eksiklik Teoremleri'ne odaklanmak isteyen donanımlı okurlar, birinci dereceden kuramların temel kavramlarını biliyorlarsa doğrudan 5.6, 5.14 ve 5.15 kesimlerine odaklanabilirler.

Bu kitapta kullandığımız kısaltmalar şunlardır: $a := b$ ve $b =: a$ tanım gereği a nesnesi b nesnesine eşittir demektir. $p :\Longleftrightarrow q$ ve $q \Longleftrightarrow: p$ ise p tanım gereği q önermesine denktir denir; burada p ilk kez q üzerinden tanımlanan bir kavram içerir. $\overset{a}{\Longrightarrow}, \overset{a}{\Longleftrightarrow}$ ve $\overset{a}{=}$ gösterimlerinde a söz konusu çıkarım, denklik ve eşitliğin gerekçesini gösterir. $\overset{def}{=}$ ise bu eşitlikte tanı-

mın kullanıldığını belirtir. Bu kısaltmaların yanısıra “ava=ancak ve ancak”, “dd.=diğer deyişle”, “vrs=varsayım” ve “y.n.=yazarların notu” kısaltmaları kullanılmıştır.

Yazarların yaşlı olanı, sağladığı huzurlu çalışma ortamı ve kendisine düşen görevlerin çoğunu üstlenerek kazandırdığı fazladan zaman için eşi Yıldız’a sonsuz teşekkürü bir borç bilir.

Bölüm 1

ÖN BİLGİLER

1.1 Kümeler Kuramı

Burada sezgisel kuramın gereksinim duyduğumuz bazı temel bilgilerini vereceğiz. Burada bahsedilen kimi kavramları daha önce öğrenmemiş okuyucularımız [17] veya benzeri diğer kaynaklara başvurabilirler.

Bir A kümesinin çokluk sayısını $|A|$ ile göstereceğiz[1]. κ, μ en az biri sonsuz olan iki çokluk sayısı ise $\kappa + \mu = \max\{\kappa, \mu\}$ ve ayrıca bunlar sıfırdan farklı iseler $\kappa \cdot \mu = \max\{\kappa, \mu\}$. κ çokluk sayısı sonsuz ise her $n \geq 1$ doğal sayısı için $\kappa^n = \kappa$.

A ve B kümeleri ayrıksalar birleşimlerini $A \sqcup B$ ile göstereceğiz. A ve B kümeler olmak üzere sağdan tek olarak belirli $F \subseteq A \times B$ bağıntılarına, dd.

$$(a, b_1), (a, b_2) \in F \Longrightarrow b_1 = b_2$$

koşulunu sağlayan F bağıntılarına A kümesinden B kümesine bir **kısmi fonksiyon** denir; $f(a) := b \Longleftrightarrow (a, b) \in F$ olarak açıklanır. Bu durumda

$$f :\subseteq A \to B$$

yazacağız(genelde $f : A \xrightarrow{p} B$ gösterimi yaygındır). F'ye f'nin grafı denir ve biz genelde f'den yola çıkacak ve grafını G_f ile göstereceğiz. $\pi_1 : A \times B \to A$ ve $\pi_2 : A \times B \to B$ izdüşümler olmak üzere

$$\operatorname{dom} f := \pi_1(F) \text{ ve } \operatorname{im} f := \pi_2(F)$$

kümelerine sırasıyla f fonksiyonunun tanım ve resim kümeleri denir. Eğer $\operatorname{dom} f = A$ ise f bir **tümel** fonksiyondur denir ve bu $f : A \to B$ ile gösterilir. Tüm $f : A \to B$ tümel fonksiyonlarının kümesini ${}^AB$ ile göstereceğiz.

[1][17]'de $|A|$ yerine $\natural A$ gösterimi kullanılmıştır.

Bundan böyle sadece "fonksiyon" dediğimizde bundan tümel fonksiyon anlaşılacaktır.

$A \subseteq X$ için $\chi_A : X \to \{0,1\}$ fonksiyonu

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in X \backslash A \end{cases}$$

olarak açıklanmış olsun. Bilindiği gibi χ_A fonksiyonuna A kümesinin X **kümesindeki özgün fonksiyonu** denir. Son olarak, $\mathcal{P}(X)$ ile X kümesinin güç kümesini göstereceğiz ve $\mathcal{P}^*(X) := \mathcal{P}(X) \backslash \{\emptyset\}$.

Teorem 1.1.1 (Genel Yineleme Teoremi) *X herhangi bir sınıf olmak üzere $G : \mathbb{N} \times X \to X$ herhangi bir fonksiyon ve $a \in X$ herhangi bir öğe olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir ve bir tek $f : \mathbb{N} \to X$ fonksiyonu vardır:*

1. *$f(0) = a$.*
2. *Her $n \in \mathbb{N}$ için $f(n+1) = G(n, f(n))$ (bkz. [17], Teorem 2.3.3).*

Teorem 1.1.2 (Yineleme Teoremi) *X herhangi bir sınıf olmak üzere bir $a \in X$ ve bir $G : X \to X$ fonksiyonu verildiğinde* tek *olarak belirli bir $f : \mathbb{N} \to X$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlayacak biçimde vardır:*

1. *$f(0) = a$.*
2. *Her $n \in \mathbb{N}$ için $f(n+1) = G(f(n))$* ***(Yineleme Formülü).***

Bizi bu sonucun özel bir durumu ilgilendirecektir. $A \neq \emptyset$ herhangi bir küme olsun.

Teorem 1.1.3 (Yineleme Teoremi) *$A \neq \emptyset$ olmak üzere herhangi bir $G : \mathcal{P}^*(A) \to \mathcal{P}^*(A)$ dönüşümü ve bir $B \in \mathcal{P}^*(A)$ verildiğinde* tek *olarak belirli bir $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}^*(A)$ fonksiyonu*

$$f(0) = B \text{ ve her } n \in \mathbb{N} \text{ için } f(n+1) = G(f(n))$$

olacak biçimde vardır.

$B_n := f(n)$ olarak tanımlarsak

$$B_0 = B \text{ ve her } n \in \mathbb{N} \text{ için } B_{n+1} = G(B_n) \tag{1.1}$$

olur. Çoğu matematikçi (1.1)'deki denklemleri B_n kümelerinin *tanımı* olarak almakta bir sakınca görmez.

Cantor Köşegen Yöntemi

Bu yöntem Gödel'in kanıtlarında önemli bir yer tutar. Cantor'un [10] makalesinde gösterdiği şey şudur: X herhangi bir küme olmak üzere X kümesinden iki öğeli bir Y kümesine olan fonksiyonların $F(X,Y)$ kümesinin gücü X kümesinin gücünden daha büyüktür. $Y = \{0,1\}$ alabiliriz. Kanıt şöyledir: Bir $\varphi : X \to F(X,Y)$ tam eşlemesi olduğunu varsayalım. $f_x := \varphi(x)$ olsun. $g : X \to Y$ fonksiyonu her $x \in X$ için $g(x) := 1 - f_x(x)$ olarak açıklansın. Elbette $g \in F(X,Y)$ ancak her $x \in X$ için $g \neq f_x$. Eğer bir x için $g = f_x$ varsayarsak $f_x(x) = g(x) = 1 - f_x(x)$ çelişkisini elde ederiz. Burada Y'nin tam iki öğeli olması gerekmez, daha fazla öğesi olabilir. Önemli olan $g(x)$ değerini $f_x(x)$'ten farklı açıklayabilmektir. $A_x := \{y \in X \mid f_x(y) = 1\}$ alırsak $\psi(x) := A_x$ ile bir $\psi : X \to \mathcal{P}(X)$ tanımlamış oluruz. φ dönüşümünün tameşleme olmasını istemek ψ dönüşümünün tameşleme olmasını istemektir ve yukarıdaki kanıt bunun olamayacağını gösterir.

Tanım 1.1.4 *X kümesi ve $R \subseteq X \times X$ bağıntısı ve $x, y \in X$ verilsinler.*

$$R_x := \{y \mid (x,y) \in R\}, \; R^y := \{x \mid (x,y) \in R\},$$
$$D_R := \{x \mid (x,x) \in R\}, \; D_R^c := X \backslash D_R$$

*olmak üzere R_x kümelerine R'nin **dikey kesitleri**, R^y kümelerine R'nin **yatay kesitleri**, D_R kümesine R'nin **köşegeni** ve $D_R^c = X \backslash D_R$ kümesine R'nin **köşegen karşıtı** denir. Herhangi bir $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ için $\mathcal{C} \subseteq \{R_x \mid x \in X\}$, dd. her $C \in \mathcal{C}$ uygun bir x ile $C = R_x$ ise R bağıntısı $\mathcal{C}$ ailesi için **evrenseldir** denir.*

Lemma 1.1.5 (Köşegen Lemması) *$X \neq \emptyset$ olsun.*

(1) Her $x \in X$ için $X_x \subseteq X$ altkümeleri nasıl verilirse verilsinler bir $A \subseteq X$ altkümesi her $x \in X$ için $A \neq X_x$ olacak biçimde vardır.

(2) Bir $R \subseteq X \times X$ bağıntısı nasıl verilirse verilsin her $x, y \in X$ için

$$D_R^c \neq R_x \quad ve \quad D_R^c \neq R^y.$$

Kanıt. (1) $A := \{x \mid x \notin X_x\}$ olsun. Bir $x \in X$ için $A = X_x$ varsayımı bizi hemen $x \notin A \overset{vsy}{\Longleftrightarrow} x \notin X_x \overset{def}{\Longleftrightarrow} x \in A$ çelişkisine götürür.

(2) (1) şimdi R'nin $\{R_x\}_{x \in X}$ dikey kesitler kümesine uygulanırsa

$$A = \{x \mid x \notin R_x\} = \{x \mid (x,x) \notin R\} = D_R^c$$

için $A \neq R_x$, $(x \in X)$ olur. Aynı yöntem R'nin $\{R^x\}_{x \in X}$ yatay kesitler ailesine uygulandığında her $x \in X$ için $R^x \neq D_R^c$ elde edilir. ■

Köşegen yöntemimize farklı bir şekil verebiliriz. Şimdi $X \times X \overset{f}{\to} Z \overset{g}{\to} Z$ fonksiyonları verilsin. $a \in X$ ve her $x \in X$ için $f_a(x) := f(x,a)$ ve $h(x) :=$

$g(f(x,x))$ olsun. Elimizde her $a \in X$ için bir $f_a : X \to Z$ fonksiyonu ve $h : X \to Z$ fonksiyonumuz var. Bir $a \in X$ için $h = f_a$ olduğunu varsayarsak

$$g(f(a,a)) = h(a) = f_a(a) = f(a,a)$$

olur, dd. $f(a,a)$ noktası g'nin bir *sabit noktası* olmak zorundadır.

Önerme 1.1.6 *f, g, h ve f_a'lar yukarıdaki gibi olmak üzere g fonksiyonun sabit noktası yoksa her $a \in X$ için $h \neq f_a$.*

$|Z| \geq 2$ ise sabit noktası olmayan $g : Z \to Z$ fonksiyonları vardır.

Yukarıda Cantor köşegen yöntemini açıklarken kullandığımız gösterimlerle $\varphi : X \to F(X,Y)$ bir tameşleme, $|Y| \geq 2$ ve $g : Y \to Y$ sabit noktasız olsun. $f : X \times X \to Y$ fonksiyonu $f(x,z) := \varphi(z)(x)$ alınırsa $f_z = \varphi(z)$ ve

$$h(x) = g(f(x,x)) = g(\varphi(x)(x))$$

olmak üzere her $z \in X$ için $\varphi(z) = f_z \neq h$ olur ve dolayısıyla φ örten olamaz!

1.2 Abeceler ve Sözcükler

A herhangi bir küme olsun. Bu kümeyi **abecemiz** olarak alıp öğelerinden sözcükler oluşturacağız. A kümesinin öğeleri abecemizin **harfleri** olacaklardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathrm{bs}(n) := \{m \in \mathbb{N} \,|\, m < n\}$$

kümesine n doğal sayısının $<$ doğal sıralamasına göre başlangıcı denir[2]. Bu durumda $\mathrm{bs}(0) = \emptyset$ ve $n \geq 1$ içinse $\mathrm{bs}(n) = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$^nA := \{s | s : \mathrm{bs}(n) \to A\} \text{ ve } \mathrm{Sz}\,\boldsymbol{A} := {}^{<\omega}A = \bigcup_{n<\omega} {}^nA = \bigcup_{n=0}^{+\infty} {}^nA.$$

^nA kümesinin bir s öğesine A abecesinin**uzunluğu** n olan bir **sözcüğü** denir. s sözcüğünün uzunluğunu $\mathrm{uz}(s)$ ile gösterelim. $m \leq n$ olmak üzere $s|\,\mathrm{bs}(m)$ kısıtlamalarına s sözcüğünün **başlangıçları** denir; ayrıca $m < n$ ise **öz başlangıçları** denir. $\mathrm{Sz}\,A$ kümesine ise A abecesinin **sözcükler kümesi** denir. Bu arada $^0A = \{\emptyset\}$ olduğunu belirtelim, dd. uzunluğu 0 olan bir tek $\emptyset$ boş sözcüğümüz vardır. $s_k := s(k)$ olmak üzere $s : \mathrm{bs}(n) \to A$ sözcüğü

[2]Doğal sayılarımızı $0 = \emptyset, 1 = \{0\}, 2 = \{0,1\} \cdots$ von Neumann doğal sayıları olarak alırsak $\mathrm{bs}(n) = n$ olacağı apaçıktır

için $(s_k)_{k<n}$ gösterimi de kullanılır. Bu gösterimde $n = 0$ için elbette $s = ()$, dd. boş 0-lı olur. s ile $(s_0, \ldots, s_{n-1})$ eşlenerek ${}^nA$ yerine A^n alırsak

$$\mathrm{Sz}\, A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n$$

olur. Dolayısıyla bu gösterimle elbette $A^0 = \{()\}$.

Uzlaşma: Çalıştığımız evren herhangi bir A abecesinin $\mathrm{Sz}\, A$ sözcükler kümesi ise, bu evren için kullanacağımız değişkenler

$$s, t, \ldots, , t', t'', \ldots, s', s'', \ldots \text{ ve bazen } s_1, s_2, \ldots, t_1, t_2, \ldots$$

değişkenleri olacaktır.

$s = (s_k)_{k<n}$ ve $t = (t_i)_{i<m}$ abecemizin iki sözcüğü olmak üzere

$$s = t \Longleftrightarrow n = m \text{ ve her } k \in \mathrm{bs}(n) \text{ için } s_k = s(k) = t(k) = t_k. \qquad (1.2)$$

Bir $s = (s_0, \ldots, s_{n-1}) \in \mathrm{Sz}\, A$ sözcüğü $u_{k+1} := s_k$ olmak üzere $s = (u_1, \ldots, u_n)$ olarak da gösterilir. Biz her iki gösterimi de kullanmakta bir sakınca görmeyeceğiz. Ayrıca tek harflik (u_1) sözcüğü yerine kısaca u_1 yazacağız.

Şimdi $\mathrm{Sz}\, A$ sözcükler kümemizde bir ikili **ekleme işlemi** tanımlayacağız. Bu işlemi gösterdiğimiz $\lhd$ iminin A abecesinde olmamasını isteyeceğiz. $s = (s_0, \ldots, s_{n-1})$, $t = (t_0, \ldots, t_{m-1})$ için $\mathbf{s} \lhd \mathbf{t}$ sözcüğü s fonksiyonunun $\mathrm{bs}(n+m)$ kümesine t olarak genişletilmesinden başka bir şey olmayacaktır, dd.

$$(\mathbf{s} \lhd \mathbf{t})(k) := \begin{cases} s(k), & 0 \le k \le n-1 \\ t(k-n), & n \le k \le n+m-1 \end{cases}.$$

Diğer gösterimle

$$s \lhd t = (s_0, \ldots, s_{n-1}, t_0, \ldots, t_{m-1}).$$

$s \lhd t$'ye t sözcüğünün s sözcüğüne **eklenmesi** diyeceğiz[3]. Bu işlemin şu iki özelliği kolayca görülür: Her $s, t, u \in \mathrm{Sz}\, A$ için

1. $\emptyset \lhd s = s \lhd \emptyset = s$.
2. $t' := t \lhd u$ ve $s' := s \lhd t$ olmak üzere $s \lhd t' = s' \lhd u$.

İkinci özellik $\lhd$ işleminin birleşme özelliğinden başka bir şey değildir. Birleşme özelliğinden dolayı yalın biçimde

$$s \lhd t \lhd u := s \lhd t' = s' \lhd u$$

[3][17]'de $s \lhd t$ yerine $s^\wedge t$ gösterimini kullanmıştık. Mantık kitaplarında yeğlenen gösterim $s \frown t$ veya $s^\frown t$ 'dir. Seçtiğimiz imin soldan sağa genişlemeyi görsel olarak daha iyi belirttiğini düşünüyoruz.

yazacağız. Her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n \in \mathrm{Sz}\, A$ sözcükleri verilmiş olsunlar. Yinelgen tanımlamayla tek olarak belirli $t_n := s_0 \lhd s_1 \lhd \cdots \lhd s_n$ sözcükleri $t_0 := s_0$ ve

$$t_{n+1} = s_0 \lhd s_1 \lhd \cdots \lhd s_{n+1} = t_n \lhd s_{n+1} \tag{1.3}$$

olacak biçimde tanımlanabilirler. Son bir sadeleştirmeyle

$$s_0 s_1 \cdots s_n := s_0 \lhd s_1 \lhd \cdots \lhd s_n$$

olarak açıklayalım. Bu gösterimin elbette bir sakıncası vardır: $p, pp \in A$ olabilir ve bu durumda $q := pp$ olmak üzere ppp sözcüğü çok anlamlıdır; $p \lhd q, q \lhd p$ ve $p \lhd p \lhd p$ olabilir. $s_0 s_1 \cdots s_n$ yalın gösterimini kullandığımızda abecemizin böyle bir çok anlamlılığa izin vermediğini varsayalım. Varsayımlarımızdan dolayı $s_0 \lhd s_1 \lhd \cdots \lhd s_n$ yerine $s_0 s_1 \cdots s_n$ yazdığımızda hiçbir çok anlamlılıkla karşılaşmayız.

Önerme 1.2.1 *$s_0, s_1, \cdots, s_n$ sözcükleri ve $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in A$ harfleri verilmiş olsunlar.*

1. $$a_1 \cdots a_n = b_1 \cdots b_m \Longleftrightarrow n = m \text{ ve } a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n. \tag{1.4}$$

2. *$s_0 s_1 \cdots s_n$ ifadesinde, sıra korunmak üzere, istenildiği gibi gruplama yapılabilir; sonuç değişmez. Açarsak:*

   $$t_1 = s_0 \cdots s_{k_1}, \ldots, t_m = s_{k_{m-1}+1} \cdots s_n$$

   ise $s_0 s_1 \cdots s_n = t_1 \cdots t_m$.

Kanıt. Savımızın ikinci kısmı birleşme özelliği ve (1.3)'ten n üzerinden tümevarımla kolayca görülür. (1.4) ise (1.2)'den başka bir şey değildir. ■

$s = s_0 s_1 \cdots s_n$ gösteriminde her s_k abecemizin bir harfi ise, dd. $s_k \in A$ ise $s = s_0 s_1 \cdots s_n$ ifadesine s sözcüğünün **harfsel yazılımı** (veya **harfsel gösterimi**) diyelim. (1.4) şöyle de okunabilir: $s = s_0 s_1 \cdots s_n$ ve $t = t_0 t_1 \cdots t_m$ *harfsel yazılımla* verilmiş iki sözcük ise

$$s = t \Longleftrightarrow n = m \text{ ve } s_0 = t_0, \ldots, s_n = t_n.$$

1.3 Tümevarım ve Yineleme

Mantıkta sıkça karşılaştığımız bir özel tümevarım türünü ve yinelgen tanımlamayı tartışacağız. Boştan farklı bir $A \neq \emptyset$ kümesi ve A-fonksiyonlarının bir F ailesi verilmiş olsun. Bu arada bir A-**fonksiyonu**ndan $n \in \mathbb{N}$ olmak

üzere $f : A^n \to A$ tipinde bir fonksiyon anlaşılacaktır. Her $n \in \mathbb{N}^*$ için, F ailesindeki n-değişkenli fonksiyonların kümesini F_n ile gösterelim. F kümesinin çokluğu üzerine herhangi bir kısıtlama getirilmemiştir. $K \subseteq A$ olmak üzere $f \in F_n$ için $f_K := f|K^n$ olsun. Bir $C \subseteq A$ kümesine her $f \in F$ için $\operatorname{im} f_C \subseteq C$ ise, dd. her $f \in F$ için f_C bir C-fonksiyonu ise veya açık yazılımla aşağıdaki koşul sağlandığında **F-kapalıdır** denir:

(FK) Her $n \in \mathbb{N}^*$ ve her $f \in F_n$ için $c_1, \ldots, c_n \in C$ ise $f(c_1, \ldots, c_n) \in C$.

Tanım 1.3.1 *$\emptyset \neq B \subseteq A$ ve A-fonksiyonlarının bir F ailesi verilmiş olsun.*

$$B^F := \bigcap \{C \mid B \subseteq C \subseteq A \text{ ve } C \text{ kümesi } F\text{-kapalı}\}$$

*kümesine B kümesinin **F-kapanışı** denir.*

Her şeyden önce A kümesi F-kapalıdır. Diğer yandan F-kapalı kümelerin arakesitleri de F-kapalıdır. Böylece B^F kümesi, A kümesinin B kümesini içeren F-kapalı altkümelerinin en küçüğüdür.

Örnek 1.3.2 Örneğin $A := \mathbb{N}$, $B := \{0\}$ ve $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(n \rightsquigarrow n+1)$ ardıl fonksiyonu olmak üzere

$$B^F = \{0\}^{\{S\}} = \mathbb{N}.$$

Gerçekten de bir $C \subseteq \mathbb{N}$ kümesi için $0 \in C$ ve her $c \in C$ için $c+1 \in C$ ise $C = \mathbb{N}$'dir. ▲

Şimdi $\emptyset \neq B \subseteq A$ ve $G : \mathcal{P}^*(\operatorname{Sz} A) \to \mathcal{P}^*(A)$ fonksiyonu $X \in \mathcal{P}^*(A)$ için

$$\begin{aligned} G(X) &:= X \cup \{f(c_1, \ldots, c_m) \mid m \in \mathbb{N}^*,\ f \in F_m,\ c_1, \ldots, c_m \in X\} \\ &= X \cup (\textstyle\bigcup_{f \in F} \operatorname{im} f_X) \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. (1.1.3) Yineleme Teoremi'nden tek olarak belirli bir $h : \mathbb{N} \to \mathcal{P}^*(A)$ fonksiyonunu $B = h(0)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $h(n+1) = G(h(n))$ olacak biçimde bulabiliriz. $B_n(F) := h(n)$ olarak tanımlarsak $B_0(F) = B$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} B_{n+1}(F) &= B_n(F) \cup \{f(c_1, \ldots, c_m) \mid m \in \mathbb{N}^*, f \in F_m,\ c_1, \ldots, c_m \in B_n(F)\} \\ &= B_n(F) \cup \bigcup_{f \in F} \operatorname{im} f_{B_n(F)} \end{aligned}$$

elde ederiz. Yineleme teoremini nasıl kullanacağımızı öğrendikten sonra, aslında sonuç olan bu iki denklemi ve benzerlerini, genelde yapıldığı gibi, tanım olarak almakta bir sakınca görmeyeceğiz.

Teorem 1.3.3 *$B_n(F)$'ler yukarıdaki gibi olmak üzere*

$$B_0(F) \subseteq B_1(F) \subseteq B_2(F) \subseteq \cdots \text{ ve } B_F := \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n(F) = B^F.$$

Sonuç 1.3.4 *B ve F sayılabilirse B_F de sayılabilir.*

Kanıt. Her şeyden önce tanım gereği (B_n) dizisi artandır. Şimdi $B_F \subseteq B^F$ olduğunu görelim. Bunun için n üzerinden tümevarımla her n için $B_n \subseteq B^F$ olduğunu kanıtlayacağız. $B_0 = B \subseteq B^F$ biliniyor. Şimdi $B_n \subseteq B^F$ varsayarsak, B^F kümesi F-kapalı olduğundan

$$\{f(c_1, \ldots, c_m) \,|\, m \in \mathbb{N}^*,\ f \in F_m,\ c_1, \ldots, c_m \in B_n\} \subseteq B^F$$

olur ve B_{n+1} kümesi B^F kümesinin iki altkümesinin birleşimi olarak B^F kümesinin altkümesidir.

$B^F \subseteq B_F$ olduğunu görmek için, $B = B_0(F) \subseteq B_F$ olduğundan, B_F kümesinin F-kapalı olduğunu görmek yeterlidir. $b_1, \ldots, b_m \in B_F$ ve $f \in F_m$ keyfi verilsinler. $(B_n(F))$ dizisi genişleyen bir dizi olduğundan bir n sayısı $b_1, \ldots, b_m \in B_n(F)$ olacak biçimde bulunabilir, dolayısıyla $f(b_1, \ldots, b_m) \in B_{n+1}(F)$ ve $f(b_1, \ldots, b_m) \in B_F$ olacaktır.

(1.3.4)*'ün kanıtı*: Sayılabilir çoklukta sayılabilir kümenin birleşimi de sayılabilir olduğundan, her n için B_n'nin sayılabilir olduğu tümevarımla hemen görülür, dolayısıyla B_F sayılabilirdir. ■

B_F ve B^F kümeleri için

$$\overline{(B, F)} := B_F = B^F \tag{1.5}$$

gösterimini seçersek, B_F kümesinin tanımına F-kapanışının **aşağıdan yukarıya** veya **içsel** tanımı, B^F kümesinin tanımına ise bu kapanışın **yukarıdan aşağıya** veya **dışsal** tanımı denir.

Teorem 1.3.5 ($\overline{(B,F)}$-Tümevarımıyla Kanıtlama) *A, B ve F yukarıdaki gibi olsunlar. A kümesinde açıklanan bir $\varphi(x)$ önermesinin $\overline{(B, F)}$ kümesinde doğru olduğunu göstermek için aşağıdaki iki adım yeterlidir:*

1. *Her $b \in B$ için $\varphi(b)$'nin doğru olduğu ve*
2. *Her $n \in \mathbb{N}^*$ ve her $f \in F_n$ için önermemizin $a_1, \ldots, a_n \in A$ için doğruysa $f(a_1, \ldots, a_n)$ için de doğru olduğu gösterilir.*

Sonuç 1.3.6 *$\overline{(B, F)}$ kümesinin öğelerine ilişkin bir $\psi(x)$ önermesi verilsin. ψ önermesinin $\overline{(B, F)}$ kümesinde doğru olduğunu göstermek için aşağıdaki iki adım yeterlidir:*

1. *Her $b \in B$ için $\varphi(b)$'nin doğru olduğu ve*
2. *Her $n \in \mathbb{N}^*$ ve her $f \in F_n$ için önermemizin $a_1, \ldots, a_n \in \overline{(B,F)}$ için doğruysa $f(a_1, \ldots, a_n)$ için de doğru olduğu gösterilir.*

Kanıt. $C := \{x \,|\, x \in A \text{ ve } \varphi(x) \text{ doğru}\}$ kümesi birinci özellikten dolayı B kümesini içerir ve ikinci koşuldan dolayı ise F-kapalıdır. Dolayısıyla $\overline{(B,F)} = B^F \subseteq C$.

Sonucun kanıtı: $D := \{x \,|\, x \in \overline{(B,F)} \text{ ve } \psi(x) \text{ doğru}\}$ kümesi birinci özellikten dolayı B kümesini içerir ve ikinci koşuldan dolayı ise F-kapalıdır. Dolayısıyla $\overline{(B,F)} = B^F \subseteq D$. Tanım gereği ise $D \subseteq \overline{(B,F)}$, sonuçta $D = \overline{(B,F)}$. ■

(1.1.2) teoremini bir kez daha amacımıza uygun olarak dile getirelim. $B = \{0\}$ ve $F = \{S\}$ olmak üzere $\mathbb{N} = \overline{(B,F)}$ olduğunu biliyoruz. Bir V kümesi ve bir $G : V \to V$ fonksiyonu verilsin. Bir $f : B \to V$ fonksiyonu vermek, bu fonksiyonun $f(0) := a$ değeri ile tek olarak belirli olduğundan, bir $a \in V$ vermeye eşdeğerdir. (1.1.2) teoremi bize bu f fonksiyonunun tek bir biçimde, yine f ile göstereceğimiz bir $f : \mathbb{N} \to V$ fonksiyonuna, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f(n+1) = f(S(n)) = G(f(n))$$

olacak biçimde genişletilebileceğini söyler. Şimdi bu durumu genelleştireceğiz.

Yine $\emptyset \neq B \subseteq A$ ve F ise A-fonksiyonlarının bir ailesi olsun. $\emptyset \neq V$ herhangi bir küme ve bir

$$h : B \to V$$

fonksiyonu verilsin. Ayrıca *her* $f \in F_n$ fonksiyonuna karşılık n-değişkenli bir V-fonksiyonu verilmiş olsun ve bu fonksiyonu f^* ile gösterelim. h fonksiyonunun bir $\bar{h} : \overline{(B,F)} \to V$ fonksiyonuna

$$\begin{aligned} &\text{her } n \in \mathbb{N}^*, \text{ her } f \in F_n \text{ ve her } x_1, \ldots, x_n \in \overline{(B,F)} \text{ için} \\ &\bar{h}(f(x_1, \ldots, x_n)) = f^*(\bar{h}(x_1), \ldots, \bar{h}(x_n)) \end{aligned} \tag{1.6}$$

olacak biçimde genişletilip genişletilemeyeceğini tartışacağız[4]. $\bar{h}$ gibi bir fonksiyonun varlığını önleyecek akla gelen ilk neden, şimdi açıklayacağımız

[4]Cebir derslerinden bildiğimiz ve ileride de öğreneceğimiz gibi F fonksiyonlar kümesi $\overline{(B,F)}$ kümesinde bir cebirsel yapı belirler. $F^* := \{f^* \,|\, f \in F\}$ olmak üzere F^* fonksiyonlar kümesi ise V kümesinde aynı türden bir cebirsel yapı belirler. Bu bağlamda tartıştığımız şey h fonksiyonunu bir $\bar{h} : (\overline{(B,F)}, F) \to (V, F^*)$ yapı dönüşümüne genişletme problemidir.

uyuşmazlıklar sorunudur. Özel bir $f \in F_n$ için $a_1, \ldots, a_n \in \overline{(B,F)}$ öğeleri $f(a_1, \ldots, a_n) = b \in B$ olacak biçimde bulunabilir. Bu durumda

$$\bar{h}(f(a_1, \ldots, a_n)) = \bar{h}(b) = h(b) \neq f^*(\bar{h}(a_1), \ldots, \bar{h}(a_n))$$

olabilir; bu ise (1.6)'yı sağlamamızı önler. Benzer biçimde iki farklı $f_1, f_2 \in F$ ve $a_1, \ldots, a_n, c_1, \ldots, c_m \in \overline{(B,F)}$ için $f_1(a_1, \ldots, a_n) = f_2(c_1, \ldots, c_m)$, ancak $f_1^*(\bar{h}(a_1), \ldots, \bar{h}(a_n)) \neq f_2^*(\bar{h}(c_1), \ldots, \bar{h}(c_m))$ olabilir. Bu durumda yine (1.6) koşulunu sağlayan bir $\bar{h}$ fonksiyonu tanımlanamaz.

Herhangi bir $f \in F$ birebir değilse yine bir uyuşmazlıkla karşılaşabiliriz. Örneğin $(a_1, \ldots, a_n), (a'_1, \ldots, a'_n) \in \overline{(B,F)}^n$ farklı, ancak $f(a_1, \ldots, a_n) = f(a'_1, \ldots, a'_n)$ ise $f^*(\bar{h}(a_1), \ldots, \bar{h}(a_n)) \neq f^*(\bar{h}(a'_1), \ldots, \bar{h}(a'_n))$ olması durumunda (1.6)'yı sağlayan bir $\bar{h}$ fonksiyonu olamaz. $\bar{h}$ fonksiyonunun olabilmesi için en azından bu uyuşmazlıkların önlenmesi zorunludur.

$\overline{(B,F)}$ kümesi F-kapalı olduğundan, elbette her $f_{\overline{(B,F)}}$ bir $\overline{(B,F)}$-fonksiyonudur.

Tanım 1.3.7 $\{B\} \cup \{\operatorname{im} f_{\overline{(B,F)}} \mid f \in F\}$ *ayrık bir aile ve her* $f \in F$ *birebir ise* F *fonksiyonlar kümesi* $\overline{(B,F)}$ *kümesini* ***serbest üretmiştir*** *veya* B *kümesi* $\overline{(B,F)}$*'nin bir* ***bağımsız üreten sistemidir*** *denir.*

F kümesi $\overline{(B,F)}$ kümesini serbest üretmişse yukarıda belirtilen uyuşmazlıklarla karşılaşmayız ve bu $\bar{h}$ fonksiyonunun *varlığı* ve *tekliği* için yeterlidir.

Teorem 1.3.8 ($\overline{(B,F)}$-Yineleme) $\emptyset \neq B \subseteq A$ *ve* A*-fonksiyonlarının bir* F *ailesi verilmiş olsun.* F *fonksiyonlar kümesi* $\overline{(B,F)}$ *kümesini serbest üretiyorsa her* $h : B \to V$ *fonksiyonu (1.6) sağlanacak biçimde tek olarak belirli bir* $\bar{h} : \overline{(B,F)} \to V$ *fonksiyonuna genişletilebilir.*

Kanıt. *Teklik:* h fonksiyonunun $\overline{(B,F)}$ kümesine (1.6) sağlanacak biçimde $\bar{h}_1$ ve $\bar{h}_2$ gibi iki genişletilmesi verilsin. $E := \{x \in \overline{(B,F)} \mid \bar{h}_1(x) = \bar{h}_2(x)\}$ dersek her şeyden önce $B \subseteq E$ ve (1.6)'dan dolayı ise her $f \in F_n$ ve her $e_1, \ldots, e_n \in E$ için

$$\begin{aligned}\bar{h}_1(f(e_1, \ldots, e_n)) &= f^*(\bar{h}_1(e_1), \ldots, \bar{h}_1(e_n)) = f^*(\bar{h}_2(e_1), \ldots, \bar{h}_2(e_n)) \\ &= \bar{h}_2(f(e_1, \ldots, e_n))\end{aligned}$$

olacağından $f(e_1, \ldots, e_n) \in E$ elde edilir. Dolayısıyla (1.3.6)'da $\psi(x)$ olarak $\bar{h}_1(x) = \bar{h}_2(x)$ önermesini alırsak $E = \overline{(B,F)}$ elde ederiz. Dolayısıyla $\bar{h}_1 = \bar{h}_2$.

Varlık: $\overline{h}$ fonksiyonunun varlığını kanıtlayacağız. $B_n = B_n(F)$ olmak üzere her n için $\overline{h}_n : B_n \to V$ fonksiyonlarını $\overline{h}_{n+1}|B_n = \overline{h}_n$ olacak biçimde o

şekilde tanımlayacağız ki her n için $\overline{h}|B_n := \overline{h}_n$ ile tanımlanan $\overline{h} : \overline{(B,F)} \to V$ fonksiyonu veya Kümeler Kuramı diliyle $\overline{h} := \bigcup \overline{h}_n$ fonksiyonu (2.12)'yi sağlayacaktır. $B_0 = B$ olduğundan $\overline{h}_0 := h$ alıyoruz.

Şimdi $\bar{h}_0, \ldots, \bar{h}_n$ fonksiyonları koşularımızı sağlayacak biçimde tanımlanmış olsunlar. Bir $\bar{h}_{n+1} : B_{n+1} \to V$ fonksiyonu $\bar{h}_{n+1}|B_n := \bar{h}_n$ olarak tanımlansın. Herhangi bir $b \in B_{n+1} \backslash B_n$ verildiğinde F, $\overline{(B,F)}$ kümesini serbest ürettiğinden tek olarak belirli bir $f \in F_m$ ve tek olarak belirli $b_1, \ldots, b_m \in B_n$ ile $b = f(b_1, \ldots, b_m)$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} \bar{h}_{n+1}(b) = \bar{h}_{n+1}(f(b_1, \ldots, b_m)) &:= f^*(\bar{h}_n(b_1), \ldots, \bar{h}_n(b_m)) \\ &\overset{def}{=} f^*(\bar{h}_{n+1}(b_1), \ldots, \bar{h}_{n+1}(b_m)) \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Bu tanım kusursuzdur, tanım gereği (1.6) sağlanır ve $\bar{h}_{n+1}$ fonksiyonu $\bar{h}_n$ fonksiyonunun B_{n+2} kümesine bir genişlemesidir. ■

Örnek 1.3.9 $k \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{N}_k := \{n \in \mathbb{N} \,|\, k \leq n\}$ olmak üzere $s_k : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_k$ $(n \rightsquigarrow n+1)$ ardıl fonksiyonu birebirdir ve $B := \{k\}$, $F = \{s_k\}$ alındığında $\overline{(B,F)} = \mathbb{N}_k$ olur. Böylece $\mathrm{im}(s_k)_{\mathbb{N}_k} = s_k(\mathbb{N}_k) = \{k+1, k+2, \ldots\}$ kümesi B ile ayrık olduğundan $F = \{s_k\}$ fonksiyon kümesi $\overline{(B,F)} = \mathbb{N}_k$ kümesini serbest üretir. Şimdi $V \neq \emptyset$ herhangi bir küme, $f : V \to V$ herhangi bir fonksiyon ve $a \in V$ herhangi bir öğe olmak üzere $h : \{k\} \to V$ fonksiyonu $h(k) := a$ olarak açıklansın. (1.3.8)'den dolayı bu bir $\bar{h} : \mathbb{N}_k \to V$ fonksiyonuna her $n \in \mathbb{N}_k$ için $\bar{h}(s_k(n)) = f(\bar{h}(n))$, dd. $\bar{h}(n+1) = f(\bar{h}(n))$ olacak biçimde genişletilebilir. Bu sonucu diğer matematik derslerinde sıkça kullanırız; bu nedenle onu bir kez daha amacımıza uygun biçimde dile getireceğiz:

Teorem 1.3.10 *$V \neq \emptyset$, $a \in V$ ve $g : V \to V$ verildiğinde bir $f : \mathbb{N}_k \to V$ fonksiyonu*

$$f(k) = a \text{ ve her } n \in \mathbb{N}_k \text{ için } f(n+1) = g(f(n)) \tag{1.7}$$

olacak biçimde bulunabilir.

Varlığını Yineleme Teoremi'nden kazandığımız $f : \mathbb{N}_k \to V$ fonksiyonunun (1.7)'deki özellikleri karşımıza genelde tanım olarak çıkar. Örneğin: "$f : \mathbb{N}_k \to V$ fonksiyonu $f(k) := a$ ve her $n \geq k$ için $f(n+1) := g(f(n))$ olarak tanımlansın." denir. Bu ve benzeri başka tanımlara ilişkin [17]'ye bakabilirsiniz.

Özel olarak $V = \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu $g(x) := xa$ ile tanımlarsak, tek olarak belirli bir $f : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$f(1) = a \text{ ve her } n \in \mathbb{N}_1 \text{ için } f(n+1) = g(f(n)) = f(n)a$$

olacak biçimde elde ederiz. $a^n := f(n)$ olarak tanımlarsak, genelde olarak tanım olarak kullanılan

$$a^1 = a \text{ ve her } n \in \mathbb{N}_1 \text{ için } a^{n+1} = a^n a$$

bağıntılarına ulaşırız. ▲

Not 1.3.11 Yineleme teoremimizin cebirsel olarak ne anlama geldiğine kısaca değinelim. Yeterince cebir bilgisi olmayan okurlar kitabımızın 3.1 ve 3.10 kesimlerine bakabilirler. $\emptyset \neq B \subseteq A$ ve A-fonksiyonlarının bir F ailesi verilmiş olsun. $\mathfrak{A} := (A, F)$ bir cebirsel yapı belirler. $V \neq \emptyset$ ve her n değişkenli $f \in F$ fonksiyonuna karşılık f^* ise yine n değişkenli bir V-fonksiyonu olsun. $F^* := \{f^* \mid f \in F\}$ olmak üzere $\mathfrak{V} := (V, F^*)$ olsun. Son olarak $F_{\overline{(B,F)}} := \{f_{\overline{(B,F)}} \mid f \in F\}$ olmak üzere $\mathfrak{B} := (\overline{(B,F)}, F_{\overline{(B,F)}})$ olsun. $\mathfrak{A}, \mathfrak{V}$ ve $\mathfrak{B}$ aynı türden cebirsel yapılardır. B kümesi $\mathfrak{B}$ cebirsel yapısının bir üreten sistemidir. (1.6) koşulunu sağlayan bir $\bar{h} : \overline{(B,F)} \to V$ dönüşümü, tanım gereği tam da $\mathfrak{B}$ yapısından $\mathfrak{V}$ yapısına bir yapı dönüşümünün tanımıdır. Biz herhangi bir $h : B \to V$ dönüşümünün ne zaman bir $\bar{h} : \overline{(B,F)} \to V$ yapı dönüşümüne genişletilebileceğini tartıştık. ▲

Bölüm 2

ÖNERMELER MANTIĞI

Matematikçilerin mantık hakkındaki görüşleri zaman içerisinde değişmiştir. Bindokuzyüzlü yılların başında tüm matematiği mantığın bir parçası olarak görme eğilimi varken bugün mantığı matematiğin bir parçası olarak görme eğilimi vardır. Biz de Matematiksel Mantığı, matematiğin herhangi bir alanı gibi, örneğin analiz veya cebir gibi ele alacağız. Öyleyse diğer matematik derslerindeki alışkanlıklarımızı koruyacağız. Örneğin okur "değil", "ve", " veya", "ise", "ancak ve ancak", " her", "en az bir" ve "eşittir" söylemlerinin kısaltmaları olarak sırasıyla

$$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \Rightarrow,\ \Leftrightarrow,\ \forall,\ \exists,\ = \tag{2.1}$$

imlerini kullanmaya alışkındır**;** bunlar verilen önermelerden yeni önermeler kazanmamızı sağlayan mantık işlemcileridirler. Bu imler bu kitapta da aynı biçimde kullanacağımız **anlamsal kısaltmalardır**.

Örneğin Gruplar Kuramı dersinde "Her G grubunda $xy = xz$ ise $y = z$" önermesini kanıtlarız. Kanıtımızı grup ilksavlarından yola çıkarak ve bazı mantıksal çıkarım kurallarını kullanarak yaparız. Ancak yukarıdaki önermeyi

$$\forall x \forall y \forall z\ (xy = xz \Longrightarrow y = z) \tag{2.2}$$

formülü ile ifade edebiliriz. Biz grup ilksavlarından yola çıkarak bazı mantıksal çıkarım kurallarıyla bu önermeyi kanıtlarız. Matematiğin tüm alanlarında yaptığımız budur. Şimdi biz tüm bu kanıtların ortak yanlarını, dd. "verilmiş aksiyomlardan bazı formüllerin kazanılmasını" içerikten arındırıp bir anlamda mekanikleştirmek istiyoruz.

Özetle Matematiksel Mantık'ta yapacağımız şudur: Nesnelerimiz bir A abecesinin "terim" ve "formül" olarak adlandıracağımız bazı sözcükleri olacaktır. Her şeyden önce mantık işlemcilerini içerikten arındıracağız; bu abece

(2.1) imlerini biçimselleştiren

$$\neg,\ \curlywedge,\ \curlyvee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow,\ \dot{\forall},\ \dot{\exists},\ \doteq$$

mantıksal imlerinin bir kısmını içerecektir. Kitabımızda bu imler *hiçbir anlam taşımayacaklar* ve biçimsel kuramların mantık harfleri olarak kullanılacaktır. Bu iki grup imleri birbirine görsel olarak benzer seçtik. Örneğin (2.2) formülünü hiçbir anlam taşımayan

$$\dot{\forall}x\dot{\forall}y\dot{\forall}z(xy \doteq xz \rightarrow y \doteq z) \tag{2.3}$$

ile biçimselleştireceğiz. Biçimsel formüllerimizin bir kısmını Gruplar Kuramı'nın ilksavları olarak seçeceğiz. Tüm kuramlar için ortak mantık ilksavlarımızı ve ortak çıkarım kurallarımızı seçeceğiz. Ayrıca biçimsel kanıt kavramını vereceğiz ve φ biçimsel formülü Γ biçimsel ilksavlarından biçimsel kanıtlanabiliyorsa bunu $\Gamma \vdash \varphi$ ile göstereceğiz. Örneğin Gruplar Kuramı'nın biçimselleştirilmiş ilksavlarını Λ_g ile ve (2.3)'teki formülü φ ile gösterirsek $\Lambda_g \vdash \varphi$ olduğu kanıtlanabilir. Burada önemli olan şudur: φ Gruplar Kuramı'nın bir biçimsel teoremidir, ancak $\Lambda_g \vdash \varphi$ bir biçimsel teorem değildir. $\Lambda_g \vdash \varphi$, analizin veya grupların herhangi bir teoremi gibi Matematiksel Mantığın bir (sözeden) teoremidir ve kanıtı da tıpkı o alanlardaki gibi verilir. Yani "*Teorem:* $\Lambda_g \vdash \varphi$" yazıp tıpkı bir analiz teoremini kanıtlar gibi kanıtlarız. Genelde $\Lambda_g \vdash \varphi$'ye Gruplar Kuramı'nın bir **sözeden teorem**i (veya **metateorem**i) denir. Biz yalın olarak teorem demeyi yeğleyeceğiz.

Bu bölümde mantığın niceleyiciler ve eşitlik içermeyen kısmıyla ilgili gerekli bilgiler özetlenecektir. Bizi önermelerin ne oldukları değil, salt doğru veya yanlışlıkları ilgilendirecektir. Her bir önerme ya doğru ya da yanlış olacaktır, özetle iki değerli mantık kullanacağız. Bu kısım oldukça ayrıntılı tutulmuştur. Bunun nedeni mantığın beraberinde getirdiği yeni kavram ve yöntemlerin burada iyice sindirilmesini sağlamaktır.

Önermeler mantığının formülleri

$$\neg, \curlywedge, \curlyvee, \rightarrow \text{ ve } \leftrightarrow$$

imlerini içerecekler ancak yüklemsel mantığa ait olan $\dot{\forall}$, $\dot{\exists}$ ve $\doteq$ imlerini asla içermeyecekler. Bu imleri nasıl kullanacağımızı ve önerme formüllerimizi ileride açıklayacağız.

$$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists, =$$

imleri daima, mantık dışındaki, herhangi bir matematik yapıda teoremlerimizi ifade ederken veya onların kanıtlarını verirken kullandığımız anlamlarını koruyacaklardır. Böylece bir yandan alışkanlıklarımıza dokunmamış olacağız, diğer yandan bunları, farklı ancak kolay tanınabilir imlerle biçimselleştirerek hangi ortamda olduğumuzun tanınmasını kolaylaştırmış olacağız.

Ayrıca biçimsel formüllerimizin özelliklerini verirken, $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists, =$ anlamsal imleriyle oluşturulan formüllerimize ilişkin bilgilerimizi de bir düzene sokmuş olacağız.

2.1 Anlamsal Önermeler

İrdeleme yapıp çıkarımlarda bulunduğumuz her alanda, ya *doğru* ya da *yanlış* olan ve **önerme** veya **sav** dediğimiz, bir durum veya özellik bildiren tümceler vardır. Önermelerimizin doğru veya yanlış olmasını istemekle *iki değerli* mantığı seçiyoruz ve ayrıca bir önermenin *aynı anda hem doğru hem de yanlış olmamasını* isteyerek *çelişkili önermeleri* dışlayacağız. α ve β önermeler olmak üzere "α **ve** β", "α **veya** β", "α **ise** β" (veya bununla eş anlamlı olmak üzere "α**'dan** β **çıkar**"), "α **değil**", "α, β'ye **denktir**" (veya eş anlamlı olarak "α **ancak ve ancak** β"), "**her** x için $\beta(x)$'tir" ve "**en az bir** x için $\beta(x)$'tir" gibi ifadelerle sıkça karşılaşırız. Bunlarla matematiğin tüm dallarında olduğu gibi, irdeleme ve çıkarımlar yaptığımız her yerde karşılaşırız. Onun içindir ki "*ve, veya, ise*, *denktir, her, en az bir*" bağlaçlarına **mantıksal işlemciler** veya **mantıksal bağlaçlar** denir. "*her*" ve "*en az bir*" işlemcilerine **niceleyiciler** denir. Mantıksal işlemciler bize verilen önerme veya önermelerden yeni önermeler kazandırırlar. Ayrıca her matematik kitabında neredeyse her sayfada birkaç kez karşılaştığımız $=$ eşitlik imi vardır. $=$ imi mantıksal harf olarak seçilebileceği gibi çalıştığımız alanda bir ikili bağıntı olarak da ele alınabilir. Biz $=$ imini mantık imi olarak kullanacağız ve onu $\doteq$ imi ile biçimselleştireceğiz. Mantığın niceleyiciler ve eşitliği içermeyen kısmına **önermeler mantığı** denir. Önermeler mantığını niceleyiciler ve eşitlikle genişleterek **yüklemsel mantığa** geçilir.

Burada amacımız, önermeler kullanıp onlara *doğru, yanlış* gibi değerler biçtiğimiz ve çıkarımlarda bulunduğumuz her alandaki ortak anlayışımızı vermektir. Bu bağlamda matematiğin fiziğe, kimyaya, biyolojiye, vb. karşı bir önceliği yoktur.

Şu iki çıkarımı inceleyelim:

(1) Tüm insanlar ölümlüdür. Özgür bir insandır. Öyleyse Özgür ölümlüdür.

(2) Her balık suda yaşar. Camgöz bir balıktır. Öyleyse camgöz suda yaşar.

Bu iki çıkarım da doğrudur ve ortak bir kalıba uyarlar:

(3) Her p, q'dur. r bir p'dir. Öyleyse r bir q'dur.

Her üç çıkarım da doğrudur. Elbette (3) çıkarımı ilk iki çıkarımın ortak kalıbıdır, başka deyişle ilk iki çıkarım (3) çıkarımının özel durumlarıdırlar. (3) çıkarımı p, q ve r'nin ne olduklarından bağımsız olarak, salt çıkarımın

biçiminden dolayı doğrudur. Mantıkta (1) ve(2) tipinde çıkarımlar yerine onların ortak kalıpları olan (3) tipinde çıkarımlarla ilgilenilir.

Bu önermeleri ve çıkarımları bir de kümeler diliyle belirtelim. I, O, B, S sırasıyla insanların, ölümlülerin, balıkların ve suda yaşayanların kümelerini göstersinler. X herhangi bir küme ise $x \in X$ ile $\{x\} \subseteq X$ birbirine denktir. Şimdi P, Q herhangi iki küme ve $r \in P$ olmak üzere bu çıkarımlar şu şekli alırlar:

(1)* $I \subseteq O$. {Özgür}$\subseteq I$. Öyleyse {Özgür}$\subseteq O$.

(2)* $B \subseteq S$. {Camgöz}$\subseteq B$. Öyleyse {Camgöz}$\subseteq S$.

(3)* $P \subseteq Q$. $\{r\} \subseteq P$. Öyleyse $\{r\} \subseteq Q$.

Her üç çıkarım da kümeler arasında $\subseteq$ bağıntısının geçişli olmasından başka bir şey değildir.

İçinde "değil", "ve", "veya", "ise" ve "ancak ve ancak" geçmeyen bir önermeye bir **asal** önerme, diğerlerine **birleşik** önermeler diyelim[1]. Önermeler mantığında asal önermeler bir birim, bir bütün olarak ele alınır; parçalarına ayrılmazlar. Bizi herhangi bir önermenin yalnızca doğru veya yanlışlığı ilgilendirir. Dolayısıyla her α önermesine onun doğruluk değerini gösteren bir im karşılık getireceğiz. α önermesi doğru ise $d(\alpha)$ **doğruluk değerini** 1, yanlış ise 0 olarak açıklayacağız:

$$d(\alpha) := \begin{cases} 1, & \alpha \text{ doğrudur} \\ 0, & \alpha \text{ yanlıştır} \end{cases} .$$

İngilizce ve Almanca kaynaklarda 0 yerine F ve 1 yerine sırasıyla T ve W kullanımları da yaygındır. Seçtiğimiz gösterimin bazı artıları olduğunu düşünüyoruz, biraz ileride göreceğiz.

α ve β herhangi bir bilim alanından alınan önermeler olmak üzere, bunların *doğru* veya *yanlış* olmalarına bağlı olarak "α değil", "α veya β", "α ve β", "α ise β" ve "α ava β" önermelerine ne zaman *doğru* ve ne zaman *yanlış* diyeceğimizi açıklayacağız. Matematiğimizin başka alanlarda da işe yaramasını istediğimizden bu açıklamalar günlük kullanımımızla örtüşmek zorundalar. Diğer yandan bunların bazılarının kullanımında bir birlik yoktur; örneğin kimileri "α veya β" önermesini "ya α ya da β", dd. "α ve β'nın ikisinden biri ancak ikisi birden değil" olarak kullanırlar ve her ikisinin birlikte doğru olmasını dışlarlar. Biz ise her ikisinin birden doğru olmasına da izin vereceğiz; dd. "α veya β" önermesini "α ve β'nın en az biri" anlamında kullanacağız. Bu nedenle biz mantık bağlaçlarımızın doğruluk değerlerini netleştirmek zorundayız.

[1] Asal önermelere **temel** veya **atomik** önermeler de denir. Ancak biz "atomik" sıfatını yalnızca, ileride açıklayacağımız birinci dereceden özel bazı formüller için kullanacağız.

Çift anlamlılığı göze alarak $a, b \in \mathbb{R}$ gerçek sayıları için

$$a \vee b := \max\{a, b\} \text{ ve } a \wedge b := \min\{a, b\}$$

olarak açıklarsak önermelerimizin matematikte kullandığımız doğruluk değerleri aşağıdaki gibidir: α ve β önermeler olmak üzere

1. $\neg\alpha$, "α *değil*" önermesi, α doğru ise yanlış, α yanlış ise doğru olarak açıklanır, dd. $d(\neg\alpha) := 1 - d(\alpha)$. Demek ki "$\alpha$ değil" önermesinin doğru olması için gerek ve yeter koşul α önermesinin yanlış olmasıdır.
2. $d(\alpha \vee \beta) := \max\{d(\alpha), d(\beta)\} = d(\alpha) \vee d(\beta)$, dd. "$\alpha$ veya β" önermesi ancak α ve β önermelerinin her ikisi de yanlışsa yanlıştır, tüm diğer durumlarda doğrudur.
3. $d(\alpha \wedge \beta) := \min\{d(\alpha), d(\beta)\} = d(\alpha) \wedge d(\beta)$, "$\alpha$ ve β" önermesi ancak α ve β önermelerinin her ikisi de doğruysa doğrudur, tüm diğer durumlarda yanlıştır.
4. $d(\alpha \Rightarrow \beta) := (1 - d(\alpha)) \vee d(\beta)$, "$\alpha$ *ise* β" önermesi ancak "α doğru iken β yanlışsa" yanlıştır, tüm diğer durumlarda doğrudur. Kısaca

$$d(\alpha \Rightarrow \beta) = 1 \text{ ancak ve ancak } d(\alpha) \leq d(\beta).$$

5. $d(\alpha \Leftrightarrow \beta) := \begin{cases} 1 & d(\alpha) = d(\beta) \\ 0 & d(\alpha) \neq d(\beta) \end{cases}$: "α ancak ve ancak β" önermesi, ancak "bu önermelerden biri doğru diğeri yanlışsa" yanlıştır, diğer durumlarda doğrudur.

İrdeleme yaptığımız her alanda "α değil" "α ve β" "α veya β" "α ise β" ve "α ancak ve ancak β" önermelerinin doğruluk değerlerinden anladıklarımız bunlardır.

Not 2.1.1 Tüm bunlar içerisinde en çok kafa karıştırabilecek olan "α ise β" önermesinin doğruluk değeridir. "α ise β" tipindeki bir önermeye yüklemek istediğimiz anlamın net olduğu iki durum vardır. "α doğru iken β da doğru" ise "α ise β" doğrudur, ve "α doğru iken β yanlış" ise "α ise β" da yanlıştır. Buradaki yanlış durumunun dışındaki tüm durumlarda "α ise β" önermesini doğru olarak açıklıyoruz. Bu ilk bakışta yadırgansa bile çok kullanılan bir çıkarımdır. Örneğin yüksek atlamada 15 metreyi aşacağını söyleyen birisine "Sen yüksek atlamada 15 metreyi aşarsan ben de 100 metreyi 4 saniyenin altında koşarım." dersiniz ve bu önerme doğrudur. Diğer yandan β doğru ise α öncülü ister doğru ister yanlış olsun $\alpha \Rightarrow \beta$ doğrudur; örneğin "Sen yüksek atlamada 15 metreyi aşarsan ben de 100 metreyi 1 saatin altında koşarım." önermesi doğrudur.

Günlük konuşmada "α ise β" tipinde bir tümce kurduğumuzda α ve β önermeleri, nedensellik veya ardışıklık bağlamında birbiriyle ilişkilidirler. Örneğin hiç kimse "Tren vaktinde kalkmazsa Himalayalar'da fırtınalar kopar" gibi bir tümce kurmaz. Bizi ise önermeler mantığında α ve β önermelerinin içerikleri hiç ilgilendirmediğinden, onların aralarında bir anlamsal ilişki olup olmaması önemli değildir. Çoğu matematikçi bile ilk duyduğunda yadırgasa veya anlamsız bulsa da, "Üçgenlerin iç açıları toplamı 180° ise İntegral Hesabın Ana Teoremi doğrudur", "Üçgenlerin iç açıları toplamı 400° ise türevlenebilir fonksiyonlar süreklidir" ve "Üçgenlerin iç açıları toplamı 400° ise sürekli fonksiyonlar türevlenebilir" önermeleri doğrudurlar.

Son olarak, yukarıdaki irdelemelerden de anlaşılacağı gibi, "α ise β„ önermesinin doğru olmasının asla β önermesinin doğru olması anlamına gelmediğini belirtelim; α önermesi yanlışsa β önermesi ister doğru ister yanlış olsun "α ise β" önermesi doğrudur. Özellikle "α ise α" önermesi her α için, dolayısıyla yanlış α önermeleri için de doğrudur. ▲

Not 2.1.2 Çifte olumsuzlama "(α değil) değil"'in doğruluk değeri, kısaltmalarla $\neg(\neg\alpha)$ önermesinin doğruluk değeri, açıklamış olduğumuz doğruluk değeri bağlamında α'nın doğruluk değeri ile aynı olmasına karşın, günlük kullanımda çoğu kez α anlamına gelmez. α önermesi "bu alışılmıştır" olmak üzere, "α değil" önermesi "bu alışılmamıştır" iken "bu alışılmamış değildir" dediğimizde, bu çifte olumsuzlama çoğumuz tarafından α olarak, yani "bu alışılmıştır" olarak algılanmaz. ▲

Mantık bağlaçlarını bu anlamlarda kullanarak bazı çıkarımlarda bulunuruz. Örneğin en sık başvurduğumuz bir çıkarım kuralı

(MP) φ doğruysa ve $\varphi \Rightarrow \psi$ doğruysa ψ de doğrudur

der. Gerçekten de $d(\varphi) = 1$ ve $d(\varphi \Rightarrow \psi) = 1$ ise $1 = d(\varphi) \leq d(\psi)$'den $d(\psi) = 1$ elde edilir. Bu önemli çıkarım kuralına **ayırma** (veya **modus ponens**) kuralı denir. Çok kullandığımız bir diğer çıkarım ise

(ZK) $\varphi \Rightarrow \psi$ doğru ve $\psi \Rightarrow \eta$ doğruysa $\varphi \Rightarrow \eta$ da doğrudur.

Bunu görmek çok kolaydır: Varsayımlarımızdan $d(\varphi) \leq d(\psi) \leq d(\eta)$ eşitsizliklerini elde ederiz. Bu ise bize $d(\varphi) \leq d(\eta)$ eşitsizliğini verir. Tanım gereği $\varphi \Rightarrow \eta$ doğrudur. Bu kurala ise **zincir kuralı** veya **geçişli kural** denir.

φ formülünde geçen tüm asal önermeler $p_1, \ldots, p_n$ olsunlar. Herhangi bir $d : \{p_1, \ldots, p_n\} \to \{0, 1\}$ dönüşümüne bu φ formülüne uyan bir *değerleme* diyelim. Elbette $d(p_k) = 1$ ise bunu "p_k doğrudur" ve $d(p_k) = 0$ ise bunu "p_k yanlıştır" olarak anlayacağız. φ'ye uyan her d değerlemesinde yukarıda açıkladığımız kurallar doğrultusunda φ formülüne bir $d(\varphi) \in \{0, 1\}$ karşılık

getirilir. Yine $d(\varphi) = 1$ ise "φ formülü d değerlemesinde doğrudur" ve $d(\varphi) = 0$ ise "φ formülü d değerlemesinde yanlıştır" denir. Bir φ formülü kendisine uyan her d değerlemesinde doğru ise bir *hepdoğrudur* diyelim.

(MP) ve (ZK) kurallarını formülleştirirsek, sırasıyla

$$\varphi \wedge (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi \text{ ve } (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \eta) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \eta)$$

formüllerini elde ederiz. Bu iki formülün ortak özelliği, φ, ψ *ve* η*'nın doğruluk değerinden bağımsız olarak her zaman doğru* olmalarıdır, dd. birer hepdoğru olmalarıdır. Bu

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \Rightarrow \psi$$

tipindeki tüm çıkarımlarımızın ortak özelliğidir. Burada $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$'lere **önsavlar** (veya **varsayımlar** veya **hipotezler**), ψ'ye ise **sav** veya **tez** denir. Önsavlardan biri yanlışsa, örneğin φ_k yanlışsa, tanım gereği $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \Rightarrow \psi$ doğrudur. Biz az önce (MP) ve (ZK) kurallarında önsavların doğru olma durumunu tartışmıştık. Önsavların en az birinin yanlış olması durumunda, bu kuralların formülleri tanım gereği doğrudur. Dolayısıyla bunlar hep doğrulardır. Okur kanıtlarda kullandığı $\alpha \Rightarrow \beta$ çıkarım kurallarının, örneğin (MP) ve (ZK)'ye ek olarak, $\varphi \Rightarrow \varphi$, $\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi$, $\neg\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi), \ldots$ gibi, hepdoğrular olduğunu kolayca görebilir.

Bir başka önemli kavram **mantıksal denkliktir.** Eğer $\varphi \Leftrightarrow \psi$ bir hepdoğru ise φ ve ψ mantıksal olarak denktir denir. Tanım gereği $\varphi \Leftrightarrow \psi$ önermesinin bir hepdoğru olması için gerek ve yeter koşul, φ ve ψ formüllerine uyan her d değerlemesi için $d(\varphi) = d(\psi)$ olmasıdır. Örneğin φ ve ψ formüllerine uyan her d değerlemesi için

$$\begin{aligned} d(\varphi \Rightarrow \psi) =& (1 - d(\varphi)) \vee d(\psi) = d(\neg\varphi) \vee d(\psi) = d(\neg\varphi \vee \psi) \\ d(\varphi \Rightarrow \psi) =& (1 - d(\varphi)) \vee d(\psi) = (1 - (1 - d(\psi))) \vee (1 - d(\varphi)) \\ =& d(\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi) \end{aligned}$$

olduğundan bir yandan $\varphi \Rightarrow \psi$ ve $\neg\varphi \vee \psi$ önermeleri birbirlerine, diğer yandan $\varphi \Rightarrow \psi$ ve $\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$ önermeleri birbirlerine mantıksal denktir. Bu ikinci denklik **karşı konum ilkesi** adını taşır. Matematikte teoremlerimizin büyük çoğunluğu $\varphi \Rightarrow \psi$ tipindedir. Bu iki mantıksal denklik bize $\varphi \Rightarrow \psi$ tipindeki teoremlerimiz için iki farklı kanıt yöntemi verir. Mantıksal denk önermelerden herhangi birinin doğruluğunu kanıtlamak diğerinin doğruluğunu kanıtlamaya denktir. $\varphi \Rightarrow \psi$ önermesini doğruluğunu kanıtlamak isteyelim.

1. Yol: $\neg\varphi \vee \psi$ önermesinin doğru olduğu gösterilir. φ yanlış, dd. $\neg\varphi$ doğruysa, $\neg\varphi \vee \psi$ tanım gereği doğru olacağından, bu durum tartışılmadan atlanır ve kanıta şöyle başlanır: Varsayalım ki φ doğru olsun. Ardından

ψ'nin doğru olduğu gösterilir. Böylece $\varphi \Rightarrow \psi$ kanıtlanmış olur; bu ise *asla* ψ'nin doğru olduğunun kanıtlandığı anlamına gelmez! Kanıtlanan φ doğru ise ψ'nin de doğru olduğudur ve bu φ yanlışsa ψ'nin doğru veya yanlışlığı hakkında hiçbir fikir vermez.

2. Yol: Bu kez ilk yoldaki yöntemle $\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$ önermesinin doğru olduğu kanıtlanır. Bu kez kanıta ψ yanlış (dd. $\neg\psi$ doğru) olsun varsayımı ile başlar φ'nin yanlış (dd. $\neg\varphi$'nin doğru) olduğunu kanıtlarız. Bu karşı konum yöntemine sıkça başvururuz.

Bu arada açıklığa kavuşturmamız gereken birbiriyle ilişkili iki şey vardır:

- Bir η önermesi, $\varphi, \varphi', \psi, \psi'$ ve ξ önermeler olmak üzere, bir yandan $\eta = \varphi \vee \psi$, diğer yandan $\diamond \in \{\wedge, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow\}$ olmak üzere $\eta = \varphi' \diamond \psi'$ veya $\eta = \neg\xi$ olarak yazılabilir mi?

- Örneğin $\eta = \varphi \vee \psi$ ve $\eta = \varphi' \wedge \psi'$ ise $d(\varphi) \vee d(\psi) = d(\varphi') \wedge d(\psi')$?

Buradaki ilk problem *tek türlü okunabilirlik,* ikincisi ise bir *fonksiyon genişletme* problemidir. Bu soruları bir sonraki de yanıtlayacağız. Ancak önce olayı biraz açalım.

Bize mantık bağlaçlarımızın bazılarını veya tümünü bir veya birkaç kez kullanan uzunca bir tümce verilmiş olsun. Bu tümcede geçen mantık bağlaçlarının sayısı arttıkça kastedilenin tam da ne olduğu gittikçe belirsizleşir; onu tam olarak anlamak için tekrar tekrar okumak zorunda kalabilir, yine de bir başkasıyla aynı şeyi anlamayabiliriz. Matematikte daha kolay anlamak için kısaltmalara başvururuz. Tümcemizde mantık bağlaçları içermeyen n asal önerme bulunsun. Bu önermeleri $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ile gösterelim. Tümcemizdeki tüm noktalama imlerini atar, ayrıca "değil, ve, veya, ise, ancak ve ancak" yerine sırasıyla onları temsil eden mantık imlerini yazarsak sonuçta $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ve bazı mantık imlerinden oluşan sonlu bir dizi elde ederiz ve tümcemizi sadeleştirmiş oluruz. Bu oldukça kısadır ancak üç asal önermede bile tek türlü anlaşılabilirlik yoktur. Örnek olmak üzere üç asal önermemiz olsun ve bunları α, β, γ ile gösterelim. Bunlarla elde edebileceğimiz tümcelerden bazılarının kısaltmaları şunlardır:

$$\alpha \vee \beta \wedge \gamma,\ \neg\alpha \vee \beta \wedge \gamma,\ \alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma, \ldots$$

Bunlardan $\alpha \vee \beta \wedge \gamma$ dizisi "α veya ($\beta \wedge \gamma$)" olarak anlaşılacağı gibi "($\alpha \vee \beta$) ve γ" olarak da anlaşılabilir. $\neg\alpha \vee \beta \wedge \gamma$ ise 1. ((α değil) veya β) ve γ, 2. $\neg(\alpha \vee \beta)$ ve γ, 3. $\neg\alpha$ veya ($\beta \wedge \gamma$), 4. σ, $\alpha \vee \beta \wedge \gamma$'nın iki anlamından biri olmak üzere $\neg\sigma$ olarak da anlaşılabilir. $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$ dizisinin iki farklı okunuşunu bulmayı okuyucuya bırakıyoruz.

Konuşmalarımızda yine de birbirimizi doğru anlamamız, konuşma sırasında kullandığımız duraksamalar, uzatmalar, vurgular ve benzeri şeylerle

sağlanır. Bunlar bir yazımda kullanamayacağımız araçlardır. Öyleyse ya yardımcı yazım araçları kullanarak, ya da başka önlemlerle bu sorunu çözmek durumundayız. Neyi kastettiğimizi netleştirmek için başvurulacak yöntemlerden biri ayraçlar kullanmaktır. Örneğin $\alpha \wedge \beta \vee \gamma$ gibi bir tümceyi ayraç kullanarak $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$ ve $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma$ gibi iki farklı biçimde dillendirir ve hangisini kastediyorsak onu seçeriz.

Bu durumda, şimdi ve ileride biçimsel mantığı işlerken de, bizi bekleyen işlerden birisi kullanacağımız terimlerimiz ve formüllerimizin *tek türlü okunabilirliğini* sağlamaktır.

Farklı Yazılımlar

$\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow$ ve $\Leftrightarrow$ mantık işlemcilerine göre kapalı bir O önermeler kümesi verilmiş olsun, dd. daima $\varphi, \psi \in O$ ise $\neg\varphi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$, $\varphi \Leftrightarrow \psi \in O$ olsun. Bu durumda $\neg$ işlemcisini bir $O \to O$ fonksiyonu, $\vee, \wedge, \Rightarrow$ ve $\Leftrightarrow$ mantık işlemcilerini ise birer $O \times O \to O$ fonksiyonu olarak düşünebiliriz. Her $\varphi, \psi \in O$ için

$$\neg\varphi,\ \varphi \vee \psi,\ \varphi \wedge \psi,\ \varphi \Rightarrow \psi \text{ ve } \varphi \Leftrightarrow \psi$$

yerine sırasıyla

$$\neg(\varphi), \vee(\varphi, \psi),\ \wedge(\varphi, \psi),\ \Rightarrow (\varphi, \psi) \text{ ve } \Leftrightarrow (\varphi, \psi) \tag{2.4}$$

fonksiyonel gösterimlerini yazalım. Bu durumda

$$\text{“}\varphi \text{ veya } (\psi \wedge \eta)\text{” önermesi } \vee (\varphi, \wedge(\psi, \eta)) \text{ ve}$$
$$\text{“}(\varphi \vee \psi) \text{ ve } \eta\text{” önermesi } \wedge (\vee(\varphi, \psi), \eta)$$

şeklini alırlar ve biz bunların fonksiyonel yazılımlarını birbirinden çok net olarak ayırt edebiliriz. Ancak böyle bir yazılımla karşılaşmasak da az sonra vereceğimiz üç yazılımın her birinin kaynağı bu **fonksiyonel yazılımdır** . Genelde üç tür yazılımla karşılaşırız: **ön yazılım, iç yazılım, art yazılım.** Ön yazılıma **Polonya yazılımı** da denir.

Ön yazılım (Polonya yazılımı) : Bu yazılımda n değişkenli bir f fonksiyonunun $(x_1, \ldots, x_n)$ noktasındaki değeri $fx_1, \ldots x_n$ olarak gösterilir ve n-yerli bir R bağıntısı için $R(x_1, \ldots, x_n)$ yerine (bu $(x_1, \ldots, x_n) \in R$ demektir) $Rx_1 \ldots x_n$ yazılır. Bu ise fonksiyonel gösterimde tüm ayraçlar ve virgüllerin atıldığı bir sadeleştirmeden başka bir şey değildir. Bu durumda “φ veya $(\psi \wedge \eta)$” ve “$(\varphi \vee \psi)$ ve η” önermeleri ön yazılımda sırasıyla

$$\vee\varphi \wedge \psi\eta \text{ ve } \wedge \vee\varphi\psi\eta$$

yalın şeklini alırlar. Yine "(φ değil veya ψ) ve η" ve "$\neg(\varphi \vee \psi)$ ve η" önermeleri fonksiyonel yazılımda sırasıyla $\wedge(\vee(\neg(\varphi), \psi), \eta)$ ve $\wedge(\neg(\vee(\varphi, \psi)), \eta)$ olduklarından ön yazılımla $\wedge \vee \neg\varphi\psi\eta$ ve $\wedge \neg \vee \varphi\psi\eta$ şeklini alırlar ve biçimsel olarak birbirinden farklıdırlar.

İç yazılım: İç yazılım bir anlamda karma bir yazılımdır. Tek değişkenli fonksiyonlarda ön yazılım kullanılır ve $f(x)$ yerine fx yazılır. Dolayısıyla $\neg(\varphi)$ yerine $\neg\varphi$ yazılır. Benzeri 1-li bağıntılar için de geçerlidir: $R(x)$ yerine Rx yazılır. İki değişkenli fonksiyonlarda ve ikili bağıntılarda fonksiyon ve bağıntı imleri değişkenlerin arasına yazılır: $f(x, y)$ ve $R(x, y)$ yerine sırasıyla xfy ve xRy yazılır. Bu geleneksel matematikte, bağıntılar için her zaman ve iki değişkenli fonksiyonların ise en temel olanları için alışık olduğumuz yazılımdır. Örneğin $\mathbb{R}$ gerçek sayılar kümesinde $+, \cdot$ iki değişkenli toplama ve çarpma fonksiyonları ve $<$ ikili sırlama bağıntısı olmak üzere bilindiği gibi $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $+(x, y)$, $\cdot(x, y)$ ve $<(x, y)$ yerine sırasıyla $x + y$, $x \cdot y$ ve $x < y$ yazarız. $n \geq 3$ için iç yazılımın bir anlam taşımadığı aşikârdır. Ancak önermeler mantığında şu anda incelediğimiz fonksiyonlarımız bir ve iki değişkenlidirler. Böylece iç yazılımda yapacağımız şey özetle şudur: Fonksiyonel yazılımdaki

a. Bileşik olan argümanlar ayraçlar içerisine alınacaklar,

b. $\neg(\varphi)$ yerine $\neg\varphi$ yazılacak ve

c. $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$ ve $\Leftrightarrow$ iki değişkenli fonksiyon imleri iç yazılımda kullanılacaklardır.

Bu durumda (2.4)'teki formüller iç yazılımda

$$\neg\varphi,\ \varphi \vee \psi,\ \varphi \wedge \psi,\ \varphi \Rightarrow \psi \text{ ve } \varphi \Leftrightarrow \psi \tag{2.5}$$

olarak yazılacaklardır. Örneğin $\wedge(\vee(\neg(\varphi), \psi), \eta)$ fonksiyonel yazılımı iç yazılımda $((\neg\varphi) \vee \psi)) \wedge \eta$ şeklini alırken $\wedge(\neg(\vee(\varphi, \psi)), \eta)$ fonksiyonel yazılımı $(\neg(\varphi \vee \psi)) \wedge \eta$ şeklini alır. Bu gösterimler okuyucunun lise matematiğinden alışık olduğu gösterimlerdir. Doğrudan mantık alanında çalışanlar artan biçimde tercihlerini ön yazılımdan yana koymaktadırlar. Az sonra vereceğimiz art yazılım da ön yazılım kadar yalındır. Yine de seçimimiz iç yazılımdan yana olacaktır. Nedeni bu kitabın hedef kitlesinin doğrudan mantık alanında çalışanlardan daha çok diğer alanlarda çalışanların olmasıdır. Okur bu kitapta alışık olmadığı birçok yeni kavram ve gösterimle karşılaşacaktır. Eğer ondan ayrıca $x, y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere hafızasına kazınmış

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

eşitliği yerine, fonksiyonel yazılımla

$$\cdot(x, +(y, z)) = +(\cdot(x, y), \cdot(x, z))$$

eşitliğini veya ön yazılımla

$$\cdot x + yz = + \cdot xy \cdot xz$$

eşitliğini kullanmasını istersek ancak kitabı okumama nedenlerini artırmış oluruz!

Art yazılım: Bunun ne olacağını artık okur da doğru olarak sezmiştir: $f(x_1,\ldots, x_n)$ yerine $x_1 \ldots x_n f$ ve $R(x_1, \ldots, x_n)$ yerine $x_1 \ldots x_n R$ yazılır. Bizim içinse bu $\neg\varphi$ yerine $\varphi\neg$ ve $\diamond \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ olmak üzere $\varphi \diamond \psi$ yerine $\varphi\psi\diamond$ yazmak demektir. Öyleyse fonksiyonel yazılımda önce fonksiyon imlerini arkaya yazacak, ardından elde edilen ifadedeki tüm ayraç ve virgülleri atacağız. Art yazılımın ön yazılımın ayna görüntüsü olduğu düşünülebilir. Bunun böyle olmadığını örnekleyelim. Fonksiyonel yazılımla $\Rightarrow (\Rightarrow (\Rightarrow (\varphi, \psi), \eta), \xi)$ olarak verilen önerme diğer yazılımlarda aşağıdaki gibidir:

Ön yazılım	İç yazılım	Art yazılım
$\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow \varphi\psi\eta\xi$	$((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \eta) \Rightarrow \xi$	$\varphi\psi \Rightarrow \eta \Rightarrow \xi \Rightarrow$

İzlenecek Yol, Nesne Dili–Sözeden Dil

Biz herhangi bir bilim alanının, örneğin analizin, cebirin, fiziğin, biyolojinin ..., temel önermelerinden yola çıkmak yerine tüm bunları biçimselleştiren bir P kümesinden yola çıkacak ve tüm gereksinimlerimizi karşılaması için P kümesinin sonsuz olmasını isteyeceğiz. P kümesinin öğeleri *asal önerme imlerimiz* olacaktır. Sonra $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ anlamsal imlerimizi $\urcorner, \curlyvee, \curlywedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ imleri ile biçimselleştireceğiz. $J := \{\urcorner, \curlyvee, \curlywedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ olmak üzere elbette $P \cap J = \emptyset$ ve $P \cap \{\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\} = \emptyset$ olmasını isteyeceğiz. İç yazılım kullanacağımız için, $P \cup J$ kümesinde olmadığını varsayacağımız, "(" sol ve ")" sağ ayraçlarını da alarak $A := P \cup J \cup \{), (\}$ abecesine ulaşacağız.

Sz A sözcükler kümesinin Omf P ile göstereceğimiz bir altkümesi bizim **biçimsel formüllerimizin** kümesi olacaktır. $J_2 := J \setminus \{\urcorner\}$ olmak üzere Omf P kümesi aşağıdaki dört özellikle tek olarak belirlenmiş olacaktır:

1. $P \subseteq$ Omf P.
2. $\varphi \in$ Omf P ise $\urcorner\varphi \in$ Omf P.
3. $\varphi, \psi \in$ Omf P ve $\diamond \in J_2$ ise $(\varphi \diamond \psi) \in$ Omf P
4. Tüm formüller (1), (2) ve (3) ile elde edilenlerdir.

Biz analizde $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesini incelediğimiz gibi Sz A ve Omf P kümelerini inceleyeceğiz. A bizim için önerme mantığına ilişkin bir **biçimsel dil** olacaktır. Bu dile **nesne dili** de denir. İnceleyeceğimiz nesnelerimiz Sz A kümesinin öğeleri, **biçimsel sözcüklerimiz**, özellikle Omf P kümesinin öğeleri olan **(biçimsel) formüllerdir.** Bu dili incelediğimiz dil ise, $\neg$,

$\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$,$\vdash$, $\models$, ... gibi, bazı matematiksel gösterimlerle zenginleştirdiğimiz Türkçe'dir. Nesnelerimiz üzerine söz ettiğimiz bu dile ise **sözeden dil** (veya **metadil**) denir. A abecesinin imi olmayan herhangi bir imi içeren bir ifade nesne dilimizin bir sözcüğü değildir. Örneğin φ ve ψ iki formül olmak üzere

$$\varphi \curlywedge (\varphi \to \psi) \vdash \psi$$

ifadesi $\vdash$ iminden dolayı nesne dilimizin bir sözcüğü değildir.

Not 2.1.3 Biz kitabımızda alışkanlıklarımızı değiştirmemeye özen göstereceğiz. Bu nedenle "**sözeden teorem** veya **metateorem"** yerine yalın olarak "**teorem"** diyecek ve bunların alışıldık kanıtlarına yine "**kanıt"** diyeceğiz. Buna karşılık biçimsel kuramlarımızda ise " teorem" yerine "**biçimsel teorem"** ve "kanıt" yerine "**biçimsel kanıt"** diyeceğiz. Biçimsel kanıt yerine **bkanıt** kısaltmasını da kullanacağız. ▲

Çalıştığımız evren $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi olduğunda değişkenler olarak $x, y, z, \ldots$ gibi imler kullanırız. *Değişkenler asla çalıştığımız evrenin nesneleri olamazlar!* Değişkenler yerine evrenimizin herhangi bir nesnesini koyabiliriz. Buna karşın evrenimizin nesneleri *sabittirler,* dd. *değişmezdirler*, onların yerine evrenimizin herhangi bir nesnesini koyamayız! Bir gerçel sayı ve yerlerine gerçel sayılar konabilen değişkenler elbette farklı kavramlardır. Dolayısıyla $x, y, z \notin \mathbb{R}$. Buna karşın yine de analizde

$$\forall x \in \mathbb{R}\,(x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0) \text{ ve } \exists x \in \mathbb{R}\,(x^2 = 2) \tag{2.6}$$

gibi formüllerle karşılaşırız. Elbette örneğin $x = 3 \in \mathbb{R}$ ise

$$\forall 3 \in \mathbb{R}\,(3 \neq 0 \Rightarrow 3^2 > 0) \text{ ve } \exists 3 \in \mathbb{R}\, 3^2 = 2$$

ifadeleri anlamsızdırlar. (2.6) formüllerinin doğru yazılımları, evrenimiz $\mathbb{R}$ olmak üzere

$$\forall x(x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0) \text{ ve } \exists x(x^2 = 2)$$

formülleridir. Ancak biz (2.6) tipi formülleri de doğru yorumlayıp kullanmaya alışığız.

Çalıştığımız evren Omf P olduğunda değişken olarak $\varphi, \psi, \eta, \ldots, \varphi_1, \psi_1, \eta_1, \ldots$ gibi imler kullanacağız. Bunlar bir yandan A abecemizin imleri olmayacak, diğer yandan ise Omf P kümesinin öğeleri olmayacaklar!

Omf P kümesini inceleyip bu kümeye ilişkin bazı önermeleri, bir analiz önermesini kanıtlar gibi, aynı kanıtlama yöntemleriyle kanıtlayacağız. Örneğin "*her η formülünün* tek olarak belirli φ *ve* ψ *formülleriyle* (2.5) *'teki formüllerden biri ve ancak biri*" gibi olduğunu kanıtlayacağız. Veya şu önermeyi kanıtlayacağız: Herhangi bir $d : P \to \{0, 1\} = \mathbf{2}$ fonksiyonu aşağıdaki

koşulları sağlayacak biçimde tek türlü bir $d : \operatorname{Omf} P \to \{0,1\}$ fonksiyonuna genişletebilir: Her $\varphi, \psi \in \operatorname{Omf} P$ için

$$d(\neg\varphi) = 1 - d(\varphi) \tag{2.7}$$

$$d(\varphi \curlyvee \psi) = \max\{d(\varphi), d(\psi)\} = d(\varphi) \vee d(\psi) \tag{2.8}$$

$$d(\varphi \curlywedge \psi) = \min\{d(\varphi), d(\psi)\} = d(\varphi) \wedge d(\psi) \tag{2.9}$$

$$d(\varphi \to \psi) = (1 - d(\varphi)) \vee d(\psi) \tag{2.10}$$

$$d(\varphi \leftrightarrow \psi) = \begin{cases} 1 & d(\varphi) = d(\psi) \\ 0 & d(\varphi) \neq d(\psi) \end{cases} . \tag{2.11}$$

Bu tip teoremler sözeden teoremler veya metateoremlerimiz olacaklardır. Ancak bunun dışında, özellikle Omf P ilksavlaştırılırken, Omf P kümesinin öğelerinin bazılarına da biçimsel teorem diyeceğiz.

Omf P'nin bir *yorumu*, aslında herhangi bir φ formülünde, her bir $p \in P$ yerine, geçtiği her yerde anlamsal bir α önermesi, ve $\neg, \curlywedge, \curlyvee, \to$ ve $\leftrightarrow$ biçimsel imleri yerine geçtikleri her yerde sırasıyla $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ ve $\Leftrightarrow$ koymaktır. Örneğin $p, q \in P$ olmak üzere bunların yerine sırasıyla α, β önermelerini koyduğunuzda

$$(p \curlywedge q) \text{ ve } p \curlywedge (p \to q) \to q$$

biçimsel formüllerimizin

$$(\alpha \wedge \beta) \text{ ve } \alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \beta$$

yorumlarını elde ederiz. Bizi ilgilendiren aslında α, β önermelerinin ne oldukları değil, onların doğruluk değerlerine bağlı olarak $(\alpha \wedge \beta)$ veya $\alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \beta$ önermesinin doğruluk değerini araştırmaktır. Demek ki bizi ilgilendiren α ve β değil, $d(\alpha)$ ve $d(\beta)$ doğruluk değerleridir. Dolayısıyla bir **yorumdan**, herhangi bir

$$d : P \to \{0,1\}$$

dönüşümünü anlayacağız. Ancak yorumdan böyle bir d dönüşümünü anlayacaksak, yukarıda $d(p) = d(\alpha)$ ve $d(q) = d(\beta)$ aldığımızda, bu d fonksiyonunu tek türlü tüm Omf P kümesine *tutarlı* bir biçimde genişletebilmeliyiz. Tutarlılıktan kastımız, okurun da sezdiği gibi, sözgelimi $(p \curlywedge q)$ formülünün yorumu ilk yaklaşımla $(\alpha \wedge \beta)$ olacağından

$$d(p \curlywedge q) = d(\alpha \wedge \beta) = d(p) \wedge d(q)$$

olmalıdır. Yukarıda sözeden teoremlere örnek olarak verdiğimiz gibi, gerçekten de her $d : P \to \{0,1\}$ yorumunun (2.7)–(2.11) sağlanacak biçimde *tek türlü*, yine d ile göstereceğimiz bir $d : \operatorname{Omf} P \to \{0,1\}$ fonksiyonuna genişletebileceğiz.

Formüllerimiz önermeler mantığının **dizimsel** (veya **dilbilimsel**) yapısına veya **sintaksına** ilişkin biçimsel bir sözcükken φ formülün d yorumundaki $d(\varphi)$ değeri onun **anlambilimsel** yapısına veya **semantiğine** ilişkindir.

Her d değerlemesi için

$$d(\varphi \to \psi) = d(\neg\varphi \curlyvee \psi)$$

olduğunu belirtelim. Önermeler mantığının *farklı* sözcükleri olan $(\varphi \to \psi)$ ve $(\neg\varphi \curlyvee \psi)$ sözcükleri her d yorumunda ya birlikte doğru ya da birlikte yanlıştırlar. Özel olarak her $\varphi \in \text{Omf}$ için

$$d(\varphi \to \varphi) = d(\neg\varphi \curlyvee \varphi) = (1 - d(\varphi)) \vee d(\varphi)) = 1$$

elde edilir. Her yorumda doğru olan, $(\varphi \to \varphi)$ ve $(\neg\varphi \curlyvee \varphi)$ formülleri gibi, formüllere **hepdoğrular** denir. Önermeler mantığı özellikle hepdoğrularla ilgilenir.

2.2 Dizimsel (veya Dilbilimsel) Yapı

Bizi somut ve açık olarak verilmiş önermeler igilendirmeyecektir. α ve β herhangi önermeler olmak üzere "α değil" (dd. $\neg\alpha$), "α ve β" (dd. $\alpha \wedge \beta$), "α veya β" (dd. $\alpha \vee \beta$), "α ise β" (dd. $\alpha \Rightarrow \beta$), "α ancak ve ancak β" (dd. $\alpha \Leftrightarrow \beta$) önermelerini biçimselleştirmek demek, bir yandan özel α, β önermelerinden, diğer yandan anlamsal "değil, ve, veya, ise" ve "ancak ve ancak" anlamsal söylemlerinden kurtulmak demektir. Bu anlamsal sözcükleri sırasıyla "$\neg$, $\curlywedge$, $\curlyvee$, $\to$, $\leftrightarrow$" imleriyle, α ve β önermelerini ise herhangi önermelerin yerine geçmek üzere *önerme değişkenleri* diyeceğimiz p ve q ile biçimselleştirerek,

$$\neg\alpha, (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \Rightarrow \beta), (\alpha \Leftrightarrow \beta)$$

anlamsal önermelerini

$$\neg p,\ (p \curlywedge q),\ (p \curlyvee q),\ (p \to q),\ (p \leftrightarrow q)$$

olarak biçimselleştireceğiz. Bunlar her şeyden önce önermeler mantığının *sözcükleridirler*; ancak *formül* diyeceğimiz özel sözcüklerdir. Bunlar hiçbir anlamı olmayan biçimsel sözcüklerdir. Bunlar ancak *yorumlarda* anlam kazanırlar.

2.2.1 Önermeler Mantığının Formülleri

Önermeler Mantığının Dili

Formüllerimizde iç yazılım kullanacağımızdan abecemiz "(" sol ayracını ve ")" sağ ayracını, ayrıca $\neg, \curlyvee, \curlywedge, \rightarrow$ ve $\leftrightarrow$ mantık bağlaçlarını içerecektir.

$$J := \{\neg, \curlyvee, \curlywedge, \rightarrow, \leftrightarrow\},\ J_1 := \{\neg\} \text{ ve } J_2 := \{\curlyvee, \curlywedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$$

olsun. Elbette tüm $\neg, \curlyvee, \curlywedge, \rightarrow, \leftrightarrow,), ($ imleri birbirinden farklı alınacaktır. Her önerme mantığı abecesi bu imleri içerecektir, dd. bunlar ortak imlerdir. $O := J \sqcup \{), (\}$ olsun.

Tanım 2.2.1 *$P \cap O = \emptyset$ olmak üzere $A := P \sqcup O$ kümesine **bir önermeler mantığı abecesi** diyeceğiz. P kümesinin öğelerine bu abecenin **asal önermeleri** (veya **önerme değişkenleri**) denir.*

Not 2.2.2 P kümesinin öğelerinden söz ederken, onları göstermek üzere

$$p, q, r, \ldots, p_1, q_1, r_1, \ldots, p_2, q_2, r_2, \ldots$$

imlerini kullanacağız. P kümesinin öğelerine "asal önerme" ve "önerme değişkeni" gibi birbirine uzak görünen iki isim vermek yadırganabilir. Adlandırmada bir uyum yoktur. P'nin öğelerine *değişken* dendiğinde az sonra tanımlayacağımız *formüllere, önerme fonksiyonları* veya *önerme ifadeleri* demek daha doğru olacaktır. Önünde sonunda bu, işin özüne dokunmayan, yalnızca bir adlandırmadır. O kadar da önemli değildir ve biz de bu isimlerin her ikisini de kullanmakta bir sakınca görmeyeceğiz. ▲

Not 2.2.3 P kümesi üzerine hiçbir koşul koymadık. Kendimizi kısıtlamayıp P asal önermeler kümesinin *herhangi bir sonsuz* küme olmasını isteyeceğiz. Genelde P kümesi sayılabilir sonsuz alınır ve öğeleri

$$p_0, p_1, p_2, \ldots$$

olarak gösterilir. Sonsuz kümelerle ve daha baştan doğal sayılarla çalışmak istemeyenler ise bir p ve bir $'$ üretme işleminden yola çıkarlar. Bu durumda iki şey istenir:

(I) p bir önerme değişkenidir,

(II) q bir önerme değişkeni ise q' de bir önerme değişkenidir.

Böylece $p, p', p'', \ldots$ önerme değişkenlerine ulaşılır. Bu yaklaşımda elimizde değişkenlerin bir sonsuz kümesi yoktur. Ancak herhangi bir incelemede önümüzdeki *sonlu* sayıdaki formülde geçen *sonlu* sayıdaki değişken dışında *sonlu* sayıda başka değişkenlere gereksinimimiz varsa bunları temin etme şansımız vardır. ▲

A abecesinin sözcüklerinden bazılarına formül diyeceğiz. O ortak imler kümesi olduğundan gerçekte abece P kümesi ile belirlenmiştir. Bu nedenle bu formüllere A-formülü demek yerine P-formülü demeyi yeğleyeceğiz.

Uzlaşma: Evrenimiz $\operatorname{Sz} A$ sözcükler kümesi olduğunda değişken olarak

$$s, t, \ldots, s_1, t_1, \ldots, s_2, t_2, \ldots$$

imlerini kullanacağız.

Önermeler Mantığının Formülleri

Her $\diamond \in J$ için $\operatorname{Sz} A$-fonksiyonu olan bir $f_\diamond$ fonksiyonu tanımlayacağız. Bu fonksiyonlar her $s, t \in \operatorname{Sz} A$ için

$$\begin{aligned} f_\neg(s) &:= \neg s \\ f_\curlywedge(s,t) &:= (s \curlywedge t), \quad f_\curlyvee(s,t) := (s \curlyvee t) \\ f_\to(s,t) &:= (s \to t) \text{ ve } f_\leftrightarrow(s,t) := (s \leftrightarrow t) \end{aligned}$$

olarak tanımlanmışlardır. $F := \{f_\neg, f_\curlywedge, f_\curlyvee, f_\to, f_\leftrightarrow\}$ olsun. İç yazılım kullanacağımızdan $f_\neg(s) = \neg(s)$ yazmayıp $f_\neg(s) = \neg s$ yazdığımızı belirtelim.

Tanım 2.2.4 $\operatorname{Sz} A$ *sözcükler kümesinde* P *kümesinin* F*-kapanışına* ***önermemantıksal*** P***-formülleri*** *denir ve bu küme* $\operatorname{Omf} P$ *ile veya* P *belli ve vurgulamak gerekmediğinde yalın olarak* Omf *ile gösterilecektir.*

(1.5)'teki gösterimlerle $\operatorname{Omf} P = \overline{(P, F)}$ ve dışsal (veya yukarıdan aşağı) tanımla bu küme $\operatorname{Sz} A$ kümesinin, P kümesini içeren, F-kapalı altkümelerinin $\subseteq$ bağıntısına göre en küçüğüdür. Başka sözlerle

1. $P \subseteq Q \subseteq \operatorname{Sz} A$,
2. $s \in Q$ ise $\neg s \in Q$,
3. $s, t \in Q$ ise her $\diamond \in J_2$ için $(s \diamond t) \in Q$.

koşullarını sağlayan $Q \subseteq \operatorname{Sz} A$ altkümelerinin $\subseteq$ bağıntısına göre en küçüğüdür, dd.

$$\operatorname{Omf} P = \bigcap \{Q \mid Q, \text{ (1), (2) ve (3)'ü sağlar}\}.$$

P kümesinin öğelerine **asal formüller** diğer formülllerimize ise **bileşik formüller** de denir.

Gerekmedikçe P'den söz etmeyeceğiz; kısaca Omf yazacağız. Ayrıca bu bölümde yalnızca önermemantıksal formüller söz konusu olacağından bunlara kısaca P-formülleri veya formüller diyeceğiz. Ancak vurgulamak gerektiğinde ayrıntılı yazımı kullanacağız.

Uzlaşma: Çalıştığımız evren Omf P olduğunda değişkenler olarak

$$\varphi, \psi, \eta, \xi, \ldots, \varphi_1, \psi_1, \eta_1, \xi_1, \ldots, \varphi', \psi', \eta', \xi', \ldots$$

değişkenlerini kullanacağız.

Örnek 2.2.5 p, q, r, s asal önermelerse

$$p,\ (p \curlywedge \neg q),\ ((p \curlyvee q) \curlywedge r),\ (((p \curlyvee q) \curlywedge r) \to s)$$

birer formüldürler. Bu örneklerde formüllerimizdeki sol ayraç sayısı sağ ayraç sayısına eşittir. Sözcüklerin uzunluğu üzerinden tümevarımla kolayca *her* $\varphi \in$ Omf *formülündeki sol ayraç sayısının sağ ayraç sayısına eşit* olduğunu kanıtlayabilirsiniz (alıştırma). Bunun bir sonucu ise *formüllerin öz başlangıçlarının asla bir formül olamayacağıdır*; çünkü öz başlangıçlarda sol ayraçlar sağ ayraçlardan fazladır.

$$(p\neg \curlyvee q),\ \to \curlyvee pq,\ (p \curlywedge \neg q,\ p \curlywedge \neg q),\ p \curlywedge \neg q,\ (p \curlyvee q) \curlywedge r$$

birer formül değildirler. Bunlardan son ikisine takılabiliriz. Onlar ileride vereceğimiz ayraç azaltma uzlaşmasından sonra formüller olacaklardır, ancak şu anki tanımla formül değildirler. Formül tanımımızdaki üçüncü koşula göre bir $\diamond \in J_2$ ikili bağlacı ile oluşturulan formüller daima ayraçlar arasına alınmıştır! Sözünü ettiğimiz son iki formül ise $\curlywedge$ ve $\curlyvee$ bağlaçları ile oluşturulmuş olmalarına karşın ayraçlar içerisine alınmamışlardır, dd. bunlarda başta olması gereken sol ayraç ile sonda olması gereken sağ ayraç eksiktir. ▲

$G : \mathcal{P}^*(\mathrm{Sz}\, A) \to \mathcal{P}^*(\mathrm{Sz}\, A)$ fonksiyonu

$$G(X) := X \cup \{f_\neg(s) | s \in X\} \cup \{f_\diamond(s,t) | s,t \in X \text{ ve } \diamond \in J_2\}$$

ile tanımlanmış olsun. (1.1.3) yineleme teoremi ile tek olarak belirli bir $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}^*(\mathrm{Sz}\, A)$ fonksiyonu

1. $f(0) = P$, ve
2. $f(n+1) = G(f(n))$

olacak biçimde bulunur. $F := \{f_\neg, f_\wedge, f_\vee, f_\to, f_\leftrightarrow\}$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $P_n(F) := f(n)$ alırsak $P_0(F) = P$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$P_{n+1}(F) = P_n(F) \cup \{\neg\varphi | \varphi \in P_n(F)\} \cup \{(\varphi \diamond \psi) | \varphi, \psi \in P_n(F) \text{ ve } \diamond \in J_2\} \tag{2.12}$$

elde edilir. (1.3.3) bize aşağıdaki önermeyi verir:

Önerme 2.2.6 $\text{Omf}\, P = \overline{(P, F)} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} P_n(F)$.

Bu önerme bize formüllerimiz hakkında aşağıdaki bilgileri verir:

1. *Her $p \in P$ bir formüldür.*
2. *φ bir formülse $\neg\varphi$ de bir formüldür.*
3. *φ ve ψ formülseler her $\diamond \in J_2$ için $(\varphi \diamond \psi)$ de bir formüldür.*
4. *Tüm formüller tam da 1., 2. ve 3. ile elde edilenlerdir.*

Çoğu yerde bu dört özellik önermemantıksal formüllerin **tümevarımsal tanımı** olarak adlandırılırlar ve bu formüllerin tanımı olarak alınırlar. Bu tanım için **TVT** kısaltmasını kullanacağız. Biz bunu tanım olarak seçmiyoruz, çünkü 4. özellik, $\overline{(P, F)}$ kümesini doğru *betimler* ama açık olarak *vermez*! Dile getirdiği aslında $\text{Omf}\, P = \overline{(P, F)} = \bigcup P_n(F)$ olduğudur. Ancak biz $P_n(F)$ kümelerini Kümeler Kuramı'nın önemli bir teoremi yardımıyla kazandık. Bu dört özellik Omf kümesinin tanımı olarak seçildiğinde aslında bu tanımın gerekirse (2.2.6) ile sağlam bir zemine çekileceği bilinir ve belirtilmelidir. (1.3.5) teoremi bize Omf**-tümevarımı teoremini** verir:

Teorem 2.2.7 (Omf**-Tümevarım Teoremi)** $\text{Sz}\, A$ *sözcüklerine ilişkin bir $E(s)$ önermesi veya özelliği verilmiş olsun.*

1. *Her $p \in P$ için $E(p)$,*
2. *Her $s \in \text{Sz}\, A$ için $E(s) \Longrightarrow E(\neg s)$, ve*
3. *Her $s, t \in \text{Sz}\, A$ ve her $\diamond \in J_2$ için $(E(s) \wedge E(t)) \Longrightarrow E(s \diamond t)$*

ise her $\varphi \in \text{Omf}$ için $E(\varphi)$'dir.

Bu sav varsayımlarımızda $\text{Sz}\, A$ *gördüğümüz her yerde* Omf *yazdığımızda da doğrudur.*

Tekrarlamak olsa da formüller için tümevarımla kanıt yöntemi diyeceğimiz ve kısaca **FTK** ile göstereceğimiz yöntemi bir kez daha açık olarak yazalım. Her $\varphi \in \text{Omf}$ için $E(\varphi)$ olduğunu göstermek için aşağıdaki adımları kanıtlamak yeterlidir:

1. Her $p \in P$ için $E(p)$,
2. Her $\varphi \in \text{Omf}$ için $E(\varphi)$ ise $E(\neg\varphi)$, ve
3. Her $\varphi, \psi \in \text{Omf}$ ve her $\diamond \in J_2$ için $E(\varphi)$ ve $E(\psi)$ ise $E(\varphi \diamond \psi)$.

Teorem 2.2.8 *P kümesi sonsuz ve çokluk sayısı κ ise* Sz A *sözcükler kümesi ile* Omf *formüller kümesinin de çokluk sayısı κ'dır. Özellikle P sayılabilir bir kümeyse* Omf *kümesi de sayılabilir.*

Kanıt. P sonsuz olduğundan $P \cup O$ kümesinin de gücü κ'dır. κ sonsuz olduğundan Sz A kümesinin gücü de κ'dır ([17], Teorem 2.5.19). $P \subseteq$ Omf $\subseteq$ Sz A olduğundan Omf kümesinin gücü de κ'dır. ■

Not 2.2.9 Bir $p_0 \in P$'yi keyfi seçip sabit tutalım ve

$$\top := (p_0 \curlyvee \neg p_0) \text{ ve } \bot := (p_0 \curlywedge \neg p_0)$$

olarak açıklayalım. $\top$ formülü DOĞRU (**Versum**) ve $\bot$ formülü ise YANLIŞ (**Falsum**) olarak da adlandırılırlar. Bazı yazarlar önermeler mantığının harfleri arasına daha baştan $\top$ ve $\bot$ gibi iki sabit önerme eklerler ve her d yorumunda $d(\top) = 1$ ve $d(\bot) = 0$ olarak açıklarlar. Bu kuramda bir değişikliğe yol açmaz; buna kullandığımız dilin bir lehçesi gibi bakabiliriz. ▲

2.2.2 Tek Türlü Okunabilirlik

P-formüllerimiz her şeyden önce $A = P \sqcup O$ abecesinin sözcükleridirler. Her η formülümüzün (1.2.1)(2)'ye göre harfsel yazılımı tek türlüdür. Yine (1.2.1)(1)'e göre η formülümüzün birbirinden tümüyle farklı $\eta = s_0 \cdots s_n = t_1 \cdots t_m$ sözcüksel yazılımları olabilir. Bu nedenle aşağıda kanıtlayacağımız teorem öyle aşikâr bir şey değildir.

(2.2.6)'nın bir sonucu olarak her $\eta \in$ Omf şu üç tipten biri olmak zorundadır: a) $\eta \in P$, b) Bir $\varphi \in$ Omf ile $\eta = \neg\varphi$, c) Bir $\diamond \in J_2$ ile $\eta = (\varphi \diamond \psi)$ olacak biçimde $\varphi, \psi \in$ Omf vardır. Az ileride ise bu tiplerden ancak birinden olabileceğini kanıtlayacağız.

Teorem 2.2.10 *Herhangi iki φ, ψ formülü ve herhangi iki s, t sözcüğü için*

$$\varphi s = \psi t \text{ ise } \varphi = \psi \text{ ve } s = t.$$

Sonuç 2.2.11 *Önermemantıksal formüllerin öz başlangıçları önermemantıksal formül olamazlar.*

Kanıt. Önce teoremimizi kanıtlayalım.

$$E(\varphi) = \text{Her } \psi \text{ formülü ve her } s, t \text{ sözcükleri için}$$
$$(\varphi s = \psi t) \Longrightarrow (\varphi = \psi \text{ ve } s = t)$$

olmak üzere savımız şu şekli alır:

$$\text{Her } \varphi \in \text{Omf} \text{ için } E(\varphi).$$

Savımızı FTK ile φ üzerinden tümevarım uygulayarak kanıtlayacağız.

1. Durum: Her $p \in P$ için $E(p)$ olduğunu kanıtlayacağız. $s, t \in \text{Sz}\, A$ ve $\psi \in \text{Omf}$ keyfi verilsinler. $\varphi = p \in P$ ve $\varphi s = \psi t$ olsun. φs sözcüğünün harfsel yazılımı p ile başlar. (1.2.1)(2)'den dolayı ψt sözcüğünün harfsel yazılımı da p ile başlamak zorundadır. Şimdi $\psi = p$ olduğunu görelim. ψ bir önermemantıksal formül olduğundan üç tipten birinden olmak zorundadır. $\psi = \neg\eta$ tipinde olsaydı $p = \neg$ olması gerekirdi ve $P \cap J = \emptyset$ olduğundan bu olamaz. Bir $\diamond \in J_2$ ile $\psi = (\psi_1 \diamond \psi_2)$ tipinde olsaydı $p = ($ olması gerekirdi ama $P \cap O = \emptyset$ olduğundan bu da olamaz. Bu durumda tek seçenek $\psi \in P$ ve $\psi = p$ olmasıdır. Böylece $\varphi = \psi = p$ olur ve bunun doğal sonucu ise $s = t$ eşitliğidir.

2. Durum: $\eta \in \text{Omf}, E(\eta)$ ve $\varphi = \neg\eta$ olsun. $s, t \in \text{Sz}\, A$ ve $\psi \in \text{Omf}$ olmak üzere $\varphi s = \psi t$ olsun. φs'nin harfsel yazılımı $\neg$ ile başladığından (1.2.1)(2)'den dolayı ψt sözcüğünün harfsel yazılımı da $\neg$ ile başlar. $\psi \in P$ olamaz, çünkü bizi $\neg \in P$ çelişkisine götürür. $\psi = (\psi' \diamond \psi'')$ tipinde bir formül de olamaz, bu bizi $\neg = ($ çelişkisine götürür. Öyleyse bir η' ile $\psi = \neg\eta'$ olmak zorundadır. Varsayımımızdan $\neg\eta s = \neg\eta' t$ elde ederiz. Bu eşitlikte iki tarafın harfsel yazılımlarına geçtiğimizde ηs ve $\eta' t$'nin harfsel yazılımlarının eşitliğine ulaşırız. Bu ise bize $\eta s = \eta' t$ eşitliğini verir. $E(\eta)$ tümevarım koşulumuzdan buradan $\eta = \eta'$ ve $s = t$ elde ederiz. Dolayısıyla sonuçta

$$\varphi = \neg\eta = \neg\eta' = \psi \text{ ve } s = t$$

elde edilir.

3. Durum: $E(\varphi_n), n = 1, 2$ olsun. $\varphi := (\varphi_1 \diamond \varphi_2)$ ve $\diamond \in J_2$ olmak üzere $E(\varphi)$ olduğunu göstereceğiz. $s, t \in \text{Sz}\, A$ ve $\psi \in \text{Omf}$ keyfi verilsinler ve $\varphi s = \psi t$ olsun. φs sözcüğünün harfsel yazılımı sol ayraç ile başladığından ψt sözcüğünün harfsel yazılımı da sol ayraç ile başlamak zorundadır. Daha önceki irdelemelerimizdeki gerekçelerle bu kez $\star \in J_2$ ve $\psi', \psi'' \in \text{Omf}$ olmak üzere $\psi = (\psi' \star \psi'')$ tipinde bir formül olmak zorundadır. Buradan

$$\varphi s = \psi t \Longrightarrow (\varphi_1 \diamond \varphi_2)s = (\psi' \star \psi'')t \Longrightarrow \varphi_1 \diamond \varphi_2)s = \psi' \star \psi'')t$$

elde ederiz. $E(\varphi_1)$ tümevarım koşulu bize

$$\varphi_1 = \psi' \text{ ve } \diamond \varphi_2)s = \star\psi'')t$$

eşitliklerin verir. $\diamond$ ve $\star$ harf olduklarından ikinci eşitlikten $\diamond = \star$ ve $\varphi_2)s = \psi'')t$ elde ederiz. Son eşitlik ve $E(\varphi_2)$ tümevarım koşulundansa $\varphi_2 = \psi''$ ve

$)s =)t$ elde ederiz. Son eşitlikten $s = t$ elde edilir. Daha önceki kazandıklarımız ise bize $\varphi = \psi$ eşitliğini verir. $E(\varphi)$ kanıtlanmıştır.

Sonucun kanıtı: φ formülünün bir başlangıcının ψ gibi bir formül olduğunu varsayalım. Bir $t \in \operatorname{Sz} A$ sözcüğüyle $\varphi\emptyset = \varphi = \psi t$ olacaktır. Teoremden $\varphi = \psi$ ve $\emptyset = t$ olur ve işimiz biter. ■

Farklı tipten formüllerinin birbirine eşit olamayacaklarını ve her formülün kendi tipindeki gösteriminin tek türlü olduğunu kanıtlamak için tüm hazırlıklarımızı yapmış durumdayız.

Teorem 2.2.12 *$\varphi, \varphi', \psi, \psi', \eta \in \operatorname{Omf}$; $\diamond, \star \in J_2$ ve $p \in P$ olmak üzere*

(i) $\neg\varphi = \neg\psi$ *ise* $\varphi = \psi$.

(ii) $(\varphi \diamond \psi) = (\varphi' \star \psi')$ *ise* $\varphi = \varphi', \diamond = \star$ *ve* $\psi = \psi'$.

(iii) $\neg\eta \neq (\varphi \diamond \psi)$, $p \neq \neg\eta$ *ve* $p \neq (\varphi \diamond \psi)$.

Sonuç 2.2.13 *$F = \{f_\neg\} \cup \{f_\diamond \mid \diamond \in J_2\}$ fonksiyon kümesi* $\operatorname{Omf} P = P(F)$ *kümesini serbest üretmiştir.*

Kanıt. (iii)'te sözcüklerin harfsel yazılımlarının tekliğinden dolayı eşitlik söz konusu değildir. (i)'i kanıtlayalım: $\neg\varphi = a_0 a_1 \cdots a_n$ ve $\neg\psi = b_0 b_1 \cdots b_m$ formüllerimizin harfsel yazılımları olsunlar. Harfsel yazılımın tekliğinden $n = m$ ve $a_0 = b_0, \ldots, a_n = b_n$ elde ederiz. Buradan da

$$\varphi = a_1 \cdots a_n = b_1 \cdots b_n = \psi$$

elde edilir. (ii)'nin kanıtında, (2.2.10)'un kanıtındaki üçüncü durumda söylediklerimizi tekrarlayacağız. $(\varphi \diamond \psi) = (\varphi' \star \psi')$ eşitliğinden, harfsel yazılımın tekliği ile $\varphi \diamond \psi) = \varphi' \star \psi')$ elde edilir. Buradan (2.2.10) ile $\varphi = \varphi'$ ve $\diamond\psi) = \star\psi')$ elde edilir. Son eşitlik ve harfsel yazılımın tekliği bize $\diamond = \star$ ve $\psi) = \psi')$ eşitliklerini verir. En son eşitliğimizden bir kez daha (2.2.10) ile veya harfsel yazılımın tekliği ile $\psi = \psi'$ elde edilir. Sonuçta toparlarsak: $\varphi = \varphi'$, $\diamond = \star$ ve $\psi = \psi'$ olur.

Sonucun kanıtı: Eğer F'deki fonksiyonları Omf kümesine kısıtlarsak Omf-fonksiyonları elde ederiz. Diğer yandan teoremimiz bu kısıtlanışların birebir ve resimlerinin kendi aralarında ve P ile de ikişer ikişer ayrık olduklarını söyler. ■

(2.2.13) ve (1.3.8) bize doğrudan aşağıdaki Omf-Yinelgen Tanım Teoremi'ni verir.

Teorem 2.2.14 (Omf**-Yinelgen Tanım Teoremi)** *$V \neq \emptyset$ ve $G_\neg : V \to V$ ve her $\diamond \in J_2$ için bir $G_\diamond : V^2 \to V$ fonksiyonu verilmiş olsun. Her $h : P \to V$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\bar{h} :$ Omf $\to V$ fonksiyonuna tek olarak genişletilebilir: Her $p \in P$, $\varphi, \psi \in$ Omf ve her $\diamond \in J_2$ için*

1. $\bar{h}(p) = h(p)$.
2. $\bar{h}(\neg\varphi) = G_\neg(\bar{h}(\varphi))$.
3. $\bar{h}((\varphi \diamond \psi)) = G_\diamond(\bar{h}(\varphi), \bar{h}(\psi))$.

Not 2.2.15 İlerideki uygulamalarda $\bar{h}$ yerine yine yalın olarak h yazacağız. Biraz ileride (2.2.14)'ün uygulamasını örnekledikten sonra, her uygulamasında ilgili $G_\diamond$ fonksiyonlarını vermeyeceğiz. Genelde karşılaştığımız durum ve izleyeceğimiz yolu verelim:

Bir $f : \mathrm{Omf} \to X$ fonksiyonu tanımlamak istiyoruz. İlk akla gelen TVT'ye koşut olarak f fonksiyonunun bileşik formüllerdeki değerini bileşenleri yardımıyla açıklamaktır. Öyleyse asal formüller için $f(p)$'nin ne olduğu açıkca verilmelidir. Ayrıca her $j \in J$ için bir K_j kuralı verilmiştir. Yapılacak iş özetle şudur: Her $p \in P$, her $\varphi, \psi \in \mathrm{Omf}$ için:

1. $f(p)$'nin ne olduğu açıkça söylenir.
2. $f(\varphi)$ tanımlanmışsa $K_\neg$ kuralı ve $f(\varphi)$ yardımıyla $f(\neg\varphi)$ açıklanır.
3. $f(\varphi)$ ve $f(\psi)$ tanımlanmış ve $\diamond \in J_2$ ise $K_\diamond$ kuralı ve $f(\varphi), f(\psi)$ yardımıyla $f(\varphi \diamond \psi)$ açıklanır.

Üç adımlık bu şemaya göre verilen tanımlama yöntemini kısaca **FYT** ile göstereceğiz ve ondan **formüller için yinelgen (tekrarlı) tanımlama** olarak söz edeceğiz. ▲

Basit bir genelleme oldukça yararlı olacaktır. Şimdiye kadar verilen tanımlarda ve kanıtlarda J mantıksal işlemciler kümesinin hangi özelliklerini kullandığımıza bakarsak kullandığımız tek özellik bu kümede tekli ve ikili mantık işlemcilerini temsil eden imlerin bulunduğudur. Ne bu imlerin çoklukları ne de bu imlerin bir takım mantıksal bağlaçlara verilmiş kısaltmalar oldukları bir rol oynamıştır. Bu nedenle aşağıda ifade edeceğimiz teoremin kanıtı için hiçbir yeni fikre gerek yoktur.

P ve M sağ ve sol ayraçlarımızı içermeyen herhangi iki *ayrık* küme olsunlar. Abece olarak $H := P \sqcup M \sqcup \{(,)\}$ kümesini alalım. M kümesi M_1 ve M_2 gibi iki ayrık kümenin birleşimi olsun, dd. $M = M_1 \sqcup M_2$. H abecesinin $\mathrm{Sz}\, H$ sözcükler kümesinin aşağıdaki üç özelliğe sahip Q altkümelerinin en küçüğünü $\mathrm{Omf}\, H$ ile gösterip buna H-formülleri diyelim:

1. $P \subseteq Q$.
2. Her $m \in M_1$ ve her $\varphi \in Q$ için $m\varphi \in Q$.
3. Her $n \in M_2$ ve her $\varphi, \psi \in Q$ için $(\varphi n \psi) \in Q$.

Burada M_1 kümesinin öğelerinin tek basamaklı mantık işlemcilerini, M_2 kümesinin öğelerinin ise iki basamaklı mantık işlemcilerini temsil ettikleri

apaçıktır. Her $m \in M_1$ için ve her $n \in M_2$ için $f_m : \operatorname{Sz} H \to \operatorname{Sz} H$ ve $f_n : \operatorname{Sz} H \times \operatorname{Sz} H \to \operatorname{Sz} H$ fonksiyonları her s, t sözcükleri için

$$f_m(s) := ms \text{ ve } f_n(s,t) := (snt)$$

olarak açıklanmış olsunlar. $F := \{f_m \mid m \in M_1\} \cup \{f_n \mid n \in M_2\}$ ise $\operatorname{Omf} H$ kümesi $\operatorname{Sz} H$ kümesinde P kümesinin F-kapanışından başka bir şey değildir. Dolayısıyla aşağıda vereceğimiz teoremlerin kanıtlarını alıştırma olarak bırakacağız.

Teorem 2.2.16 *Her $\varphi \in \operatorname{Omf} H$ formülü şu üç tipten birinde ve ancak birindedir:*

(a) Bir $p \in P$ ile $\varphi = p$.

(b) Bir $m \in M_1$ ve bir $\eta \in \operatorname{Omf}$ ile $\varphi = m\eta$.

(c) Bir $n \in M_2$ ve $\psi, \eta \in \operatorname{Omf}$ ile $\varphi = (\psi n \eta)$.

Ayrıca bu gösterimler tek türlü belirlidirler, dd. $\varphi, \varphi', \psi, \psi', \eta \in \operatorname{Omf}$; m, $m' \in M_1$, $n, n' \in M_2$ ve $p \in P$ olmak üzere

(i) $m\varphi = m'\psi \Longrightarrow m = m'$ ve $\varphi = \psi$.

(ii) $(\varphi n \psi) = (\varphi' n' \psi') \Longrightarrow (\varphi = \varphi'$ ve $n = n'$ ve $\psi = \psi')$.

(iii) $m\eta \neq (\varphi n \psi), p \neq m\eta$ ve $p \neq (\varphi n \psi)$.

Bu tek türlü okunabilirliğin bir sonucu $\operatorname{Omf} P$'de olduğu gibi $\operatorname{Omf} H$ için de benzer bir Omf-*Tümevarım* ve Omf-*Yinelgen Tanım* teoremlerinin geçerli olduğudur.

2.2.3 Ayraç Azaltma Uzlaşması

İç yazılımda ayraçlar formüllerimizin tek türlü okunabilmesi için gereklidir. Yine de bazı uzlaşmalarla ayraç sayısını azaltmak yararlıdır. Biz x, y, z doğal sayılar olmak üzere $xy + z$ gibi bir ifadeyle karşılaştığımızda bununla kastedilenin ayraçlarla yazıldığında $(x(y + z))$ değil $((xy) + z)$ olduğunda hemfikirizdir. Niçin? Çünkü *çarpma toplamadan daha sıkı bağlar* diye bir uzlaşmamız vardır. Benzeri uzlaşmaları formül yazımında da yapacağız. Önerme mantıksal formüllerimiz için aşağıdaki ayraç azaltma uzlaşmalarını kullanacağız:

- Herhangi bir formüldeki dış ayraçlar atılabilir, örneğin $((\neg\varphi \curlyvee \psi) \leftrightarrow (\varphi \to \psi))$ yerine $(\neg\varphi \curlyvee \psi) \leftrightarrow (\varphi \to \psi)$ yazabiliriz.
- Aşağıda imlerimiz üç öbek olarak verilmiştir:

$$\neg;\ \curlywedge,\ \curlyvee; \to,\ \leftrightarrow\ .$$

Öbeklerin bağlama dereceleri soldan sağa azalacaktır. Ancak herhangi bir öbekteki imlerin bağlama dereceleri aynı olacaktır; bu nedenle onlar peşpeşe geldiklerinde neyi kastettiğimizi belirtebilmek için ayraç kaçınılmazdır. Örneğin $(\neg\varphi \curlyvee \psi) \leftrightarrow (\varphi \to \psi)$ yerine yanlış anlaşılmadan $\neg\varphi \curlyvee \psi \leftrightarrow (\varphi \to \psi)$ yazabiliriz. Gerçekten formülümüzde en sıkı bağlayan $\neg$'dır, kendisinden sonra gelen $\curlyvee$ dan daha sıkı bağlar. Bu nedenle $\neg\varphi \curlyvee \psi$ asla $\neg(\varphi \curlyvee \psi)$ olamaz ve $(\neg\varphi \curlyvee \psi)$ olmak zorundadır. $\curlyvee$ ve $\leftrightarrow$ ikili işlemcilerdir ve $\curlyvee$ imi $\leftrightarrow$'den daha güçlü bağlamaktadır. Bu nedenle ψ'yi $\leftrightarrow$'den önce $\curlyvee$ bağlar. Böylece formülümüzün başlangıcı $(\neg\varphi \curlyvee \psi)$ olmak zorundadır. Ancak $\to$ ve $\leftrightarrow$ imlerinin bağlama dereceleri aynı olduğu için $\neg\varphi \curlyvee \psi \leftrightarrow (\varphi \to \psi)$'den artık ayraç atamayız. Benzer biçimde $\curlyvee, \curlywedge$ imlerinin bağlama dereceleri aynı olduğu için $\varphi \curlyvee \psi \curlywedge \zeta$ gibi bir ifade tek türlü okunamaz; bununla neyi anlatmak istediğimizi, $\varphi \curlyvee (\psi \curlywedge \zeta)$'nın mı yoksa $(\varphi \curlyvee \psi) \curlywedge \zeta$'nın mı kastedildiğini belirtmek için ayraç kullanmak zorunludur. Bağlama derecelerinin tanımında bir uyum yoktur, farklı uzlaşmalarla karşılaşabilirsiniz. Örneğin gittikçe artan bir uzlaşma da

$$\neg,\ \curlywedge,\ \curlyvee,\ \to,\ \leftrightarrow$$

dizisinde bağlama dereceleri soldan sağa azalır. Eğer bu uzlaşmayı kullanacak olsaydık $\varphi \curlyvee (\psi \curlywedge \zeta)$ formülünde ayraçları atıp, formülümüzü $\varphi \curlyvee \psi \curlywedge \zeta$ olarak yazabilirdik, buna karşın $(\varphi \curlyvee \psi) \curlyvee \zeta$ formülünden ayraçları atamazdık.

- Bir formülde aynı ikili mantıksal işlemci birden fazla karşımıza çıktığında *sağdan birleştirmeyi* kullanacağız. Örneğin ikili işlemcimiz $\to$ olsun. ψ_1, ψ_2, η formüllerimiz için $\psi_1 \to (\psi_2 \to \eta)$ ve $(\psi_1 \to \psi_2) \to \eta$ farklı iki formüldür. Biz $\psi_1 \to (\psi_2 \to \eta)$ yerine $\psi_1 \to \psi_2 \to \eta$ yazacağız. Yinelgen tanımlamayla her $n \geq 2$ için $\psi_1 \to \cdots \to \psi_n \to \eta$ ifadeleri

  1. $\psi_1 \to \psi_2 \to \eta := \psi_1 \to (\psi_2 \to \eta)$, ve
  2. $\psi_1 \to \cdots \to \psi_{n+1} \to \eta := \psi_1 \to (\psi_2 \to \cdots \to \psi_n \to \eta)$

  olacak biçimde tanımlanırlar. Benzer biçimde $\psi_1 \curlyvee \psi_2 \curlyvee \cdots \curlyvee \psi_n$ ve $\psi_1 \curlywedge \psi_2 \curlywedge \cdots \curlywedge \psi_n$ ifadeleri tanımlanırlar. $\psi_1 \curlyvee \psi_2 \curlyvee \cdots \curlyvee \psi_n$ ve $\psi_1 \curlywedge \psi_2 \curlywedge \cdots \curlywedge \psi_n$ yerine ise bazen $\bigvee_{1 \leq k \leq n} \psi_k$ ve $\bigwedge_{1 \leq k \leq n} \psi_k$ kısaltmalarını kullanacağız.

2.2.4 Ön Yazılımda Önermemantıksal Formüller

Ön yazılım kullandığımızda formül tanımımız ve teoremlerimizin ne şekil alacağına kısaca değinelim. Ayraç kullanmayacağımız için şimdi abecemiz

$B = P \sqcup J$ olacaktır. $B = P \sqcup J$ abecesinin $\mathrm{Sz}\, B$ sözcükler kümesinin

1. $P \subseteq Q \subseteq \mathrm{Sz}\, B$,
2. $\varphi \in Q$ *ise* $\neg\varphi \in F$,
3. $\varphi, \psi \in Q$ *ise her* $\diamond \in J_2$ için $\diamondsuit\varphi\psi \in Q$.

koşullarını sağlayan Q altkümelerinin en küçüğü Omfo kümesine B abecesinin ön yazılımlı formüller kümesi denir. İç yazılımda kanıtladığımız teoremlerin ön yazılımdaki benzerlerini kanıtlama işini ve aynı şeylerin art yazılım için yapılmasını okura bırakıyoruz.

Teorem 2.2.17 $\mathrm{Sz}\, B$ *sözcüklerine ilişkin bir* $E(s)$ *önermesi veya özelliği verilmiş olsun.*

1. *Her* $p \in P$ *için* $E(p)$,
2. *Her* $s \in \mathrm{Sz}\, B$ *için* $E(s)$ *ise* $E(\neg s)$, *ve*
3. *Her* $s, t \in \mathrm{Sz}\, B$ *ve her* $\diamond \in J_2$ *için* $(E(s)$ *ve* $E(t)$ *ise* $E(\diamondsuit st))$

ise her $\varphi \in$ Omfo *için* $E(\varphi)$*'dir. Bu sav varsayımlarımızda* $\mathrm{Sz}\, B$ *gördüğümüz her yerde* Omfo *yazdığımızda da doğrudur.*

Kanıt. Alıştırma. ■

Teorem 2.2.18 $\varphi, \varphi', \psi, \psi', \eta \in$ Omfo, $\diamond, \star \in J_2$ *ve* $p \in P$ *olmak üzere*

1. $\neg\varphi = \neg\psi$ *ise* $\varphi = \psi$.
2. $\diamondsuit\varphi\psi = \star\varphi'\psi'$ *ise* $\diamond = \star$, $\varphi = \varphi'$ *ve* $\psi = \psi'$.
3. $\neg\eta \neq \diamondsuit\varphi\psi$,$p \neq \neg\eta$ *ve* $p \neq \diamondsuit\varphi\psi$.

Kanıt. Alıştırma. ■

2.3 Tümevarımsal Kanıtlar ve Yinelgen Tanımlar

Önermemantıksal formüllere ilişkin bir önermenin her φ formülü için doğru olduğunu kanıtlamanın temel yöntemi FTK'dir. Nitekim (2.2.10)'u bu teorem yardımıyla kanıtladık. Ancak böyle bir önermenin kanıtı doğal sayılar için bildiğimiz tümevarımla da yapılabilir.

Bize herhangi bir $f : \mathrm{Omf} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $U_n := \{\varphi \in \mathrm{Omf} \,|\, f(\varphi) = n\}$ ve $V_n := \bigcup_{k=0}^{n} U_k$ olsun. Her $\varphi \in \mathrm{Omf}$ için $E(\varphi)$ olduğunu kanıtlamak istediğimizde aşağıdaki iki adım yeterlidir:

(I) Her $\varphi \in U_0$ için $E(\varphi)$ olduğu gösterilir.

(II) Her $\varphi \in U_n$ için $E(\varphi)$ ise her $\psi \in U_{n+1}$ için $E(\psi)$ olduğu gösterilir.

(II) adım aşağıdaki (II)* adımı ile değiştirilebilir:

(II)* Her $\varphi \in V_n$ için $E(\varphi)$ ise her $\psi \in U_{n+1}$ için $E(\psi)$ olduğu gösterilir.

Şimdiden böyle bir f fonksiyonumuz var: $f = \mathrm{uz}$. Tanım gereği $\mathrm{uz}(\varphi)$, φ formülümüzün harfsel yazılımındaki harflerin sayısıdır. Bir başka

$$\mathrm{sv} : \mathrm{Omf} \to \mathbb{N}$$

fonksiyonunu (2.12)'deki $(P_n(F))_{n<\omega}$ dizisinin yardımıyla tanımlayabiliriz. $\varphi \in \mathrm{Omf}$ için

$$\mathrm{sv}(\varphi) := \min\{n | \varphi \in P_n(F)\}$$

doğal sayısına φ formülünün **seviyesi** denir. $p, q \in P$ için $\mathrm{sv}(p) = \mathrm{sv}(q) = 0$, buna karşın $\mathrm{uz}(p) = \mathrm{uz}(q) = 1$. Diğer yandan $\diamond \in J_2$ ve $\varphi = (p \diamond q)$ için $\mathrm{uz}(\varphi) = 5$, $\mathrm{sv}(\varphi) = 1$. $\psi = \neg p$ içinse $\mathrm{uz}(\psi) = 2$ ve $\mathrm{sv}(\psi) = 1$. Bir diğer $\mathrm{mu} : \mathrm{Omf} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu

$$\mathrm{mu}(\varphi) := \varphi\text{'deki mantıksal işlemci sayısı}$$

olarak açıklanabilir. $\mathrm{mu}(\varphi)$'ye φ formülünün **mantıksal uzunluğu** denir. Demek ki tüm önerme formüllerimize ilişkin bir $E(\varphi)$ önermesini formüllerimizin uzunluğu üzerinden veya seviyesi üzerinden veya mantıksal uzunluğu üzerinden tümevarımla da kanıtlayabiliriz.

Şimdi (2.2.14) teoreminin uygulamalarına birkaç örnek vereceğiz. Bu örnekler bu teoremin nasıl kullanılacağı hakkında bize yeterince bilgi verecekler. İleride ise benzer durumlarda uygun fonksiyonlarla teoremin kullanımını okura bırakacağız.

Örnek 2.3.1 Değerlemeler ve Yorumlar: (2.2.14)'te $V = \mathbf{2} = \{0, 1\}$ alalım ve bir $d : P \to \mathbf{2}$ fonksiyonu verilsin. d fonksiyonuna P'nin bir **değerlemesi** veya **yorumu** denir. Teoremimizdeki $G_\neg$ ve $G_\diamond$ fonksiyonları her $\varphi, \psi \in \mathrm{Omf}$ ve her $a, b \in V$ için

$$G_\neg(a) := 1 - a,\ G_\vee(a, b) := a \vee b$$
$$G_\wedge(a, b) := a \wedge b,\ G_\to(a, b) := (1 - a) \vee b$$
$$G_\leftrightarrow(a, b) := \begin{cases} 1, & a = b \\ 0, & a \neq b \end{cases}$$

olarak açıklanmış olsunlar. (2.2.14)'ten dolayı d fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlayacak biçimde *tek* olarak, yine d ile göstereceğimiz, bir $d : \mathrm{Omf} \to \mathbf{2}$ fonksiyonuna genişletilebilir: Her $\varphi, \psi \in \mathrm{Omf}$ için:

1. $d(\neg\varphi) = G_\neg(d(\varphi)) = 1 - d(\varphi)$.
2. $d(\varphi \wedge \psi) = G_\wedge(d(\varphi), d(\psi)) = d(\varphi) \wedge d(\psi)$.

3. $d(\varphi \curlyvee \psi) = G_{\curlyvee}(d(\varphi), d(\psi)) = d(\varphi) \vee d(\psi)$.
4. $d(\varphi \to \psi) = G_{\to}(d(\varphi), d(\psi)) = (1 - d(\varphi)) \vee d(\psi)$.
5. $d(\varphi \leftrightarrow \psi) = G_{\leftrightarrow}(d(\varphi), d(\psi)) = \begin{cases} 1, & d(\varphi) = d(\psi) \\ 0, & d(\varphi) \neq d(\psi) \end{cases}$.

Burada $d(\varphi)$'ye φ formülünün d'ye göre **yorumu** veya d'ye göre **doğruluk değeri** denir. ▲

Örnek 2.3.2 $\theta : P \to \{-1, 1\}$ keyfi verilsin. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir tek $\Theta : \mathrm{Omf} \to \{-1, 1\}$ fonksiyonu olduğunu kanıtlayınız: Her $p \in P$ ve her $\varphi, \psi \in \mathrm{Omf}$ için

$$\begin{aligned} \Theta(p) &= \Theta(p), \\ \Theta(\neg\varphi) &= -\,\Theta(\varphi), \\ \Theta(\varphi \curlyvee \psi) &= \max\{\Theta(\varphi), \Theta(\psi)\}, \\ \Theta(\varphi \curlywedge \psi) &= \min\{\Theta(\varphi), \Theta(\psi)\}, \\ \Theta(\varphi \to \psi) &= \max\{-\Theta(\varphi), \Theta(\psi)\}, \\ \Theta(\varphi \leftrightarrow \psi) &= \Theta(\varphi) \cdot \Theta(\psi). \end{aligned}$$

▲

Örnek 2.3.3 Altformüller: Şimdi (2.2.14)'ün yardımıyla her φ formülünün altformüllerinin $\mathrm{alf}\,\varphi$ kümesini tanımlayacağız. (2.2.14)'te V olarak $\mathcal{P}(\mathrm{Omf})$ kümesini alalım. $f : P \to \mathcal{P}(\mathrm{Omf})$ fonksiyonu her $p \in P$ için $f(p) = \{p\}$ olarak açıklansın. $G_{\neg}(x) := x$ ve her $\diamondsuit \in J_2$ için ise

$$G_{\diamondsuit}(x, y) := x \cup y$$

olarak alınsın. Bu durumda (2.2.14) ile tek olarak belirlenen fonksiyonumuz $f : \mathrm{Omf} \to \mathcal{P}(\mathrm{Omf})$ olsun. Her $p \in P$, her $\varphi, \psi \in \mathrm{Omf}$ ve her $\diamondsuit \in J_2$ için

$$\begin{aligned} f(p) &= \{p\}, \\ f(\neg\varphi) &= G_{\neg}(f(\varphi)) = f(\varphi), \\ f(\varphi \diamondsuit \psi) &= G_{\diamondsuit}(f(\varphi), f(\psi)) = f(\varphi) \cup f(\psi) \end{aligned}$$

olur. Her φ formülü için

$$\mathrm{alf}(\varphi) := f(\varphi) \cup \{\varphi\}$$

kümesine φ formülünün **altformüllerinin** kümesi denir. Bu durumda her $p \in P$'nin bir tek altformülü vardır, o da kendisidir. $\neg\varphi$'nin altformülleri φ'nin altformülleri ve $\neg\varphi$'nin kendisinden oluşur. $\diamondsuit \in J_2$ olmak üzere

$\varphi\diamondsuit\psi$'nin altformülleri φ'nin altformülleri artı ψ'nin altformülleri ve $\varphi\diamondsuit\psi$'nin kendisinden oluşur. Açık olarak bir kez daha FYT şemasında yazarsak

1. $\mathrm{alf}(p) = \{p\}$, $\quad p \in P$.
2. $\mathrm{alf}(\neg\varphi) = \mathrm{alf}(\varphi) \cup \{\neg\varphi\}$, $\quad \varphi \in \mathrm{Omf}$
3. $\mathrm{alf}(\varphi\diamondsuit\psi) = \mathrm{alf}(\varphi) \cup \mathrm{alf}(\psi) \cup \{\varphi\diamondsuit\psi\}$, $\quad \varphi, \psi \in \mathrm{Omf},\ \diamondsuit \in J_2$

olur. Genelde bu eşitlikler tanım olarak karşımıza çıkar. İlerde biz de bu yaklaşımı tanım olarak seçmekte bir sakınca görmeyeceğiz. ▲

Örnek 2.3.4 Yerine Koyma $\varphi(p|\psi)$ **:** Herhangi bir φ formülünde, bu formüldeki "geçtiği her yerde $p \in P$ değişkeni yerine ψ formülü koyduğumuzda" elde edilen formülü $\varphi(p|\psi)$ ile göstereceğiz. Ancak $\varphi(p|\psi)$'nin bu tanımında "..." içindeki anlatımı matematik diline çevirmeliyiz. Her şeyden önce φ formülü p değişkenini içermiyorsa, bu formülde hiçbir değişiklik yapmayacağımızdan, bu durumda $\varphi(p|\psi) = \varphi$ olacağını aklımızda tutalım. Şimdi (2.2.14)'te $V = \mathrm{Omf}$ alarak $f : P \to \mathrm{Omf}$ fonksiyonunu

$$f(q) := \begin{cases} q, & q \neq p \\ \psi, & q = p \end{cases}$$

olarak tanımlayalım[2]. $G_\diamondsuit$ fonksiyonlarımız ise aşağıdaki gibi tanımlanmış olsunlar:

$$G_\neg(\eta) := \neg\eta.$$
$$G_\diamondsuit(\eta, \eta') := \eta\diamondsuit\eta'.$$

Bu koşullarda (2.2.14) ile tek olarak belirli fonksiyonumuz yine f ile gösterilmek üzere

$$\varphi(p|\psi) := f(\varphi)$$

olarak tanımlarsak her $q \in P$, her $\varphi, \eta \in \mathrm{Omf}$ ve her $\diamondsuit \in J_2$ için

$$q(p|\psi) = \begin{cases} q & , q \neq p,\ q \in P. \\ \psi & q = p \end{cases}$$
$$(\neg\varphi)(p|\psi) = \neg\varphi(p|\psi)$$
$$(\varphi\diamondsuit\eta)(p|\psi) = \varphi(p|\psi)\diamondsuit\eta(p|\psi)$$

olur. Bu üç eşitlik genelde formüller için $\varphi(p|\psi)$'nin FYT ile tanımı olarak karşımıza çıkar. ▲

[2]Aslında f fonksiyonu elbette p ve ψ'ye bağlıdır. Bu nedenle örneğin $f_{p\psi}$ ile gösterilmesi daha doğru olurdu. Biz p ve ψ'yi keyfi verilmiş ve sabit tutulmuş düşünerek f yalın yazılımını kullanacağız.

Bu örnekler sanırız yeterlidir. Bundan sonra tanım bölgesi Omf olan fonksiyonların tanımını (2.2.14) bazında ayrıntılı olarak vermeyecek, bu işi okura bırakacağız. Onun yerine aşağıda olduğu gibi bu fonksiyonların FYT şemasındaki özelliklerini tanım olarak vermekle yetineceğiz.

Örnek 2.3.5 aso(φ) veya deg φ: φ formülündeki **asal önermelerin** (veya **değişkenlerin**) kümesi. $\diamondsuit \in J_2$ olmak üzere her $p \in P$ ve her $\varphi, \psi \in$ Omf için

$$\begin{aligned} \text{aso}(p) &= \{p\}. \\ \text{aso}(\neg\varphi) &= \text{aso}(\varphi). \\ \text{aso}(\varphi \diamondsuit \psi) &= \text{aso}(\varphi) \cup \text{aso}(\psi). \end{aligned}$$

Eğer asal önerme yerine *değişken* demeyi yeğliyorsak o zaman aso(φ) yerine deg(φ) yazacak ve φ formülündeki değişkenlerin kümesinden söz edeceğiz. Değişken olarak yazarsak tanımımız

$$\begin{aligned} \text{deg}(p) &= \{p\}. \\ \text{deg}(\neg\varphi) &= \text{deg}(\varphi). \\ \text{deg}(\varphi \diamondsuit \psi) &= \text{deg}(\varphi) \cup \text{deg}(\psi). \end{aligned}$$

şeklini alır. ▲

Örnek 2.3.6 $\mathbf{s}_\diamondsuit(\varphi)$: φ formülündeki $\diamondsuit$ işlemci sayısı. Örneğin $\diamondsuit \in J_2$ olsun. $j \in J_2$ olmak üzere her $p \in P$ ve her $\varphi, \psi \in$ Omf için

$$\begin{aligned} s_\diamondsuit(p) &= 0. \\ s_\diamondsuit(\neg\varphi) &= s_\diamondsuit(\varphi). \\ s_\diamondsuit(\varphi j \psi) &= \begin{cases} s_\diamondsuit(\varphi) + s_\diamondsuit(\psi) + 1 & , j = \diamondsuit. \\ s_\diamondsuit(\varphi) + s_\diamondsuit(\psi) & , j \neq \diamondsuit. \end{cases} \end{aligned}$$

$s_\neg$ fonksiyonun tanımını alıştırma olarak bırakıyoruz. ▲

Örnek 2.3.7 sv(φ) : φ formülünün seviyesi. Daha önce sv(φ)'yi tanımladık. $\diamondsuit \in J_2$ olmak üzere her $p \in P$ ve her $\varphi, \psi \in$ Omf için

$$\begin{aligned} \text{sv}(p) &= 0. \\ \text{sv}(\neg\varphi) &= \text{sv}(\varphi) + 1. \\ \text{sv}(\varphi \diamondsuit \psi) &= \max\{\text{sv}(\varphi), \text{sv}(\psi)\} + 1. \end{aligned}$$

olduğunu göstermeyi, ayrıca (2.2.14) ile bu özelliklere sahip bir tek Omf $\to \mathbb{N}$ fonksiyonun olduğunu kanıtlamayı alıştırma olarak bırakıyoruz. Bu üç

denklem FYT bazında sv(φ)'nin, sağlam temele oturtulabilir tanımı olarak alınabilir. ▲

Örnek 2.3.8 $p, q, r \in P$ olmak üzere $\varphi = (p \to q) \curlyvee (q \curlywedge \neg r \leftrightarrow p)$ olsun. Bu durumda $\mathrm{uz}(\varphi) = 14$, $\mathrm{aso}(\varphi) = \deg \varphi = \{p, q, r\}$, $\mathrm{sv}(\varphi) = 4$, $\mathrm{mu}(\varphi) = 5$ ve

$$\mathrm{alf}(\varphi) = \{\varphi, (p \to q), (q \curlywedge \neg r \leftrightarrow p), p, q, (q \curlywedge \neg r), \neg r, r\}.$$

▲

2.4 Anlamsal Yapı

Bu bölümde P sonsuz bir küme olmak üzere $A = P \sqcup O$ abecesini verilmiş varsayacağız ve kısaca "φ bir formüldür" dediğimizde "$\varphi \in \mathrm{Omf}$" anlaşılacaktır. Daha önce de belirttiğimiz gibi P kümesinin öğelerine asal önermeler veya önerme değişkenleri diyeceğimiz gibi Omf kümesinin öğelerine ise önermemantıksal formüller veya önerme fonksiyonları da diyeceğiz. Formüllerimiz de dahil olmak üzere A abecemizin hiçbir sözcüğüne henüz bir anlam yüklemiş değiliz. Şu ana kadar dilimizin biçimsel yapısıyla (sintaksı ile) ilgilendik. Şimdi formüllerimizin anlamsal yapısı (semantiği) ile ilgileneceğiz.

2.4.1 Yorumlar-Değerlemeler

Bize anlamsal önermelerin bir $\mathcal{O}$ kümesi verilsin. $\mathcal{O}$ önermeler kümesi $\neg$, $\vee$, $\wedge$ ve $\Rightarrow$ anlamsal mantık işlemcilerine göre **kapalı** olsun, dd.

$$\alpha, \beta \in \mathcal{O} \text{ ise } \neg\alpha, \alpha \vee \beta, \alpha \wedge \beta, \alpha \Rightarrow \beta \in \mathcal{O}$$

olsun. Ayrıca $\mathcal{O}$ kümesinde bir yanlış $\mathbf{0}$ ve bir doğru $\mathbf{1}$ önermesi seçilmiş olsun. Bu durumda bir $I : \mathrm{Omf}\, P \to \mathcal{O}$ dönüşümüne, aşağıdaki koşullar sağlandığında, $\mathrm{Omf}\, P$ formüllerinin $\mathcal{O}$'da bir **yorumu** denir: Her $\varphi, \psi \in \mathrm{Omf}\, P$ için

$$\begin{aligned} I(\neg\varphi) = \neg I(\varphi),\ I(\bot) = \mathbf{0},\ I(\top) = \mathbf{1} \\ I(\varphi \curlywedge \psi) = I(\varphi) \wedge I(\psi),\ I(\varphi \curlyvee \psi) = I(\varphi) \vee I(\psi) \\ I(\varphi \to \psi) = (I(\varphi) \Rightarrow I(\psi)),\ I(\varphi \leftrightarrow \psi) = (I(\varphi) \Leftrightarrow I(\psi)) \end{aligned}$$

Kolayca görüleceği gibi I fonksiyonunu bilmek için $I|P$'yi bilmek yeterlidir. I yorumu ile *anlamsız* φ formülüne *anlamlı* $I(\varphi)$ önermesini karşılık getirir ve bu karşılık getirmede aynı zamanda *anlamsız* $\neg, \curlywedge, \curlyvee, \to, \leftrightarrow$ imleri

ise *anlamlı* $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ imleriyle yorumlamış oluruz. $\alpha \in \mathcal{O}$ önermesinin doğruluk değerini $\delta(\alpha)$ ile gösterelim. Bizi $I(\varphi)$ önermesinden çok onun $d(\varphi) := \delta(I(\varphi))$ doğruluk değeri ilgilendirmektedir. I fonksiyonunun özelliklerinden dolayı $d = \delta \circ I : \mathrm{Omf} \to \{0,1\}$ fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$\begin{aligned} d(\neg\varphi) &= 1 - d(\varphi),\ d(\top) = 1,\ d(\bot) = 0 \\ d(\varphi \curlywedge \psi) &= d(\varphi) \wedge d(\psi) \\ d(\varphi \curlyvee \psi) &= d(\varphi) \vee d(\psi) \\ d(\varphi \to \psi) &= 1 \text{ ava } d(\varphi) \leq d(\psi) \\ d(\varphi \leftrightarrow \psi) &= 1 \text{ ava } d(\varphi) = d(\psi) \end{aligned}$$

(2.3.1)'den dolayı bu d dönüşümü $d|P$ ile *tek* olarak belirlidir. Demek ki, bizi ilgilendirdiği şekliyle, $I : \mathrm{Omf}\, P \to \mathcal{O}$ yorumunu bilmek demek $d|P$'yi bilmek demektir. Dolayısıyla $\mathcal{O}$ ve I'larla çalışmak yerine $d : P \to \{0,1\}$ fonksiyonları ile çalışacağız. Açıklığa kavuşturmamız gereken bir tek nokta kalmıştır, o da herhangi bir $d : P \to \{0,1\}$ fonksiyonunun uygun bir $\mathcal{O}$ ve I ile kazanılıp kazanılamayacağını belirlemektir.

$d : P \to \{0,1\}$ keyfi verilsin. $p \in P$ için $d(p) = 1$ ise α_p önermesi $p = p$ ve $d(0) = 0$ ise α_p önermesi $p \neq p$ olsun. $\mathcal{O}$ ile $\mathcal{A} := \{\alpha_p | \, p \in P\}$ önermelerinin kapanışını gösterelim, dd. $\mathcal{O}$ önermeler kümesi $\mathcal{A}$'yı içeren ve $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow$ işlemcilerine göre kapalı olan en küçük önermeler kümesi olsun. $\alpha \in \mathcal{O}$ için α'nın doğruluk değerini $\delta(\alpha)$ ile gösterirsek her $p \in P$ için $d(p) = \delta(\alpha_p)$ olduğu aşikârdır. Her $p \in P$ için $I(p) := \alpha_p$ olarak tanımlanan dönüşüm, doğal biçimde bir $I : \mathrm{Omf} \to \mathcal{O}$ dönüşümüne genişletilebilir.

Bu irdelemelerden sonra I yorumlarından tümüyle vazgeçebilir, onların yerine $d : P \to \{0,1\}$ fonksiyonları ile çalışabiliriz; aşağıdaki tanımın mantığı bu irdelemelerdir.

Tanım 2.4.1 *P'nin bir **yorumu,** bir **değerlemesi** veya bir **modeli** tanım gereği bir $d : P \to \{0,1\}$ fonksiyonudur. Bu d yorumunun $\varphi \in \mathrm{Omf}$ için Örnek (2.3.1)'de belirlediği $d(\varphi)$ değerine ise φ'nin d altında veya d modelindeki yorumu denir. $d(\varphi) = 1$ ise d, φ **için bir modeldir** veya d, φ'yi **sağlar** denir ve bu $d \models \varphi$ ile gösterilir, dd.*

$$\begin{aligned} d \models \varphi &:\Longleftrightarrow d(\varphi) = 1. \\ d \not\models \varphi &:\Longleftrightarrow d(\varphi) = 0. \end{aligned}$$

$\models, \not\models \notin \mathrm{Sz}\, A$ varsayacağız. Böylece $d \models \varphi$ ve $d \models \varphi$ abecemizin sözcükleri değildir; bunlar sözeden söylemlerdir. $d(\varphi)$ yerine $\varphi[d]$ ve $[\varphi]^d$ gösterimleri de yaygındır.

Not 2.4.2 Üçüncü bölümde $d \models \varphi$ yerine $d \models_{\text{om}} \varphi$ yazacağız ve d, φ formülünün önermemantıksal bir modelidir diyeceğiz. Üçüncü bölümde $\models$ imini başka anlamda kullanacağız. Bu bölümde $\models_{\text{om}}$ yerine yalın olarak $\models$ yazmayı yeğleyeceğiz. ▲

Formüllerimizin tümevarımsal tanımındaki temel formüllerinin dolaysız bileşenleri türünden doğruluk değerlerini bir kez bir arada yazalım:

$d(\varphi)$	$d(\psi)$	$d(\neg\varphi)$	$d(\varphi \curlyvee \psi)$	$d(\varphi \curlywedge \psi)$	$d(\varphi \to \psi)$	$d(\varphi \leftrightarrow \psi)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

(2.13)

Not 2.4.3 Geleneğe uyarak doğruyu 1 ve yanlışı 0 ile yorumladık. Ancak yanlışı -1 ile gösterip asal önermelerin yorumlarını $\theta : P \to \{-1, 1\}$ fonksiyonları olarak alıp bunları (2.3.2)'de olduğu gibi Θ ile Omf'e genişletmek çok daha kullanışlıdır.

Örneğin her θ, dolayısıyla her d yorumunda

$$d \models (\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \neg\psi))$$

olduğu

$$\Theta(\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)) \overset{def}{=} -\Theta(\varphi \leftrightarrow \psi) \overset{def}{=} -\Theta(\varphi)\Theta(\psi) =$$
$$\Theta(\varphi)(-\Theta(\psi)) \overset{def}{=} \Theta(\varphi)\Theta(\neg\psi) \overset{def}{=} \Theta(\varphi \leftrightarrow \neg\psi)$$

ile kolayca görülür. ▲

Not 2.4.4 DOĞRU, dd. $\top$, her yorumda doğru iken, YANLIŞ, dd. $\bot$ her yorumda yanlıştır, yani

$$\text{Her } d \in {}^{P}\mathbf{2} \text{ için } d(\top) = 1 \text{ ve } d(\bot) = 0)$$

veya eş anlamlı olmak üzere

$$\text{Her } d \in {}^{P}\mathbf{2} \text{ için } d \models \top \text{ ve } d \not\models \bot.$$

▲

Önerme 2.4.5 *Her $d \in {}^{P}2$, her $p \in P$ ve her φ, ψ için*

$$d \models p \Longleftrightarrow d(p) = 1.$$
$$d \models \neg\varphi \Longleftrightarrow d \not\models \varphi.$$
$$d \models (\varphi \Diamond \psi) \Longleftrightarrow d \models \varphi \underline{\Diamond} d \models \psi,\ \Diamond \in J_2.$$

Burada $\Diamond = \curlyvee, \curlywedge, \to, \leftrightarrow$ için $\underline{\Diamond} = \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ alınacaktır.

Kanıt. Doğrudan tanım ve d'nin özelliklerinden çıkar. ■

Verilen bir ψ formülündeki asal önermeler (dd. önerme fonksiyonundaki değişkenler) $p_1, p_2, \ldots, p_n$ arasındaysa, dd.

$$\operatorname{aso}\psi = \deg\psi \subseteq \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$$

ise bu durumu $\psi(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ ile göstereceğiz, burada tüm $p_1, \ldots, p_n$'lerin ψ de bulunması gerekmez. Herhangi bir d yorumu verildiğinde $d(\psi)$'yi bilmek için $d|\deg\psi$'yi bilmek yeterlidir. Şimdi $S := \{p_1, \ldots, p_n\}$ ve $\operatorname{Omf} S$ ise $\deg(\varphi) \subseteq S$ koşulunu sağlayan φ formüllerinin kümesi olmak üzere $d|\operatorname{Omf} S$ fonksiyonu $d|S$ ile tek olarak belirlidir. Bunun bir sonucu FTK ile kolayca görülebilecek aşağıdaki **Çakışma Önermesi**'dir**:**

Önerme 2.4.6 *Her $\varphi \in \operatorname{Omf} S$ için $d, d' \in {}^{P}\mathbf{2}$ ve*

$$\textit{her } p \in S \textit{ için } d(p) = d'(p) \textit{ ise } d(\varphi) = d'(\varphi).$$

Kanıt. $\operatorname{Omf} S$ tam da $A_S := S \cup O$ abecesinin formüllerinden başka bir şey değildir. d ve d' önermenin koşullarını sağlayacak biçimde verilsinler. Şimdi $\operatorname{Omf} S$'de formüller üzerinden tümevarım uygulayacağız.

1. $\varphi = p \in S$ ise önermenin koşulundan $d(\varphi) = d(p) = d'(p) = d'(\varphi)$ olur.

2. Şimdi $\varphi \in \operatorname{Omf} S$ ve $d(\varphi) = d'(\varphi)$ olsun. Bu durumda
$d(\neg\varphi) \overset{def}{=} 1 - d(\varphi) \overset{tvk}{=} 1 - d'(\varphi) \overset{def}{=} d'(\neg\varphi)$.

3. $\varphi, \psi \in \operatorname{Omf} S$, $d(\varphi) = d'(\varphi)$ ve $d(\psi) = d'(\psi)$ olsun. Bu durumda

$$d(\varphi \curlyvee \psi) \overset{def}{=} d(\varphi) \vee d(\psi) \overset{tvk}{=} d'(\varphi) \vee d'(\psi) \overset{def}{=} d'(\varphi \curlyvee \psi),$$
$$d(\varphi \curlywedge \psi) \overset{def}{=} d(\varphi) \wedge d(\psi) \overset{tvk}{=} d'(\varphi) \wedge d'(\psi) \overset{def}{=} d'(\varphi \curlywedge \psi),$$
$$d(\varphi \to \psi) \overset{def}{=} (1 - d(\varphi)) \vee d(\psi) = (1 - d'(\varphi)) \vee d'(\psi) \overset{def}{=} d'(\varphi \to \psi),$$
$$d(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 \overset{def}{\Longleftrightarrow} d(\varphi) = d(\psi) \overset{tvk}{\Longleftrightarrow} d'(\varphi) = d'(\psi) \overset{def}{\Longleftrightarrow} d'(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1.$$

Son satırın, d ve d' iki değerli olduklarından, $d(\varphi \leftrightarrow \psi) = d'(\varphi \leftrightarrow \psi)$ demek olduğu apaçıktır. ■

Bu önermeden dolayı aşağıdaki tanım kusursuzdur.

Tanım 2.4.7 *$\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ ve $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{2}^n$ ve d ise $d(p_k) = a_k$, $k = 1, \ldots, n$ koşulunu sağlayan herhangi bir yorum olmak üzere*

$$\varphi[a] := \varphi[a_1, \ldots, a_n] := d(\varphi)$$

$d(\varphi)$ nasıl bulunur? φ formülü ve d yorumu verilsin. $\varphi \in P$ ise $d(\varphi)$ zaten verilmiştir. φ bileşik önerme ise (2.13)'ten dolayı dolaysız bileşenlerinin doğruluk değerlerini bilmek yeterlidir. Aynı şey dolaysız bileşenler için de geçerli olacağından izlenecek yol açıktır: $\mathrm{sv}(\varphi) = m$ ise φ'nin 0. seviyeden altformüllerinden—ki bunlar φ'de geçen asal önermelerdir—başlayarak (2.13) ile adım adım bir üst seviyedeki altformüllerin doğruluk değeri hesaplanarak sonunda sonlu adımda φ'nin doğruluk değeri bulunur. Bir örnek verelim.

$$\varphi = ((p \curlyvee \neg q) \to ((p \curlywedge r) \leftrightarrow s)), \quad p, q, r, s \in P$$

olsun. φ'nin asal önermeleri için örneğin $d(p) = d(r) = 1$ ve $d(q) = d(s) = 0$ olsun. Birinci seviyeden altformüllerimiz $\neg q$ ve $(p \curlywedge r)$, bunlar içinse (2.13) ile $d(\neg q) = 1$ ve $d(p \curlywedge r) = 1$ olur. İkinci seviyeden altformüllerimizin–ki bunlar φ'nin dolaysız bileşenleridirler– doğruluk değerleri buradan $d(p \curlyvee \neg q) = 1$ ve $d((p \curlywedge r) \leftrightarrow s)) = 0$ olur. Bu ise bize (2.13) ile $d(\varphi) = 0$ değerini verir. Elbette aynı sonuca $\varphi = \varphi(p, q, r, s)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d(\varphi) = \varphi[1, 0, 1, 0] &= ((1 \vee \neg 0) \to ((1 \wedge 1) \leftrightarrow 0)) \\ &= ((1 \vee 1) \to (1 \leftrightarrow 0)) = (1 \to 0) = 0 \end{aligned}$$

olarak da görülebilir. Burada $a, b \in \{0, 1\}$ olmak üzere $\neg 0$ yerine 1, $\neg 1$ yerine 0, $a \leq b$ ise $(a \to b)$ yerine 1, $(1 \to 0)$ yerine 0 yazılmıştır. Sayılar için $(a \vee b)$ ve $(a \wedge b)$ ise her zamanki gibi bu sayıların maksimum ve minimumlarını göstermektedir. Benzer biçimde (2.3.2) ile

$$\begin{aligned} \Theta(\varphi) = \varphi[1, -1, 1, -1] &= ((1 \vee -1) \to ((1 \wedge 1) \leftrightarrow -1)) \\ &= (1 \to (1 \leftrightarrow -1)) = (1 \to -1) = -1 \end{aligned}$$

ile aynı sonucu elde ederiz. Hesaplamalarda daima altformüllerin seviyelerinin artış yönü kullanılacaktır.

2.4.2 Hepdoğrular ve Çelişkiler

Herhangi bir φ formülümüz için üç durum söz konusudur: Formülümüz her yorumda doğrudur veya formülümüz her yorumda yanlıştır, ya da formülümüz bazı yorumlarda doğru bazılarında ise yanlıştır. Bu üç durum birbirini dışlar ve biz özellikle ilk iki durumla ilgileneceğiz.

Tanım 2.4.8 *φ formül olsun.*

1. *φ bir* ***hepdoğrudur*** $:\Longleftrightarrow$ *Her $d \in {}^{P}\mathbf{2}$ için $d(\varphi) = 1$.*
2. *φ bir* ***çelişkidir*** $:\Longleftrightarrow$ *Her $d \in {}^{P}\mathbf{2}$ için $d(\varphi) = 0$.*
3. *φ* ***sağlanabilir*** $:\Longleftrightarrow$ *En az bir $d \in {}^{P}\mathbf{2}$ için $d \models \varphi$.*

φ bir hepdoğrudur yerine φ ***mantıksal geçerlidir*** *veya φ bir* ***totolojidir*** *de denir ve φ'nin bir hepdoğru olduğu kısaca $\models \varphi$ veya $hd(\varphi)$ ile gösterilir. Çelişki yerine* ***hepyanlış*** *veya* ***tutarsız*** *da diyeceğiz.*

Sağlanabilir olmayan formüllere **sağlanamaz** dersek bu formüller çelişkili formüllerle örtüşür. Bu tanımlarla φ'nin bir hepdoğru olması için gvyk $\neg\varphi$'nin sağlanamaz, dd. bir çelişki olmasıdır. Yine φ'nin bir çelişki olması $\neg\varphi$'nin hepdoğru olması ile eş anlamlıdır. $\top$ bir hepdoğru, $\bot$ ise bir hepyanlıştır. Benzer biçimde her ψ formülü için $\psi \curlyvee \neg\psi$ bir hepdoğru, $\psi \curlywedge \neg\psi$ ise bir çelişkidir. (2.4.3)'te gösterildiği gibi $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \neg\psi)$ de bir hepdoğrudur. Her yorumda $d(\bot) = 0$ olduğundan $\bot \to \varphi$ bir hepdoğrudur.

Bize verilen herhangi bir φ formülünün bir hepdoğru olup olmadığını hep belirleyebiliriz. $\deg(\varphi) = \{p_1, \ldots, p_n\}$ olsun. Bir d yorumu için $d(\varphi)$'yi hesaplamak istediğimizde (2.4.6)'dan dolayı salt $d|\{p_1, \ldots, p_n\}$'yi bilmek yeterlidir. $\{p_1, \ldots, p_n\}$ kümesinden $\{0, 1\}$ kümesine 2^n farklı fonksiyon olduğundan bunların herhangi bir biçimde P'ye genişletilmişi olan 2^n yorum için $d(\varphi)$'yi hesaplamak yeterlidir. Örneğin bu işi $\neg p \curlyvee q$, $\neg(\neg p \curlyvee \neg q)$, $p \to p \curlyvee q$, $\neg(\neg p \curlywedge \neg q)$ ve $(p \to q) \to q$ formülleri için yapalım. Burada iki değişken söz konusu olduğundan 2^2 değerleme incelemek yeterlidir.

p	q	$\neg p \curlyvee q$	$\neg(\neg p \curlyvee \neg q)$	$p \to p \curlyvee q$	$\neg(\neg p \curlywedge \neg q)$	$(p \to q) \to q$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0

Böyle bir tabloya söz konusu formüllerin **doğruluk tablosu** denir. Bir formülün bir hepdoğru olması formülün bulunduğu sütunda hep 1 değerinin bulunması demektir. Örneğimizde $p \to p \curlyvee q$ bir hepdoğrudur. Bu tablodaki bir noktaya işaret etmekte yarar var: $\neg p \curlyvee q$ ile $p \to q$, $\neg(\neg p \curlyvee \neg q)$ ile $p \curlywedge q$, $\neg(\neg p \curlywedge \neg q)$ ve $(p \to q) \to q$ formüllerinin her birinin $p \curlyvee q$ ile aynı doğruluk tablolarına sahip olduklarını görüyoruz. Bunun bir anlamı şudur: $\to$ işlemcisi $\neg, \curlyvee$ işlemcileri, $\curlywedge$ işlemcisi $\neg, \curlyvee$ işlemcileri ve $\curlyvee$ işlemcisi ise $\neg$, $\curlywedge$ işlemcileri veya salt $\to$ ile tanımlanabilir.

Ancak 2^n doğal sayısı n ile birlikte çok hızlı büyür. Bazı durumlarda baştan yapılan irdelemeler doğruluk tablosunun küçük bir kısmını irdelemeyi yeterli kılar. Örneğin

$$(\varphi \to \psi) \curlywedge (\psi \to \eta) \to (\varphi \to \eta)$$

formülünün bir hepdoğru olduğunu savunuyoruz. Bu formülün doğruluk değeri $d(\varphi)$, $d(\psi)$ ve $d(\eta)$ doğruluk değerlerine bağlıdır. Dolayısıyla formülümüze ilişkin doğruluk tablosu 2^3 satırlıktır. Biz ise formülümüzün hepdoğru

olduğunu savunuyoruz. Öyleyse hiçbir yorumda yanlış olamayacağını göstermek yeterlidir. Önermemiz ancak öncülü doğru iken $\varphi \to \eta$ savı yanlışsa yanlıştır. Bu durumda $\varphi \to \eta$ önermesinin yanlış olduğu durumları irdelemek yeterlidir; bu ise salt $d(\varphi) = 1$ ve $d(\eta) = 0$ durumuna bakmak demektir. İncelememiz gereken satır sayısını sekizden aşağıdaki ikiye indirgemiş olduk: $\psi_1 := (\varphi \to \psi)$, $\psi_2 := (\psi \to \eta)$ ve $\psi_3 := (\varphi \to \eta)$ olmak üzere

$d(\varphi)$	$d(\eta)$	$d(\psi)$	ψ_1	ψ_2	ψ_3	$\psi_1 \curlywedge \psi_2$	$\psi_1 \curlywedge \psi_2 \to \psi_3$
1	0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1

İncelememiz gereken her iki durumda da önermemiz doğru olduğundan formülümüz gerçekten de bir hepdoğrudur.

Hepdoğrular bizim için çok önemlidir, bunu ileride kuramların teoremlerini tanımlarken öğreneceğiz. Bu nedenle belli başlı hepdoğruların bir listesini vereceğiz. Onların büyük bir kısmı kanıtlarda kullanacağımız yöntemler verirler.

Bazı Temel Hepdoğrular

(Hd1) $\neg\varphi \curlyvee \varphi$, $\varphi \to \varphi$.

(Hd2) $\varphi \curlyvee \varphi \to \varphi$

(Hd3) $\neg(\varphi \curlywedge \neg\varphi)$.

(Hd4) $\neg(\varphi \leftrightarrow \neg\varphi)$.

(Hd5) $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$.

(Hd6) $\varphi \curlywedge (\varphi \to \psi) \to \psi$.

(Hd7) $\neg\psi \curlywedge (\varphi \to \psi) \to \neg\varphi$.

(Hd8) $\varphi \to \varphi \curlyvee \psi$, $\varphi \to \psi \curlyvee \varphi$.

(Hd9) $\varphi \curlywedge \psi \to \varphi$, $\varphi \curlywedge \psi \to \psi$.

(Hd10) $(\varphi \to \psi) \curlywedge (\psi \to \eta) \to (\varphi \to \eta)$.

(Hd11) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$.

(Hd12) $(\varphi \to \psi) \curlywedge \neg\psi \to \neg\varphi$.

(Hd13) $(\varphi \curlyvee \psi) \curlywedge \neg\psi \to \varphi$.

(Hd14) $(\varphi \to (\psi \to \eta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \eta)$

(Hd15) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

(Hd16) $\varphi \curlyvee \psi \to \psi \curlyvee \varphi$.

(Hd17) $(\varphi \to \psi) \to ((\eta \curlyvee \varphi) \to (\eta \curlyvee \psi))$.

Bu hepdoğruların bir çoğunun adları vardır. Örneğin (Hd1) *üçüncünün olmazlığını* (**tertium non datur**), (Hd5) *yanlış kuralı (yanlıştan her şey*

çıkar) (**regula falsi**) kuralını, (Hd6) *ayırma* (**modus ponens**) kuralını, (Hd10) *zincirleme çıkarım kuralını* dile getirirler.

Not 2.4.9 (Hd14)-(Hd17) hepdoğruları, önermeler mantığının ilksavları olarak seçilebilirler. ▲

Teorem 2.4.10 (Ayırma Teoremi) *φ ve $\varphi \to \psi$ birer hepdoğru iseler ψ de bir hepdoğrudur, dd.*

$$\models \varphi \text{ ve } \models (\varphi \to \psi) \text{ ise } \models \psi.$$

Kanıt. Her d yorumu için koşullarımızdan $d(\varphi) = 1$ ve $d(\varphi) \leq d(\psi) \leq 1$ olduğundan $d(\psi) = 1$ olur ve işimiz biter. ■

2.4.3 Mantıksal Denklik

Tanım 2.4.11 *$\varphi, \psi \in$ Omf olmak üzere her d yorumu için $d(\varphi) = d(\psi)$ ise φ ve ψ formüllerimiz **mantıksal olarak denktir** diyecek ve bu durumu, $\equiv \notin$ Sz A varsayarak, $\varphi \equiv \psi$ ile göstereceğiz.*

Formüllerin eşitliği ve mantıksal denklikleri birbirinden tümüyle farklı kavramlardır. Örneğin $\varphi := (p \to q)$ ve $\psi := (\neg q \to \neg p)$ olmak üzere $\varphi \neq \psi$, ancak $\varphi \equiv \psi$. Her şeyden önce $\equiv$ bağıntısı Omf kümesinde bir denklik bağıntısıdır. Gerçekten de tanımın doğrudan sonucu olarak her $\varphi, \psi, \eta \in$ Omf için

- $\varphi \equiv \varphi$.
- $\varphi \equiv \psi$ ise $\psi \equiv \varphi$.
- $\varphi \equiv \psi$ ve $\psi \equiv \eta$ ise $\varphi \equiv \eta$.

Diğer yandan açıkça $\psi \equiv \top$ "ψ bir hepdoğrudur" ve $\psi \equiv \bot$ ise "ψ bir çelişkidir" anlamına gelir. *$\varphi \equiv \psi$ olması için gerek ve yeter koşul $\varphi \leftrightarrow \psi$'nin bir hepdoğru olmasıdır, dd.*

$$\varphi \equiv \psi \Longleftrightarrow hd(\varphi \leftrightarrow \psi) \Longleftrightarrow \models (\varphi \leftrightarrow \psi).$$

$\equiv \notin A$ olduğundan $\varphi \equiv \psi$ ifadesi A abecesinin bir sözcüğü değildir; $\equiv$ imi A hakkında sözeden dile ait bir sözeden imdir. $\varphi \equiv \psi$ durumunda φ'nin doğru olduğunu göstermek ψ'nin doğru olduğunu göstermeye denktir. Bundan sıkça yararlanılır; bu nedenle mantıksal denk önermeleri bilmek önemlidir. $\equiv$ imi *tüm mantık imlerinden daha zayıf* bağlayacaktır. Bu demektir ki herhangi bir ifadede $\equiv$ iminin solundakilerin tümü bir φ formülü, sağındakilerin

tümü bir ψ formülü olarak alınacak ve bu imle bu iki formülün mantıksal denkliği ileri sürülecektir. Örneğin $\varphi \curlywedge (\psi \curlywedge \eta) \equiv (\varphi \curlywedge \psi) \curlywedge \eta$ yazdığımızda kast edilen $\varphi \curlywedge ((\psi \curlywedge \eta) \equiv (\varphi \curlywedge \psi)) \curlywedge \eta$ değil $(\varphi \curlywedge (\psi \curlywedge \eta)) \equiv ((\varphi \curlywedge \psi) \curlywedge \eta)$ olacaktır.

Bazı Temel Denklikler

(D1)	$\varphi \curlywedge \psi \equiv \psi \curlywedge \varphi$	$\varphi \curlyvee \psi \equiv \psi \curlyvee \varphi.$
(D2)	$\varphi \curlywedge (\psi \curlywedge \eta) \equiv (\varphi \curlywedge \psi) \curlywedge \eta$	$\varphi \curlyvee (\psi \curlyvee \eta) \equiv (\varphi \curlyvee \psi) \curlyvee \eta.$
(D3)	$\varphi \curlywedge \varphi \equiv \varphi$	$\varphi \curlyvee \varphi \equiv \varphi.$
(D4)	$\varphi \curlywedge (\psi \curlyvee \eta) \equiv (\varphi \curlywedge \psi) \curlyvee (\varphi \curlywedge \eta)$	$\varphi \curlyvee (\psi \curlywedge \eta) \equiv (\varphi \curlyvee \psi) \curlywedge (\varphi \curlyvee \eta).$
(D5)	$\varphi \curlywedge (\varphi \curlyvee \psi) \equiv \varphi$	$\varphi \curlyvee (\varphi \curlywedge \psi) \equiv \varphi.$
(D6)	$\varphi \curlywedge \neg\varphi \equiv \bot$, $\neg\bot \equiv \top$	$\varphi \curlyvee \neg\varphi \equiv \top$, $\neg\top \equiv \bot$, $\neg\neg\varphi \equiv \varphi.$
(D7)	$\neg(\varphi \curlywedge \psi) \equiv \neg\varphi \curlyvee \neg\psi$	$\neg(\varphi \curlyvee \psi) \equiv \neg\varphi \curlywedge \neg\psi.$

(D8) $\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \curlyvee \psi$, $\neg\varphi \to \psi \equiv \varphi \curlyvee \psi.$

(D9) $\neg(\varphi \to \neg\psi) \equiv \varphi \curlywedge \psi.$

(D10) $(\varphi \to \psi) \curlywedge (\psi \to \varphi) \equiv \varphi \leftrightarrow \psi.$

(D11) $\varphi \to \psi \equiv \neg\psi \to \neg\varphi.$

(D12) $\neg(\varphi \to \psi) \equiv \varphi \curlywedge \neg\psi.$

(D13) $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv \psi \leftrightarrow \varphi.$

(D14) $\varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \eta) \equiv (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \eta.$

(D15) $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv \neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi.$

(D16) $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \curlywedge \psi) \curlyvee (\neg\varphi \curlywedge \neg\psi).$

Not 2.4.12 Bize bir X kümesi verilmiş olsun. (D1)-(D8) denkliklerinde φ, ψ, η formülleri yerine X kümesinin A, B, C altkümelerini alalım ve o formüllerdeki mantıksal imleri aşağıdaki gibi Kümeler Kuramı imleriyle değiştirelim:

Önermeler Mantığı	$\curlyvee$	$\curlywedge$	$\neg$	$\equiv$	$\top$	$\bot$
Kümeler Kuramı	$\cup$	$\cap$	^{c}	$=$	X	$\emptyset$

Bu durumda (D1)-(D8) denklikleri kümeler için bildik eşitliklere dönüşürler:

(D1) $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$.
(D2) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
(D3) $A \cap A = A$, $A \cup A = A$.
(D4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
(D5) $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$.
(D6) $A \cap A^c = \emptyset$, $\emptyset^c = X$, $A \cup A^c = X$, $X = \emptyset^c$.
(D7) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
(D8) $(A^c)^c = A$.

Bu ilksavlarla $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, ^c)$ bir Boole cebiridir. Herhangi bir kümede $\curlyvee$ ve $\curlywedge$ imleri, 2-li işlemciler ve $\neg$ 1-li işlemci olarak düşünülür, tüm "$\equiv$" imleri yerine "$=$" imi, $\top$ yerine 1, ve $\bot$ yerine 0 yazılırsa (D1)-(D8) Boole cebirlerinin aksiyomlarına dönüşürler. (D2)'den dolayı $\equiv$ bağıntısı söz konusu olduğunda $\varphi \curlywedge (\psi \curlywedge \eta)$ ve $(\varphi \curlywedge \psi) \curlywedge \eta$ yerine yalın biçimde $\varphi \curlywedge \psi \curlywedge \eta$ ayrıca $\varphi \curlyvee (\psi \curlyvee \eta)$ ve $(\varphi \curlyvee \psi) \curlyvee \eta$ yerine ise $\varphi \curlyvee \psi \curlyvee \eta$ yazılır. Son kez uyaralım:

$$\varphi \curlywedge (\psi \curlywedge \eta) \neq (\varphi \curlywedge \psi) \curlywedge \eta \text{ ve}$$
$$\varphi \curlywedge (\psi \curlywedge \eta) \equiv (\varphi \curlywedge \psi) \curlywedge \eta.$$

Öğrencilerde sıkça karşılaşılan bir yanlış $\neg (\varphi \Rightarrow \psi) \equiv \neg\varphi \Rightarrow \neg\psi$ olduğunu düşünmeleridir. ▲

2.4.4 Yerine Koyma ve Yer Değiştirme

Bu alt bölümde iki işlemin sonuçlarını tartışacağız.

Yerine Koyma: Bir φ formülündeki bir p değişkeni yerine, *geçtiği her yerde* bir ψ formülü koyma: $\boldsymbol{\varphi(p|\psi)}$, daha önce tanımladık.

Yer Değiştirme: Bir φ formülünün bir ψ altformülünü, *geçtiği bazı yerlerde* (her yerde de olabilir) aynı ψ' formülü ile değiştirmek. Bu işlemin sonucunu $\boldsymbol{\varphi(\psi|_k\psi')}$ ile gösterelim ve bunu "φ'nin ψ altformülü kısmen ψ' ile değiştirilmiştir" diye okuyalım. Buradaki çok anlamlılık, aynı önerme içinde aynı değişimler anlaşıldığında bir sorun yaratmaz.

Teorem 2.4.13 (Yerine Koyma Teoremi) *φ bir hepdoğru ise $\varphi(p|\psi)$ de bir hep doğrudur, dd.*

$$\models \varphi \text{ ise } \models \varphi(p|\psi).$$

Kanıt. φ bir hepdoğru olsun. d yorumu verildiğinde d' yorumu $P\backslash\{p\}$'de d ile çakışsın ve $d'(p) := d(\psi)$ olarak açıklansın. Bu durumda formüller üzerinden tümevarımla kolayca $d(\varphi(p|\psi)) = d'(\varphi) = 1$ olur ve işimiz biter. ■

$\{p_1, \ldots, p_n\} \subseteq \deg\varphi$ olsun. $i = 1, \ldots, n$ olmak üzere p_i yerine φ formülünde *geçtiği her yerde* ψ_i formülünü koyarak elde ettiğimiz formülü $\varphi(p_1|\psi_1, \ldots, p_n|\psi_n)$ ile gösterelim. Herhangi bir d değerlemesi verildiğinde bu kez d' değerlemesini $P\setminus\{p_1, \cdots, p_n\}$ kümesinde d ile çakışacak ve $d'(p_i) = d(\psi_i)$ olacak biçimde seçersek

$$d(\varphi(p_1|\psi_1, \ldots, p_n|\psi_n)) = d'(\varphi)$$

olacağından aşağıdaki teorem aşikârdır.

Teorem 2.4.14 *φ bir hepdoğru ise $\varphi(p_1|\psi_1, \ldots, p_n|\psi_n)$ de bir hepdoğrudur.*

Önerme 2.4.15 *$\varphi \equiv \varphi'$ ve $\psi \equiv \psi'$ ise*

1. $\neg\varphi \equiv \neg\varphi'$.
2. $\varphi \diamondsuit \psi \equiv \varphi' \diamondsuit \psi'$, $\diamondsuit \in J_2$.

Kanıt. 1. Her d yorumunda $d(\varphi) = d(\varphi')$ olduğundan $d(\neg\varphi) = 1 - d(\varphi) = 1 - d(\varphi') = d(\neg\varphi')$ olur.

2. $\diamondsuit \in J_2$, örneğin $\diamondsuit = \curlyvee$ olsun. $d(\varphi) = d(\varphi')$ ve $d(\psi) = d(\psi')$ bağıntıları ve doğruluk değeri tanımlarından

$$d(\varphi \curlyvee \psi) = d(\varphi) \vee d(\psi) = d(\varphi') \vee d(\psi') = d(\varphi' \curlyvee' \psi)$$

olur. Diğer $\diamondsuit \in J_2$ işlemleri için benzer biçimde kanıtlanır. ■

Not 2.4.16 Bu önerme bize $\equiv$ bağıntısının Omf kümesinde yalnızca bir denklik bağıntısı değil aslında Omf'de $\curlyvee$, $\curlywedge$, $\neg$ işlemleriyle uyumlu, dd. bir benzeşme (kongrüans) olduğunu söyler. Dolayısıyla (Omf / $\equiv, \curlyvee, \curlywedge, \neg$) bölüm uzayı bir Boole cebiridir. ▲

φ formülünün ψ altformülünü geçtiği bazı yerlerde ψ' formülüyle değiştirerek elde ettiğimiz bir formülü $\varphi(\psi|_k\psi')$ ile göstermiştik. $\varphi' := \varphi(\psi|_k\psi')$ olarak tanımlansın. $\psi \equiv \psi'$ seçilirse her d değerlemesinde $d(\psi) = d(\psi')$ olacağından $d(\varphi) = d(\varphi')$ olacağı apaçıktır. Başlangıçta çoğu şey aşikârdır; yine de kanıt gerektirir.

Teorem 2.4.17 (Yer Değiştirme Teoremi) *$\psi \equiv \psi'$ ise $\varphi \equiv \varphi(\psi|_k\psi')$.*

Kanıt. $\varphi' := \varphi(\psi|_k\psi')$ olsun. Önermemizi FTK ile kanıtlayacağız.

1. $\varphi = p \in P$ olsun. Bu durumda φ'nin yegane altformülü kendisi olduğundan $\psi = \varphi$ ve $\psi' = \varphi'$ olacağından sav aşikârdır.

2. Sav η için kanıtlanmış ve $\varphi := \neg\eta$ olsun. $\operatorname{alf}\varphi = \operatorname{alf}(\eta) \cup \{\varphi\}$. $\psi = \varphi$ ise $\varphi' = \varphi(\varphi|_k\psi') = \psi'$ olacağından $\varphi \equiv \psi \equiv \psi' \equiv \varphi'$ elde edilir. Şimdi $\psi \in \operatorname{alf}(\eta)$ olsun. Tümevarım koşulundan $\eta' := \eta(\psi|_k\psi') \equiv \eta$. Buradan (2.4.15) ile $\varphi = \neg\eta \equiv \neg\eta' = \varphi'$.

3. $\Diamond \in J_2$ olmak üzere $\varphi = \varphi_1\Diamond\varphi_2$ ve savımız φ_1, φ_2 formüllerimiz için kanıtlanmış olsun. $\psi \in \operatorname{alf}\varphi$ olsun. $\psi = \varphi$ durumu daha önceki şıkta olduğu gibi halledilir. $\psi \neq \varphi$ ise $\psi \in \operatorname{alf}(\varphi_1) \cup \operatorname{alf}(\varphi_2)$ olduğundan tümevarım koşulundan $\varphi_k \equiv \varphi_k(\psi|_k\psi') =: \varphi'_k$, $k = 1, 2$. Buradan yine (2.4.15)ile

$$\varphi' = \varphi'_1\Diamond\varphi'_2 \equiv \varphi_1\Diamond\varphi_2 = \varphi.$$

elde edilir ve bkb. ■

Önerme 2.4.18 *Her $\varphi \in$ Omf formülüne karşılık $\to$ ve $\leftrightarrow$ imlerini içermeyen, dd. içerdiği mantık imleri $\neg, \curlyvee$ ve $\curlywedge$ imleri olabilen bir ψ formülü $\varphi \equiv \psi$ olabilecek biçimde vardır.*

Kanıt. $\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \curlyvee \beta$ ve $(\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv (\alpha \to \beta) \curlywedge (\beta \to \alpha)$ olduğundan yapılacak tek şey φ'nin $\alpha \to \beta$ tipindeki her altformülünü geçtiği her yerde $\neg\alpha \curlyvee \beta$ ile değiştirmektir. Böylece elde edilen formüle ψ dersek (2.4.17) ile $\varphi \equiv \psi$ olur. ■

Yalnızca $\curlyvee$, $\curlywedge$ ve $\neg$ mantık imlerini içeren formüllere **Boole formülleri** dersek, (2.4.18) bize her φ formülünün bir ψ Boole formülüne denk olduğunu söyler.

Örnek 2.4.19 $\varphi \curlywedge (\varphi \to \psi) \to \psi$ (Hd6) hepdoğrusunu yalnızca $\curlyvee$, $\curlywedge$ ve $\neg$ içeren denk bir formüle dönüştürelim.

$$\begin{aligned}\top &\equiv \varphi \curlywedge (\varphi \to \psi) \to \psi \equiv \varphi \curlywedge (\neg\varphi \curlyvee \psi) \to \psi \\ &\equiv \neg(\varphi \curlywedge (\neg\varphi \curlyvee \psi)) \curlyvee \psi.\end{aligned}$$

▲

2.4.5 İkililik İlkesi

Boole cebirlerinin ilksavları olan (D1)–(D8)'i iki sütün olarak verdik. Bunlardan (D8)'deki $\varphi \equiv \neg\neg\varphi$'yi bir kenara ayırırsak sağ sütundaki denklikler sol sütundakilerden $\curlyvee$ yerine $\curlywedge$, $\curlywedge$ yerine $\curlyvee$, $\top$ yerine $\bot$ ve son olarak $\bot$

yerine $\top$ yazarak elde edilirler. Tersine sol sütundakiler de sağ sütundakilerden aynı biçimde elde edilirler. Herhangi bir Boole cebirinde genel olarak $\neg$ yerine $'$, $\top$ yerine 1 ve $\bot$ yerine 0 yazılır. $(B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ herhangi bir Boole cebiri olmak üzere önemli Boole cebirlerimizin **ikili kavramlarını** verelim:

$(B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$				$(\mathrm{Omf}, \curlyvee, \curlywedge, \neg, \bot, \top)$				$(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, ^c, \emptyset, X)$			
$\vee$	$\wedge$	0	1	$\curlyvee$	$\curlywedge$	$\bot$	$\top$	$\cup$	$\cap$	$\emptyset$	X
$\wedge$	$\vee$	1	0	$\curlywedge$	$\curlyvee$	$\top$	$\bot$	$\cap$	$\cup$	X	$\emptyset$

Burada birinci satırdaki kavramların ikilileri ikinci satırda kendilerinin tam altına yazılmıştır.

Boole cebirinin ilksavlarının bu ikili yapısının bir sonucu **ikililik ilkesidir**: *Boole cebirlerine ilişkin bir teoremde her kavram ikilisiyle değiştirildiğinde yine Boole cebirlerine ilişkin, ilkinin ikilisi diyeceğimiz bir teorem elde edilir.* Bu iki önermeden birini kanıtlamak yeterlidir. Diğerinin kanıtı, verilen ilk kanıtta her bir im ikilisi ile değiştirilerek elde edilir.

Örnek 2.4.20 Örneğin bu işlemle

$$\varphi \curlywedge (\psi \curlyvee \eta) \equiv (\varphi \curlywedge \psi) \curlyvee (\varphi \curlywedge \eta)$$

denkliği bize

$$\varphi \curlyvee (\psi \curlywedge \eta) \equiv (\varphi \curlyvee \psi) \curlywedge (\varphi \curlyvee \eta)$$

denkliğini ve $\varphi \curlyvee \neg\varphi \equiv \top$ ise $\varphi \curlywedge \neg\varphi \equiv \bot$ denkliğini verir. Bunlara birbirinin **ikilisi** (**duali**) denir. $\varphi \equiv \neg\neg\varphi$'nin duali kendisidir. ▲

Şimdi önermeler mantığına ilişkin (A) ve onun $\mathcal{P}(X)$ Boole cebirindeki karşılığı olan (B) teoremleri şunlar olsun:

(A): Her $\varphi, \psi \in \mathrm{Omf}$ için $\top \equiv \neg(\varphi \curlywedge (\neg\varphi \curlyvee \psi)) \curlyvee \psi$.

(B): Her $A, B \in \mathcal{P}(X)$ için $X = (A \cap (A^c \cup B))^c \cup B$.

Bunların (A_i) ve (B_i) ikilileri aşağıdadır:

(A_i): Her $\varphi, \psi \in \mathrm{Omf}$ için $\bot \equiv \neg(\varphi \curlyvee (\neg\varphi \curlywedge \psi)) \curlywedge \psi$.

(B_i): Her $A, B \in \mathcal{P}(X)$ için $\emptyset = (A \cup (A^c \cap B))^c \cap B$.

(B) ve (B_i) okuyucunun alışık olduğu türden önermelerdir ve onların kanıtında zorlanmaz. Ancak bu kanıtlar özünde (A) ve (A_i)'nin kanıtlarından başka bir şey değildir. Örnek olmak üzere (A_i)'nin kanıtını vereceğiz.

Her şeyden önce her η formül için

$$\eta \curlyvee \top \equiv \top,\ \eta \curlywedge \top \equiv \eta,\ \eta \curlyvee \bot \equiv \eta \text{ ve } \eta \curlywedge \bot \equiv \bot \tag{2.14}$$

olduğu apaçıktır. (A_i) önermesinde denkliğin sağındaki formüle κ dersek $\bot \equiv \kappa$ olduğu, dd. κ'nın bir çelişki olduğu doğruluk tablosuyla gösterilebilir. Aslında az yukarıda (A) önermesinin (Hd6) hepdoğrusuna denk olduğunu gösterdik. Bu durumda κ'nın bir çelişki olduğu apaçıktır. Ancak biz burada bu tip önermelerin doğruluk tablosu kullanmadan da gösterilebileceğini örneklemek istiyoruz. Şimdi denkliklerden yararlanarak

$$\begin{aligned}
&\neg(\varphi \curlyvee (\neg\varphi \curlywedge \psi)) \curlywedge \psi \equiv \neg((\varphi \curlyvee \neg\varphi) \curlywedge (\varphi \curlyvee \psi)) \curlywedge \psi \\
&\equiv \neg(\top \curlywedge (\varphi \curlyvee \psi)) \curlywedge \psi \equiv \neg(\varphi \curlyvee \psi) \curlywedge \psi \\
&\equiv (\neg\varphi \curlywedge \neg\psi) \curlywedge \psi \equiv \neg\varphi \curlywedge (\neg\psi \curlywedge \psi) \\
&\equiv \neg\varphi \curlywedge \bot \equiv \bot.
\end{aligned}$$

elde ederiz ve işimiz biter. Burada sırasıyla birinci denklikte (D4), ikincide (D6), üçüncüde (2.14), dördüncüde (D7), beşincide (D2), altıncıda (D6) ve son denklikte (2.14) kullanılmıştır.

Tanım 2.4.21 *FYT ile her φ Boole formülü için* ***φ'nin ikilisi*** *diyeceğimiz bir $\Delta\varphi$ Boole formülü aşağıdaki koşulları sağlayacak biçimde tek türlü tanımlanabilir:*

1. *Her $p \in P$ için $\Delta p = p$.*
2. *Her $\varphi \in$ Omf için $\Delta\neg\varphi = \neg\Delta\varphi$.*
3. *Her $\varphi, \psi \in$ Omf için $\Delta(\varphi \curlyvee \psi) = \Delta\varphi \curlywedge \Delta\psi$.*
4. *Her $\varphi, \psi \in$ Omf için $\Delta(\varphi \curlywedge \psi) = \Delta\varphi \curlyvee \Delta\psi$.*

Örnek olarak $p, q \in P$ olmak üzere $\varphi = \varphi(p, q) = p \curlyvee q$ olsun.

$$\Delta\varphi = \Delta(p \curlyvee q) = \Delta p \curlywedge \Delta q = p \curlywedge q$$

olur. Buradan

$$p \curlywedge q \equiv \neg\neg p \curlywedge \neg\neg q \equiv \neg(\neg p \curlyvee \neg q) \equiv \neg\varphi(\neg p, \neg q)$$

ile

$$\Delta\varphi(p, q) \equiv \neg\varphi(\neg p, \neg q)$$

elde ederiz. Şimdi kanıtlayacağımız teorem bu özel durumu genelleştirecektir.

Teorem 2.4.22 (İkililik Teoremi) *İçerdiği mantık imleri en fazla $\neg, \curlyvee$ ve $\curlywedge$ olan her $\varphi(p_1, \ldots, p_n) \in$ Omf için*

$$\Delta\varphi(p_1, \ldots, p_n) \equiv \neg\varphi(\neg p_1, \ldots, \neg p_n).$$

Kanıt. FTK ile kanıtlayacağız. φ bir Boole formülü olsun.

1. $\varphi = p \in P$ olsun. $\varphi = \varphi(p) = p$ olduğundan (2.4.21)(1)'den $\Delta\varphi(p) = \Delta p = p$ ve buradan ise

$$\Delta\varphi(p) = p \equiv \neg\neg p \equiv \neg(\neg p) \equiv \neg\varphi(\neg p).$$

2. $\varphi(p_1, \ldots, p_n) = \neg\psi(p_1, \ldots, p_n)$ ve önerme ψ için kanıtlanmış olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\Delta\varphi(p_1, \ldots, p_n) &\overset{def}{=} \neg\Delta\psi(p_1, \ldots, p_n) \overset{tvk}{\equiv} \neg\neg\psi(\neg p_1, \ldots, \neg p_n)\\ &= \neg\varphi(\neg p_1, \ldots, \neg p_n).\end{aligned}$$

3. $\varphi(p_1, \ldots, p_n) = \varphi_1(p_1, \ldots, p_n) \curlyvee \varphi_2(p_1, \ldots, p_n)$ ve savımız $\varphi_k(p_1, \ldots, p_n)$ $(k = 1, 2)$ için kanıtlanmış olsun. Bu durumda tanımdan dolayı $\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 \curlywedge \Delta\varphi_2$ olduğundan tümevarım koşuluyla

$$\begin{aligned}\Delta\varphi(p_1, \ldots, p_n) &\overset{def}{=} \Delta\varphi_1(p_1, \ldots, p_n) \curlywedge \Delta\varphi_2(p_1, \ldots, p_n)\\ &\overset{tvk}{\equiv} \neg\varphi_1(\neg p_1, \ldots, \neg p_n) \curlywedge \neg\varphi_2(\neg p_1, \ldots, \neg p_n)\\ &\overset{(D7)}{\equiv} \neg(\varphi_1(\neg p_1, \ldots, \neg p_n) \curlyvee \varphi_2(\neg p_1, \ldots, \neg p_n))\\ &= \neg\varphi(\neg p_1, \ldots, \neg p_n).\end{aligned}$$

4. $\varphi = \varphi_1 \curlywedge \varphi_2$ durumu bir önceki gibi halledilir. ■

Bu teorem bize bir φ formülünün değillemesine denk önermeler bulma şansı verir. φ formülünün $\to$ ve $\leftrightarrow$ işlemcilerini içermeyecek durumda verildiğini varsayabiliriz. $\neg\neg p \equiv p$ olduğunundan teoremimizin bir sonucu **De Morgan kuralı**dır:

$$\neg\varphi(p_1, \ldots, p_n) \equiv \Delta\varphi(\neg p_1, \ldots, \neg p_n). \tag{2.15}$$

Önerme 2.4.23 *Bir φ Boole formülündeki her p asal önermesi yerine $\neg p$, $\curlyvee$ yerine $\curlywedge$ ve $\curlywedge$ yerine $\curlyvee$ yazdığımızda elde ettiğimiz formül $\neg\varphi$ formülüne denktir.*

Bu sonuç $\mathcal{P}(X)$ Boole cebirine geçtiğimizde çok tanıdık bir şekle dönüşür. $A \subseteq X$ altkümesi $B_1, \ldots, B_n$ kümelerinin birleşim, arakesit ve tümleyenlerini içeren bir $\phi(B_1, \ldots, B_n)$ ifadesi ile verilmiş olsun. A^c tümleyeni bu ifadede her bir B_k yerine B_k^c tümleyeni, her bir $\cap$ arakesiti yerine $\cup$ birleşimi ve her bir $\cup$ birleşimi yerine $\cap$ arakesiti yazarak bulunur. Bunun en bilinen ve çok kullanışlı iki özel durumu

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ ise } A^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$$
$$B = \bigcap_{i=1}^{n} B_i \text{ ise } B^c = \bigcup_{i=1}^{n} B_i^c$$

Kümeler Kuramı'nın De Morgan kurallarıdırlar.

2.5 Boole Fonksiyonları

Şimdiye kadar biz $\curlyvee, \curlywedge, \to$ ve $\leftrightarrow$ ikili mantık işlemcileri ve $\neg$ birli mantık işlemcisi ile yetindik. Ancak günlük dilimizde fazla sayıda ikili mantıksal ilişkiler var. p ve q iki önerme ve "veya" bizim matematiksel olarak uzlaştığımız "veya" olmak üzere aşağıdaki önermelerin doğruluk tablolarını çıkarınız.

"p değil veya p", "p veya q değil", "p değil veya q değil", "ya p ya q", "ne p ne de q", "p ve q'dan ancak biri", "p ve q'nun ikisi birden değil", "p, ancak q farketmez", "q, ancak p farketmez", "$\neg p$, ancak q farketmez","$\neg q$, ancak p farketmez", "p ve q'dan biri doğruysa diğeri yanlıştır", "p ne ise q da o", "p, q'dan daha az doğru değil", "q, p'den daha az doğru değil" vs...

Diğer yandan (2.4.18)'de $\to$ ve $\leftrightarrow$'den vazgeçebileceğimizi öğrendik. Seçtiğimiz mantık bağlaçlarının yalnızca iki önerme değil sonlu sayıda asal önerme içeren tüm mantıksal ilişkiler için de yeterli olduğunu görmeliyiz.

Her şeyden önce okuyucunun kolayca göreceği şu iki gerçeği not edelim

$$d(\bigvee_{1\leq k\leq n} \psi_k) = d(\psi_1 \curlyvee \cdots \curlyvee \psi_n) = \max_{1\leq k\leq n} d(\psi_k) \tag{2.16}$$

$$d(\bigwedge_{1\leq k\leq n} \psi_k) = d(\psi_1 \curlywedge \cdots \curlywedge \psi_n) = \min_{1\leq k\leq n} d(\psi_k) \tag{2.17}$$

$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ herhangi bir tam eşleme olmak üzere (2.16) ve (2.17)'den

$$\bigvee_{1\leq k\leq n} \psi_k \equiv \bigvee_{1\leq k\leq n} \psi_{\sigma(k)} \text{ ve } \bigwedge_{1\leq k\leq n} \psi_k \equiv \bigwedge_{1\leq k\leq n} \psi_{\sigma(k)} \tag{2.18}$$

elde edilir. Herhangi bir incelemede denk formüllere aynı gözü ile bakabiliyorsak $\bigvee_{1\leq k\leq n} \psi_{\sigma(k)}$ ve $\bigwedge_{1\leq k\leq n} \psi_{\sigma(k)}$ yerine bunlardan herhangi birini göstermek üzere

$$\bigvee_{k\in\{1,\ldots,n\}} \psi_k \text{ ve } \bigwedge_{k\in\{1,\ldots,n\}} \psi_k \tag{2.19}$$

yazacağız. $S \subseteq P$ sonlu bir altküme olsun. S kümesinin öğelerini herhangi bir biçimde $p_1, \ldots, p_n$ olarak sıralayalım. Her $\varphi \in \text{Omf}$ formülüne aşağıdaki gibi bir $f^S_\varphi : \mathbf{2}^n \to \mathbf{2}$ fonksiyonu karşılık getireceğiz.

Tanım 2.5.1 $\varphi \in \text{Omf}$ *için* $f^S_\varphi : \mathbf{2}^n \to \mathbf{2}$ *fonksiyonu*

$$f^S_\varphi(a) := \varphi[a],\ a \in {}^P\mathbf{2}.$$

olarak tanımlansın. Söz konusu S belli ise f_φ^S yerine yalın biçimde f_φ yazacağız.

Şimdi $\deg\varphi \subseteq S \subseteq T$ olsun. S ve T sonlu kümelerinin öğeleri sırasıyla $p_1,\dots,p_n$ ve $p_1,\dots,p_n,p_{n+1},\dots,p_r$ olarak sıralansın. Bu durumda

$$Her\ a \in \mathbf{2}^n\ ve\ her\ y \in \mathbf{2}^{r-n}\ için\ f_\varphi^S(a) = f_\varphi^T(a,y)$$

olduğu apaçıktır. Bu ise salt $S = \deg\varphi$ durumunu bilmenin yeterli olduğunu söyler.

Aşağıdaki incelemelerde sonlu $S = \{p_1,\dots,p_n\}$ kümesini verilmiş ve sabit tutulsun. $a = (a_1,\dots,a_n)$ ve d ise $d(p_k) = a_k$ koşulunu sağlayan herhangi bir değerleme ise $f_\varphi(a) = \varphi[a] = d(\varphi)$ olduğunu anımsatalım. Bu nedenle $\deg\varphi = \deg\psi$ olmak üzere

$$\varphi \equiv \psi \iff f_\varphi = f_\psi \tag{2.20}$$

olduğu apaçıktır. Yine $\eta := \bigvee_{1\le k\le n}\psi_k$ ve $\gamma := \bigwedge_{1\le k\le n}\psi_k$ için

$$f_\eta = \max_{1\le k\le n} f_{\psi_k} \text{ ve } f_\gamma = \min_{1\le k\le n} f_{\psi_k} \tag{2.21}$$

olduğunu görmeyi alıştırma olarak bırakıyoruz. Bizi asal önermelerin ne oldukları değil yalnızca onların doğruluk değerleri ilgilendirdiğinden biz önermeler mantığında aslında Omf ile değil

$$\{f_\varphi \mid \varphi \in \mathrm{Omf}\} \subseteq \{f \mid f : \mathbf{2}^n \to \mathbf{2}\} =: \mathbb{B}_n$$

ile ilgileniriz.

Tanım 2.5.2 *$f : \mathbf{2}^n \to \mathbf{2}$ fonksiyonlarına n-değişkenli **Boole fonksiyonları** veya **doğruluk fonksiyonları** denir. Bunların kümesini $\mathbb{B}_n$ ile gösterelim.*

$|\mathbb{B}_n| = 2^{2^n}$ olduğundan $|\mathbb{B}_1| = 4$, $|\mathbb{B}_2| = 16$, $|\mathbb{B}_3| = 2^8$ ve bu sayılar hızla büyür. Biz ise beş temel formülden yola çıktık. Bunlar sırasıyla $\neg p$, $p \curlyvee q$, $p \curlywedge q$, $p \to q$ ve $p \leftrightarrow q$. Bunlara karşılık gelen Boole fonksiyonlarını sırasıyla $f_\neg$, $f_\curlyvee$, $f_\curlywedge$, $f_\to$ ve $f_\leftrightarrow$ ile gösterelim. $\mathbb{B}_2$'ye ait $f_\curlyvee$, $f_\curlywedge$, $f_\to$ ve $f_\leftrightarrow$ fonksiyonlarını biliyoruz (bkz. (2.13)); özdeş olarak 0 ve özdeş olarak 1 değerini alan sabit fonksiyonları da çıkardıktan sonra kalan diğer onu aşağıdakilerdir.

x	y	f_1	f_2	$f_\triangledown$	$f_{\neg 1}$	$f_{\neg 2}$	$f_{1\neg 2}$	$f_{2\neg 1}$	$f_\downarrow$	$f_\leftarrow$	$f_\uparrow$
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1

(2.22)

Listedeki her f_* için $f_\varphi = f_*$ olacak biçimde yalnızca $\neg$, $\curlyvee$ ve $\curlywedge$ mantıksal imlerini içeren φ formüllerini bulmayı alıştırma olarak bırakıyoruz. Fonksiyonlarımıza isimleri bu formülleri bulmanızı kolaylaştıracak biçimde verdik. Bunlardan üçünün isimleri vardır:

Dışlayan veya : $p \nabla q$. $d(p \nabla q) := f_\nabla(d(p), d(q))$.

nor (Peirce, Schröder): $p \downarrow q$. $d(p \downarrow q) := f_\downarrow(d(p), d(q))$.

nand (Sheffer): $p \uparrow q$. $d(p \uparrow q) := f_\uparrow(d(p), d(q))$.

(2.4.18)'de $f_\to$ ve $f_\leftrightarrow$ fonksiyonlarını $f_\neg$, $f_\curlyvee$ ve $f_\curlywedge$ ile ifade edebileceğimizi öğrendik. Bu durumda aslında yalnızca $f_\neg \in \mathbb{B}_1$ ve $f_\curlyvee, f_\curlywedge \in \mathbb{B}_2$ gibi üç Boole fonksiyonundan yola çıktığımızı düşünebiliriz. İki soruyu yanıtlamamız gerekiyor.

1. $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ asal önermeleri arasında *herhangi* bir biçimde dile getirilen bir $\theta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ mantıksal ilişkisine karşılık gelen $f_\theta \in \mathbb{B}_n$ Boole fonksiyonu salt $f_\neg$, $f_\curlyvee$, $f_\curlywedge$ Boole fonksiyonları ile dile getirilebilir mi? Diğer deyişle $f_\theta = f_\varphi$ olan bir $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ Boole formülü bulabilir miyiz?
2. Her $f \in \mathbb{B}_n$ fonksiyonunu salt $f_\neg$, $f_\curlyvee$, $f_\curlywedge$ Boole fonksiyonları ile ifade edebilir miyiz?

İkinci soruya yanıtımız "evet" olacaktır. Dolayısıyla birinci soruya yanıtımız da "evet" olacaktır.

Herhangi bir Boole fonksiyonu $f : \mathbf{2}^n \to \mathbf{2}$ iki değerli bir fonksiyon olduğundan f fonksiyonu

$$\operatorname{des} f := \{x \in \mathbf{2}^n \mid f(x) \neq 0\} \textbf{ desteği}$$

ile tek olarak belirlidir. Her $a \in 2^n$ için $\delta_a : \mathbf{2}^n \to \mathbf{2}$ fonksiyonu

$$\delta_a(x) := \begin{cases} 1 & , x = a \\ 0 & , x \neq a \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $\rho_a : \mathbf{2}^n \to \mathbf{2}$ ise $\rho_a := 1 - \delta_a$ olsun. Bu durumda her $x \in \mathbf{2}^n$ için

$$\delta_a(x) = 1 \Longleftrightarrow x = a,$$
$$\rho_a(x) = 0 \Longleftrightarrow x = a,$$

olmak üzere

$$f = \max_{a \in \operatorname{des} f} \delta_a = \min_{a \in \mathbf{2}^n \setminus \operatorname{des} f} \rho_a. \tag{2.23}$$

Ancak burada iki özel durumda uzlaşmalar yapmamız gerekir. $\mathbf{1}, \mathbf{0} : \mathbf{2}^n \to \mathbf{2}$ sırasıyla özdeş olarak 1 ve özdeş olarak 0 değerlerini alan fonksiyonlar olmak üzere

$$\max_{a \in \emptyset} \delta_a := \mathbf{0} \text{ ve } \min_{a \in \emptyset} \rho_a := \mathbf{1}. \tag{2.24}$$

Tanım 2.5.3 *Her $p \in P$ için $p^0 := \neg p$ ve $p^1 := p$ olsun. $p_1, \ldots, p_n \in P$ asal önermeler, $\neg 0 = 1$, $\neg 1 = 0$ ve $\mathbf{p} := (p_1, \ldots, p_n)$ olmak üzere her $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{2}^n$ için*

$$\mathbf{p}^a := p_1^{a_1} \curlywedge p_2^{a_2} \curlywedge \cdots \curlywedge p_n^{a_n}$$
$$\mathbf{p}_a := p_1^{\neg a_1} \curlyvee p_2^{\neg a_2} \curlyvee \cdots \curlyvee p_n^{\neg a_n}$$

*olsunlar. $\mathbf{p}^a$'ya bir **saf ekleme** , $\mathbf{p}_a$'ya ise bir **saf ayrışma** diyeceğiz.*

Açıkça her $p \in P$ ve her $\sigma \in \{0, 1\}$ için $\neg p^\sigma = p^{\neg\sigma}$. $\mathbf{p} := (p_1, \ldots, p_n)$ olmak üzere $\neg\mathbf{p} := (\neg p_1, \ldots, \neg p_n)$ dersek

$$(\neg\mathbf{p})^a = \neg p_1^{a_1} \curlywedge \neg p_2^{a_2} \curlywedge \cdots \curlywedge \neg p_n^{a_n} \text{ olduğundan}$$
$$\Delta((\neg\mathbf{p})^a) = \neg p_1^{a_1} \curlyvee \neg p_2^{a_2} \cdots \curlyvee \neg p_n^{a_n} = p_1^{\neg a_1} \curlyvee p_2^{\neg a_2} \curlyvee \cdots \curlyvee p_n^{\neg a_n} = \mathbf{p}_a \tag{2.25}$$

olduğu kolayca görülür.

Örnek olarak $n = 2$ için tüm p_a ve p^a'ları verelim.

a_1	a_2	p^a	p_a
1	1	$p_1 \curlywedge p_2$	$\neg p_1 \curlyvee \neg p_2$
1	0	$p_1 \curlywedge \neg p_2$	$\neg p_1 \curlyvee p_2$
0	1	$\neg p_1 \curlywedge p_2$	$p_1 \curlyvee \neg p_2$
0	0	$\neg p_1 \curlywedge \neg p_2$	$p_1 \curlyvee p_2$

(2.26)

Bu örnekte de görüldüğü gibi aşağıdaki lemma apaçıktır.

Lemma 2.5.4 *$\mathbf{p} := (p_1, \ldots, p_n)$ olmak üzere her $a, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{2}^n$ için*

$$\mathbf{p}^a[x] = \delta_a(x) \text{ ve } \mathbf{p}_a[x] = \rho_a(x).$$

Kanıt. Alıştırma. ■

Demek ki $\mathbf{p}^a$ formülüne ilişkin $f_{\mathbf{p}^a}$ Boole fonksiyonu δ_a, $\mathbf{p}_a$ formülüne ilişkin $f_{\mathbf{p}_a}$ Boole fonksiyonu ρ_a'dır. (2.24)'e koşut olarak

$$\bigvee_{a \in \emptyset} \mathbf{p}^a := \bot \text{ ve } \bigwedge_{a \in \emptyset} \mathbf{p}_a := \top$$

olarak tanımlıyoruz.

Teorem 2.5.5 *Herhangi bir $f : \mathbf{2}^n \to \mathbf{2}$ Boole fonksiyonu verilsin. $p_1, \ldots, p_n \in P$ ve $\mathbf{p} := (p_1, \ldots, p_n)$ olmak üzere*

$$\varphi := \bigvee_{a \in \operatorname{des} f} \mathbf{p}^a \text{ ve } \psi := \bigwedge_{a \in \mathbf{2}^n \setminus \operatorname{des} f} \mathbf{p}_a$$

olsunlar. Bu Boole formülleri için $f = f_\varphi = f_\psi$.

Sonuç 2.5.6 *Her γ formülüne karşılık ona denk bir λ Boole formülü vardır.*

Kanıt. Her şeyden önce φ ve ψ birer Boole formülüdürler. (2.19), (2.23) ve (2.21) ile

$$f_\varphi = \max_{a\in \operatorname{des} f} f_{\mathbf{p}^a} = \max_{a\in \operatorname{des} f} \delta_a = f \text{ ve}$$
$$f_\psi = \min_{a\in \mathbf{2}^n\setminus \operatorname{des} f} f_{\mathbf{p}_a} = \min_{a\in \mathbf{2}^n\setminus \operatorname{des} f} \rho_a = f$$

olur. Teorem kanıtlanmıştır.

Sonucun kanıtı: $\gamma \in \mathrm{Omf}$ keyfi verilsin. f_γ Boole fonksiyonuna karşılık bir λ Boole formülü $f_\gamma = f_\lambda$ olacak biçimde seçilsin. (2.20)'den dolayı $\gamma \equiv \lambda$ ve işimiz bitmiştir. ■

Not 2.5.7 ψ fonksiyonunu φ ve İkililik Teoremi ile elde edebileceğimizi kolayca görebiliriz. $g := 1 - f$ Boole fonksiyonu için $f_\eta = g$ olacak bir η Boole formülü teoremin ilk savından dolayı

$$\eta = \bigvee_{a\in \operatorname{des} g} \mathbf{p}^a = \bigvee_{a\in \mathbf{2}^n\setminus \operatorname{des} f} \mathbf{p}^a$$

ile verilir. Elbette $f_{\neg\eta} = f$. (2.15) ve (2.25) ile

$$\psi := \neg\eta \equiv \bigwedge_{a\in \mathbf{2}^n\setminus \operatorname{des} f} \Delta((\neg\mathbf{p})^a) \equiv \bigwedge_{a\in \mathbf{2}^n\setminus \operatorname{des} f} \mathbf{p}_a.$$

▲

Not 2.5.8 (2.5.5)'in bir sonucu *fazla söze gerek olmadığıdır.* Sonlu sayıda $p_1,\ldots, p_n$ $(n \geq 1)$ asal önermesinden yola çıkarak sayılabilir sonsuz çoklukta birbirinden farklı formül oluşturabiliriz (kanıtlayınız). Ancak bu sonsuz formüllerin yalnızca 2^{2^n} tanesi mantıksal olarak birbirinden farklıdır. ▲

$\psi_1, \ldots, \psi_n$ formülleri verildiğinde $\psi_1 \curlyvee \cdots \curlyvee \psi_n$ formülüne bu formüllerin **ayrışımı,** $\psi_1 \curlywedge \cdots \curlywedge \psi_n$ formülüne ise bu formüllerin **eklenmişi** diyelim. (2.5.5) bize her formülü *eklenmişlerin ayrışımı* ve *ayrışımların eklenmişi* olarak yazma şansı veriyor.

Tanım 2.5.9 *φ formülü verilsin ve* $\deg\varphi \subseteq \{p_1,\ldots,p_n\} =: S$ *olsun.*

$$\varphi^S_\curlyvee := \bigvee_{\varphi[a]=1} \mathbf{p}^a \text{ ve } \varphi^S_\curlywedge := \bigwedge_{\varphi[a]=0} \mathbf{p}_a.$$

formüllerine sırasıyla φ formülünün (S'ye göre) ***eklenmişlerin ayrışımı*** *ve* ***ayrışımların eklenmişi*** *olarak* ***normal gösterimleri*** *denir. Biz her defasında söz konusu S kümesini biliniyor varsayıp kısaca $\varphi_\curlyvee$ ve $\varphi_\curlywedge$ gösterimlerini kullanmayı yeğleyeceğiz.*

(2.5.5) bize

$$\varphi \equiv \varphi_\curlyvee \equiv \varphi_\curlywedge$$

olduğunu söyler. Eğer φ formülünün doğruluk tablosunu biliyorsak $\varphi_\curlyvee$ ve $\varphi_\curlywedge$ formüllerini bulmak çok kolaydır: $\varphi_\curlyvee$'yi bulmak için φ'yi doğru kılan a'larla oluşturulan $\mathbf{p}^a$'ların ayrışımı, $\varphi_\curlywedge$'yi bulmak içinse φ'yi yanlış kılan a'larla oluşturulan $\mathbf{p}_a$'ların eklenmişi alınır. Normal gösterimlerin iki temel özelliğini belirtelim. Birincisi, her $\mathbf{p}^a$ ve $\mathbf{p}_a$'da her p_k değişkeni tam bir kez bulunur. İkincisi, $\varphi_\curlyvee$ ve $\varphi_\curlywedge$ formülleri $\mathbf{p}^a$ ve $\mathbf{p}_a$'ların sıralamaları ve her bir $\mathbf{p}^a$ ve $\mathbf{p}_a$'daki değişkenlerin sıralamaları dışında *tek* olarak belirlidirler.

Doğruluk tabloları ve (2.26)'dan kolayca görüleceği gibi iki değişkenli temel formüllerimizin eklenmişlerin ayrışımı ve ayrışımların eklenmesi olarak normal gösterimleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
p_1 \to p_2 &\equiv (p_1 \curlywedge p_2) \curlyvee (\neg p_1 \curlywedge p_2) \curlyvee (\neg p_1 \curlywedge \neg p_2) \equiv \neg p_1 \curlyvee p_2 \\
p_1 \leftrightarrow p_2 &\equiv (p_1 \curlywedge p_2) \curlyvee (\neg p_1 \curlywedge \neg p_2) \equiv (\neg p_1 \curlyvee p_2) \curlywedge (p_1 \curlyvee \neg p_2) \\
p_1 \triangledown p_2 &\equiv (p_1 \curlywedge \neg p_2) \curlyvee (\neg p_1 \curlywedge p_2) \equiv (\neg p_1 \curlyvee \neg p_2) \curlywedge (p_1 \curlyvee p_2) \\
p_1 \uparrow p_2 &\equiv (p_1 \curlywedge \neg p_2) \curlyvee (\neg p_1 \curlywedge p_2) \curlyvee (\neg p_1 \curlywedge \neg p_2) \equiv \neg p_1 \curlyvee \neg p_2 \\
p_1 \downarrow p_2 &\equiv \neg p_1 \curlywedge \neg p_2 \equiv (\neg p_1 \curlyvee \neg p_2) \curlywedge (\neg p_1 \curlyvee p_2) \curlywedge (p_1 \curlyvee \neg p_2)
\end{aligned}$$

Herhangi bir φ formülünün, normal gösterimler dışında da, saf eklenmişlerin ayrışımı veya saf ayrışımların eklenmişi olan gösterimleri olabilir.

$$Q := P \cup \{\neg p \,|\, p \in P\}$$

kümesinin öğelerine **harfseller** denir. $q_{ij} \in Q$, $i = 1, \ldots, m$ ve $j = 1, \ldots, n$ olmak üzere

$$\bigwedge_{i=1,\ldots,m} \bigvee_{j=1,\ldots,n} q_{ij} \text{ ve } \bigvee_{i=1,\ldots,m} \bigwedge_{j=1,\ldots,n} q_{ij}$$

ifadelerine sırasıyla (saf) ayrışımların eklenmişi ve (saf) eklenmişlerin ayrışımı denir. Herhangi bir φ formülü verildiğinde ona mantıksal denk olan bu tiplerden Boole formüllerini veren algoritmalar kolayca oluşturulur.

φ verilsin.

1. φ formülünde $\psi \to \eta$ ve $\psi \leftrightarrow \eta$ tipindeki altformülleri geçtikleri her yerde $\neg\psi \curlyvee \eta$ ve $(\neg\psi \curlyvee \eta) \curlywedge (\psi \curlyvee \neg\eta)$ ile değiştirerek $\varphi_1 \equiv \varphi$ olan φ_1 Boole formülünü elde ediniz.

2. $\neg(\psi \curlyvee \eta)$ ve $\neg(\psi \curlywedge \eta)$ tipindeki altformülleri sırasıyla $\neg\psi \curlywedge \neg\eta$ ve $\neg\psi \curlyvee \neg\eta$ ile değiştirme işlemini gerektiği kadar yaparak ve $\neg\neg p$ altformüllerini ise p ile değiştirerek $\neg$ iminin ancak p değişkenlerinin önünde bulunduğu φ_2 Boole formülünü elde ediniz. Elbette $\varphi_2 \equiv \varphi$.
3. $\psi \curlywedge (\eta \curlyvee \kappa)$ tipindeki altformülleri $(\psi \curlywedge \eta) \curlyvee (\psi \curlywedge \kappa)$ ve $(\psi \curlyvee \eta) \curlywedge \kappa$ tipindeki altformülleri $(\psi \curlywedge \kappa) \curlyvee (\eta \curlywedge \kappa)$ ile gerektiği kadar değiştiriniz ve sonuçta elde edilen Boole formülü φ_3 olsun. Elbette $\varphi_3 \equiv \varphi$ ve φ_3 saf eklenmişlerin ayrışımıdır.

Örnek 2.5.10 $\varphi = ((p \curlyvee r) \to q) \curlywedge (q \curlywedge r)$ olsun.

$$\begin{aligned}
\varphi &\equiv (\neg(p \curlyvee r) \curlyvee q) \curlywedge (q \curlywedge r) =: \varphi_1 \\
\varphi_1 &\equiv ((\neg p \curlywedge \neg r) \curlyvee q) \curlywedge (q \curlywedge r) =: \varphi_2 \\
\varphi_2 &\equiv ((\neg p \curlywedge \neg r) \curlywedge (q \curlywedge r) \curlyvee (q \curlywedge (q \curlywedge r)) =: \varphi_3 \\
\varphi_3 &\equiv (\neg p \curlywedge \neg r \curlywedge q \curlywedge r) \curlyvee (q \curlywedge q \curlywedge r) \equiv \bot \curlyvee (q \curlywedge q \curlywedge r) \\
&\equiv q \curlywedge r
\end{aligned}$$

$\varphi \equiv q \curlywedge r$ ifadesini istersek eklenmişlerin ayrışımları normal gösterimine dönüştürebiliriz:

$$\varphi \equiv q \curlywedge r \equiv (p \curlyvee \neg p) \curlywedge q \curlywedge r \equiv (p \curlywedge q \curlywedge r) \curlyvee (\neg p \curlywedge q \curlywedge r)$$

formülümüzün normal gösterimidir. ▲

Örnek 2.5.11 $\psi = p \curlywedge (p \to q) \to q$ formülünü ayrışımların eklenmişi olarak yazalım.

$$\begin{aligned}
\psi &\equiv \neg(p \curlywedge (\neg p \curlyvee q)) \curlyvee q \equiv \neg p \curlyvee \neg(\neg p \curlyvee q)) \curlyvee q \\
&\equiv \neg p \curlyvee (p \curlywedge \neg q) \curlyvee q \equiv (\neg p \curlyvee p \curlyvee q) \curlywedge (\neg p \curlyvee \neg q \curlyvee q)
\end{aligned}$$

ψ formülümüz bir hepdoğrudur ve ayrışımların eklenmişi yazılımındaki her bileşen en az bir değişkeni olumsuzuyla birlikte içermektedir. ▲

$J' \subseteq J$ olmak üzere her $\varphi \in \mathrm{Omf}$ formülü salt J''ye ait işlemciler içeren bir formüle mantıksal denk ise J' **fonksiyonel tamdır** denir. (2.5.5) bize $\{\neg, \curlyvee, \curlywedge\}$'nin fonksiyonel tam olduğunu söyler.

J' fonksiyonel tamsa özellikle $\neg, \curlyvee, \curlywedge$ işlemcilerini J''nün işlemcileri ile dile getirebiliriz. Bu ve (2.5.5) bize her Boole fonksiyonunun $\{f_j \mid j \in J'\}$ fonksiyonları ile ifade edilebileceğini söyler.

$\{\neg, \curlyvee, \curlywedge\}$ fonksiyonel tam olduğundan J''nün de fonksiyonel tam olduğunu görmek için $\neg, \curlyvee, \curlywedge$'nin her birinin J''deki işlemcilerle ifade edilebileceğini göstermek yeterlidir.

Teorem 2.5.12 $\{\neg, \veebar\}$, $\{\neg, \barwedge\}$, $\{\neg, \to\}$, $\{\downarrow\}$ *ve* $\{\uparrow\}$ *fonksiyonel tamdırlar.*

Kanıt. $\{\neg, \veebar\}$ ve $\{\neg, \barwedge\}$

$$\varphi \barwedge \psi \equiv \neg(\neg\varphi \veebar \neg\psi) \text{ ve } \varphi \veebar \psi \equiv \neg(\neg\varphi \barwedge \neg\psi)$$

olduğundan fonksiyonel tamdırlar. Bu nedenle J''nün fonksiyonel tam olduğunu kanıtlamak için $\neg$ ve $\veebar$'nin veya $\neg$ ve $\barwedge$'nin J' ile kazanılabileceğini göstermek yeterlidir. Bu ve $\varphi \veebar \psi \equiv \neg\varphi \to \psi$ olduğundan $\{\neg, \to\}$ fonksiyonel tamdır.

$$\neg\varphi \equiv (\varphi \uparrow \varphi) \equiv (\varphi \downarrow \varphi) \text{ ve } \varphi \barwedge \psi \equiv (\neg\varphi \downarrow \neg\psi) \equiv \neg(\varphi \uparrow \psi)$$

olduğundan $\{\downarrow\}$ ve $\{\uparrow\}$ fonksiyonel tamdırlar. ■

Not 2.5.13 Fonksiyonel tam işlemciler FTK yöntemini yalınlaştırırlar. Biz ileride $\{\neg, \to\}$ ile çalışacağımızdan yalınlaşmayı bu sistem için dile getirelim. Formüllerimize ilişkin bir $E(\varphi)$ önermesinin tüm formüllerimiz için doğru olduğunu kanıtlamak için aşağıdakiler yeterlidir:

1. Her $p \in P$ için $E(p)$ kanıtlanır.
2. Her φ için $E(\varphi)$ ise $E(\neg\varphi)$ ve
3. Her φ, ψ için $E(\varphi)$ ve $E(\psi)$ ise $E(\varphi \to \psi)$ olduğu kanıtlanır. ▲

Teorem 2.5.14 $\{\neg\}$ *ve* $\{\veebar, \barwedge, \to\}$ *fonksiyonel tam değillerdir.* $* : \text{Omf} \to \text{Omf}$ *ikili işlemcisi* $\uparrow$ *ve* $\downarrow$*'den farklı ise* $\{*\}$ *fonksiyonel tam değildir.*

Kanıt. Yalnızca $\neg$ ile oluşturulan bir $\varphi(p_1, p_2)$ formülü ya

$$\neg\neg\cdots\neg p_1 \text{ ya da } \neg\neg\cdots\neg p_2$$

tipindedir. φ'de geçen $\neg$ sayısı çiftse ya $\varphi(p_1, p_2) \equiv p_1$ veya $\varphi(p_1, p_2) \equiv p_2$, tekse ya $\varphi(p_1, p_2) \equiv \neg p_1$ ya da $\varphi(p_1, p_2) \equiv \neg p_2$ olur. Böylece elde edeceğimiz f_φ Boole fonksiyonları (2.22)'deki $f_1, f_2, f_{\neg 1}$ ve $f_{\neg 2}$ fonksiyonlarıdır; gerçekten önemli hiç bir ikili işlemcimizi elde edemedik!

$f_\veebar(1,1) = f_\barwedge(1,1) = f_\to(1,1) = 1$ olduğundan yalnız $\veebar$, $\barwedge$ ve $\to$ ile elde edilen her $\psi(p_1, p_2)$ formülü için $f_\psi(1,1) = 1$ olacağından $\psi \equiv \neg p_1$ olamaz! Dolayısıyla $\{\veebar, \barwedge, \to\}$ fonksiyonel tam değildir.

$*$ bir ikili işlemci ve $\{*\}$'ın fonksiyonel tam olduğunu varsayalım. f_* onun Boole fonksiyonu olsun. Eğer $f_*(1,1) = 1$ olsaydı, salt $*$ ile elde edile her $\psi(p_1, p_2)$ formülü için $\psi[1,1] = 1$ olurdu ve biz $\neg p$ formülünü elde edemezdik. Öyleyse $f_*(1,1) = 0$ ve benzer irdelemelerden dolayı ise $f_*(0,0) = 1$ olmalıdır. Şimdi f_* fonksiyonun (1,0) ve (0,1)'de aldığı değerler sırasıyla 0,0 ise $f_* = f_\downarrow$, 1,1 ise $f_* = f_\uparrow$, 0,1 ise $f_* = f_{\neg 1}$ ve son olarak 1,0 ise $f_* = f_{\neg 2}$

olur. $f_* \neq f_\uparrow, f_\uparrow$ olduğundan diğer iki durumu tartışacağız. Diğer iki durumda ise $p_1 * p_2 \equiv \neg p_1$ ve $p_1 * p_2 \equiv \neg p_2$ söz konusudur ki bu $*$ işlemcisinin tek başına $\neg$ ile tanımlanabilir olduğunu söyler. $\{*\}$ fonksiyonel tam olsaydı $\{\neg\}$ fonksiyonel tam olurdu ki fonksiyonel tam değildir. ■

2.6 Mantıksal Çıkarımlar

Bu bölümde geleneksel matematikte başvurduğumuz mantıksal çıkarımların niceleyicileri içermeyenlerini inceleyeceğiz. Bunlar anlamsal (veya içeriksel) irdelemelerdir. Bunları ileride biçimselleştireceğiz.

2.6.1 Modeller ve Mantıksal Çıkarımlar

Tanım 2.6.1 $\Gamma \subseteq \mathrm{Omf}$ *ve* $d : P \to \mathbf{2}$ *olmak üzere* her $\varphi \in \Gamma$ *için* $d \models \varphi$ *ise, dd.* $d(\varphi) = 1$ *ise* d *yorumu* Γ***'nin bir modelidir*** *veya* Γ*,* d *modelinde (veya yorumunda)* ***doğrudur*** *denir; bu durumu* $d \models \Gamma$ *ile göstereceğiz.* φ *ve* Γ*'nin modellerinin kümesini sırasıyla* $\mathrm{mod}\,\varphi$ *ve* $\mathrm{mod}\,\Gamma$ *ile göstereceğiz.*

Bu tanıma göre

$$\Gamma \neq \emptyset \text{ ise } \mathrm{mod}\,\Gamma = \bigcap_{\varphi\in\Gamma} \mathrm{mod}\,\varphi \text{ ve } \mathrm{mod}\,\emptyset = {}^{P}\mathbf{2}$$

olduğu apaçıktır. Eğer $\mathrm{mod}\,\Gamma \neq \emptyset$, dd. her $\varphi \in \Gamma$ formülünün doğru olduğu bir d yorumu var ise Γ **sağlanabilir** eğer $\mathrm{mod}\,\Gamma = \emptyset$ ise Γ **sağlanamaz** diyeceğiz. φ formülü için:

$$\{\varphi\} \text{ sağlanamaz } \iff \varphi \text{ bir çelişkidir.}$$

Tanım 2.6.2 $\Gamma, \Psi \subseteq \mathrm{Omf}$ *ve* $\psi \in \mathrm{Omf}$ *olsunlar.*

$$\Gamma \Vdash \psi :\iff \mathrm{mod}\,\Gamma \subseteq \mathrm{mod}\,\psi.$$
$$\Gamma \Vdash \Psi :\iff \mathrm{mod}\,\Gamma \subseteq \mathrm{mod}\,\Psi.$$

$\Gamma \Vdash \psi$ ise "ψ, Γ'nin (**mantıksal** veya **anlamsal) sonucudur**" veya "ψ, Γ'dan (**mantıksal** veya **anlamsal) olarak çıkar**" veya "Γ (**mantıksal** veya **anlamsal) olarak** ψ**'yi verir**" diyeceğiz. Benzeri söylemler $\Gamma \Vdash \Psi$ içinde geçerlidir.

(2.6.1) ile (2.6.2) tanımları aşağıdaki şekli alırlar:

$$\Gamma\Vdash\psi \iff \text{Her } d \in {}^{P}\mathbf{2} \text{ için } d \models \Gamma \text{ ise } d \models \psi.$$
$$\Gamma\Vdash\Psi \iff \text{Her } \psi \in \Psi \text{ için } \Gamma\Vdash\psi.$$

Başka sözlerle söyleyecek olursak $\Gamma\Vdash\psi$ tam da Γ'nin her modelinin aynı zamanda ψ'nin de modeli olması, dd. Γ'daki her φ formülünü doğru kılan her d yorumunda ψ formülünün de doğru olması demektir. $\Gamma\Vdash\psi$ gösteriminde Γ **önsavlar(**veya **varsayımlar,** veya **öncüller** veya **hipotezler)** olarak adlandırılırken, φ **sav(**veya **çıkarım** veya **tez)** olarak adlandırılır.

$$\Vdash\psi :\Longleftrightarrow \emptyset\Vdash\psi$$

olarak tanımlanır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\varphi_1,\ldots,\varphi_n \Vdash \psi &:\Longleftrightarrow \{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}\Vdash\psi \qquad (2.27)\\
\Gamma,\varphi_1,\ldots,\varphi_n \Vdash \psi &:\Longleftrightarrow \Gamma\cup\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}\Vdash\psi\\
\Gamma \Vdash \psi_1,\ldots,\psi_n &:\Longleftrightarrow \Gamma\Vdash\{\psi_1,\ldots,\psi_n\}\\
\Gamma \nVdash \psi &:\Longleftrightarrow \Gamma\Vdash\psi \text{ değil}\\
\Gamma \nVdash \Psi &:\Longleftrightarrow \Gamma\Vdash\Psi \text{ değil}
\end{aligned}$$

kısaltmalarını kullanacağız.

Not 2.6.3 Bir noktayı ayrıca vurgulamak istiyoruz. "$\Gamma\Vdash\psi$", dd. "ψ mantıksal olarak Γ'dan çıkar" dediğimizde asla her $\varphi\in\Gamma$ ve ψ'nin doğruluğunu ileri sürmüş olmayız. $\Gamma\Vdash\psi$ ifadesi Γ'daki φ'lerin ve ψ'nin doğruluğu veya yanlışlığı hakkında hiçbir şey söylemez! İleri sürülen yalnızca her $\varphi\in\Gamma$ formülünün doğru olduğu yorumlarda ψ'nin de doğru olduğudur. Matematikte teoremlerimizin çoğu bu tiptendir. ▲

Not 2.6.4 φ formülünün bir çelişki olması $\operatorname{mod}\varphi=\emptyset$ olmasıyla eş anlamlıdır. Γ formül kümesine $\operatorname{mod}\Gamma=\emptyset$ ise (**mantıksal** veya **anlamsal) çelişkilidir** veya **tutarsızdır,** $\operatorname{mod}\Gamma\neq\emptyset$ ise (**mantıksal** veya **anlamsal) çelişkisizdir** veya **tutarlıdır** diyelim. Aşağıdaki önermeler apaçıktır:

$$\varphi \text{ bir çelişkidir} \iff \text{Her } \psi\in\mathrm{Omf} \text{ için } \varphi\Vdash\psi. \qquad (2.28)$$

$$\Gamma \text{ çelişkilidir} \iff \text{Her } \psi\in\mathrm{Omf} \text{ için } \Gamma\Vdash\psi. \qquad (2.29)$$

Bu önermelerin $\Longrightarrow$ yönleri boş küme her kümenin altkümesi olduğu için doğrudurlar. $\Longleftarrow$ yönleri ise $\bot\in\mathrm{Omf}$ ve $\operatorname{mod}(\bot)=\emptyset$ olduğundan doğrudur; çünkü boş kümenin yegane altkümesi kendisidir. Birinci önermemizin **yanlışın kuralı** (regula falsi) olduğunu belirtelim; bu kural "*yanlıştan her şey çıkar*" der. İkinci önermemizi tersten okursak aşağıdaki önermeyi elde ederiz:

$$\Gamma \text{ çelişkisizdir} \iff \text{En az bir } \psi\in\mathrm{Omf} \text{ için } \Gamma\nVdash\psi.$$

Γ*'nin çelişkisiz olması için gerek ve yeter koşul,* Γ*'nın mantıksal sonucu olmayan en az bir* $\psi\in\mathrm{Omf}$ *formülünün bulunmasıdır.* ▲

Lemma 2.6.5 $\Gamma, \Psi \subseteq \mathrm{Omf}$ *ve* $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi \in \mathrm{Omf}$ *olmak üzere aşağıdakiler geçerlidir:*

1. φ *bir hepdoğrudur* $\Longleftrightarrow \mathrm{mod}\,\varphi = {}^{P}2$.
2. $\mathrm{mod}(\varphi_1 \curlywedge \cdots \curlywedge \varphi_n) = \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{mod}\,\varphi_k = \mathrm{mod}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$.
3. $\mathrm{mod}(\varphi_1 \curlyvee \cdots \curlyvee \varphi_n) = \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{mod}\,\varphi_k$.
4. $\mathrm{mod} \neg\varphi = (\mathrm{mod}\,\varphi)^c$ *ve* $\mathrm{mod}(\varphi \to \psi) = (\mathrm{mod}\,\varphi)^c \cup \mathrm{mod}\,\psi$.
5. $\Gamma \subseteq \Psi \Longrightarrow \mathrm{mod}\,\Psi \subseteq \mathrm{mod}\,\Gamma$.

Kanıt. Alıştırma.. ■

Not 2.6.6 (2.6.5)'in sonucu olarak

$$\varphi \to \psi \text{ hepdoğrudur} \Longleftrightarrow \mathrm{mod}\,\varphi \subseteq \mathrm{mod}\,\psi.$$

▲

Bu lemma çıkarımlara ilişkin önermelerin çoğunu $\mathcal{P}({}^{P}2)$ Boole cebirinin önermelerine dönüştürür. Çıkarımlara geçmeden önce lemmadan doğrudan çıkan birkaç özelliği verelim

(Y)	$\varphi \in \Gamma \Longrightarrow \Gamma \Vdash \varphi$	yansımalı.
(M)	$\Gamma \Vdash \psi$ *ve* $\Gamma \subseteq \Omega$ *ise* $\Omega \Vdash \psi$	monotonluk.
(G)	$\Gamma \Vdash \Psi$ *ve* $\Psi \Vdash \eta$ *ise* $\Gamma \Vdash \eta$	*geçişlilik.*

Teorem 2.6.7 *Aşağıdaki önermeler denktir:*

1. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \Vdash \psi$.
2. $\varphi_1 \curlywedge \cdots \curlywedge \varphi_n \to \psi$ *bir hepdoğrudur.*
3. $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\psi\}$ *sağlanamaz.*
4. $\{\varphi_1 \curlywedge \cdots \curlywedge \varphi_n \curlywedge \neg\psi\}$ *sağlanamaz.*

Kanıt. *Birinci kanıt:* (1)$\Longrightarrow$(2): $d(\varphi_1 \curlywedge \cdots \curlywedge \varphi_n) = 1$ ise her $k = 1, \ldots, n$ için $d(\varphi_k) = 1$, koşulumuzdan dolayı da $d(\psi) = 1$ olur. $d(\varphi_1 \curlywedge \cdots \curlywedge \varphi_n) = 0$ ise $\varphi_1 \curlywedge \cdots \curlywedge \varphi_n \to \psi$ doğrudur. Böylece $\varphi_1 \curlywedge \cdots \curlywedge \varphi_n \to \psi$ formülü hiçbir yorumda yanlış olamayacağından bir hepdoğrudur.

(2)$\Longrightarrow$(3): Herhangi bir yorumda her $k = 1, \ldots, n$ için $d(\varphi_k) = 1$ ise koşulumuzdan dolayı $d(\psi) = 1$, dd. $d(\neg\psi) = 0$ olacağından $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\psi\}$ formül kümesinin bir modeli yoktur.

(3)$\Longrightarrow$(4) Aşikâr.

(4)$\Longrightarrow$(1): Herhangi bir yorumda her $k = 1, \ldots, n$ için $d(\varphi_k) = 1$ iken $d(\psi) = 0$ olsaydı bu yorumda $\varphi_1 \curlywedge \cdots \curlywedge \varphi_n \curlywedge \neg\psi$ sağlanırdı ki bu koşulumuzla çelişir.

İkinci kanıt: $A_k := \operatorname{mod}\varphi_k$ *ve* $B := \operatorname{mod}\psi$ olsun.

$$\varphi_1 \curlywedge \cdots \curlywedge \varphi_n \to \psi \equiv \neg(\varphi_1 \curlywedge \cdots \curlywedge \varphi_n) \curlyvee \psi$$

olduğunu gözetirsek tüm savlar doğrudan

$$\begin{aligned} A_1 \cap \cdots \cap A_n \subseteq B &\Longleftrightarrow (A_1 \cap \cdots \cap A_n)^c \cup B = {}^P 2 \\ &\Longleftrightarrow A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap B^c = \emptyset. \end{aligned}$$

denkliklerinden çıkar.(2.6.5) ile ilk denklik (1)$\Longleftrightarrow$(2), ikinci denklik ise (1) $\Longleftrightarrow$ (3) ve (1) $\Longleftrightarrow$ (4) denkliklerini verir. ■

Teorem 2.6.8 (Γ-Ayırma) $\Gamma\Vdash\varphi$ *ve* $\Gamma\Vdash\varphi \to \psi$ *ise* $\Gamma\Vdash\psi$.

Kanıt. Her $d \in \operatorname{mod}\Gamma$ için $d(\varphi) = 1$ ve $d(\varphi \to \psi) = 1$ olduğundan $1 = d(\varphi) \leq d(\psi) \leq 1$, Sonuçta $d(\psi) = 1$ olur. Tanım gereği $\Gamma\Vdash\psi$. ■

Önerme 2.6.9 *Her* $\Gamma \subseteq \mathrm{Omf}$ *ve her* $\varphi, \psi \in \Gamma$ *için:*

1. $\Gamma\Vdash(\varphi \curlywedge \psi) \Longleftrightarrow \Gamma\Vdash\varphi$ *ve* $\Gamma\Vdash\psi$.
2. $\Gamma \not\Vdash \varphi \Longleftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *mantıksal tutarlıdır (çelişkisizdir).*

Kanıt. Herhangi bir d yorumu için

$$d(\varphi \curlywedge \psi) = 1 \Longleftrightarrow d(\varphi) = 1 \text{ ve } d(\psi) = 1$$

İlk sav doğrudan buradan çıkar. $\Gamma \not\Vdash \varphi$ olması en az bir $d \in \operatorname{mod}\Gamma$ için $d(\varphi) = 0$ olmasına denktir. Böyle bir d ise $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$'nin bir modeli olacağından $\Gamma \not\Vdash \varphi$ olması $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$'nin sağlanabilir olmasına denk olur. Bu ise ikinci savı kanıtlar. Veya savlar

$$\begin{aligned} &\operatorname{mod}\Gamma \subseteq \operatorname{mod}\varphi \cap \operatorname{mod}\psi \Longleftrightarrow \operatorname{mod}\Gamma \subseteq \operatorname{mod}\varphi \text{ ve } \operatorname{mod}\Gamma \subseteq \operatorname{mod}\psi \\ &\operatorname{mod}\Gamma \nsubseteq \operatorname{mod}\varphi \Longleftrightarrow \operatorname{mod}\Gamma \cap (\operatorname{mod}\varphi)^c \neq \emptyset \\ &\qquad \Longleftrightarrow \operatorname{mod}\Gamma \cap \operatorname{mod}(\neg\varphi) \neq \emptyset \Longleftrightarrow \operatorname{mod}(\Gamma \cup \{\neg\varphi\}) \neq \emptyset \end{aligned}$$

denkliklerinden başka bir şey değildir. ■

Teorem 2.6.10 (Çıkarım Teoremi) *Her* Γ *ve her* ψ, η *için*

$$\Gamma, \psi\Vdash\eta \Longleftrightarrow \Gamma\Vdash\psi \to \eta.$$

Sonuç 2.6.11 *Her* Γ *ve her* $\psi_1, \ldots, \psi_n, \eta$ *için*

$$\begin{aligned} \Gamma, \psi_1, \ldots, \psi_n\Vdash\eta &\Longleftrightarrow \Gamma\Vdash(\psi_1 \curlywedge \cdots \curlywedge \psi_n \to \eta). \\ &\Longleftrightarrow \Gamma \Vdash \psi_1 \to \psi_2 \cdots \to \psi_n \to \psi \end{aligned}$$

Kanıt. $\Longrightarrow$: $d \in \operatorname{mod}\Gamma$ keyfi verilsin. $d(\psi) = 0$ ise tanım gereği $d(\psi \to \eta) = 1$. $d(\psi) = 1$ ise $d \in \operatorname{mod}(\Gamma \cup \{\psi\})$ ve koşulumuzdan $d(\eta) = 1$ olur. Dolayısıyla iki durumda da $d(\psi \to \eta) = 1$ ve $d \in \operatorname{mod}\Gamma$ keyfi olduğundan $\Gamma \Vdash \psi \to \eta$.

$\Longleftarrow$: $d \in \operatorname{mod}(\Gamma \cup \{\psi\})$ keyfi verilsin. $d(\psi) = 1$ ve koşulumuzdan dolayı $d(\psi \to \eta) = 1$ olduğundan $d(\eta) = 1$ olur ve işimiz biter.

Sonucun kanıtı: Sonucun bir yarısını kanıtlayacak, diğer yarısını alıştırma olarak bırakacağız. n kez çıkarım kuralı kullanılarak

$$\begin{aligned}
\Gamma, \psi_1, \ldots, \psi_n \Vdash \psi &\iff \Gamma, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1} \Vdash \psi_n \to \psi \\
&\iff \Gamma, \psi_1, \ldots, \psi_{n-2} \Vdash \psi_{n-1} \to (\psi_n \to \psi) \\
&\quad \vdots \\
&\iff \Gamma \Vdash \psi_1 \to (\psi_2 \to (\cdots (\psi_n \to \psi) \cdots)) \\
&\iff \Gamma \Vdash \psi_1 \to \psi_2 \cdots \to \psi_n \to \psi.
\end{aligned}$$

denkliği elde edilir. ■

Not 2.6.12 Çıkarım Teoremi en çok başvurduğumuz kanıt yöntemlerinden birini dile getirir. Örneğin Cisimler Kuramı'nda $\alpha \Rightarrow \beta$ gibi bir önermeyi kanıtlamak isteyelim. Kuramımızın aksiyomları ve bu kuramda o ana kadar kanıtlanmış teoremlerimizin kümesi Ψ olsun. Biz $\alpha \Rightarrow \beta$ önermesinin Ψ'den çıktığını kanıtlamak durumundayız. Bunun için izlenecek yollardan birisi şudur: "Varsayalım ki α doğru olsun" der ve Ψ'yi kullanarak β'nın doğru olduğunu kanıtlarız. Yaptığımız tam da $\Psi \cup \{\alpha\}$'dan β'nın çıktığını göstermektir; böylece Ψ'den $\alpha \Rightarrow \beta$'yı kanıtlamış oluruz (α yanlışsa $\alpha \Rightarrow \beta$ ön koşulsuz doğru olacağından bu durum irdelenmez!). ▲

Önerme 2.6.13 *$p \notin \deg\Gamma := \bigcup_{\varphi\in\Gamma} \deg\varphi$ olsun. Bu durumda $\Gamma \Vdash \psi$ ise her η formülü için $\Gamma \Vdash \psi(p|\eta)$.*

Kanıt. $d \in \operatorname{mod}\Gamma$ keyfi verilsin. d' yorumu $P\backslash\{p\}$'de d ile çakışsın ve $d'(p) := d(\eta)$ olarak açıklansın. $p \notin \deg\Gamma$, dolayısıyla $d|\deg\Gamma = d'|\deg\Gamma$ olduğundan her $\varphi \in \Gamma$ için $d(\varphi) = d'(\varphi)$ olduğu apaçıktır (bkz. (2.4.6)). Öyleyse $d' \in \operatorname{mod}\Gamma$. Koşulumuzdan $1 = d'(\psi) = d(\psi(p|\eta))$. ■

Önerme 2.6.14 $\Vdash (\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\eta(p|\varphi) \leftrightarrow \eta(p|\psi))$.

Kanıt. $\kappa := (\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\eta(p|\varphi) \leftrightarrow \eta(p|\psi))$'nin bir hepdoğru olduğunu savunuyoruz. d herhangi bir yorum olsun. $d(\varphi \leftrightarrow \psi) = 0$ ise tanım gereği

$d(\kappa) = 1$. Şimdi $d(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ olsun. Dolayısıyla $d(\varphi) = d(\psi)$ ve defalarca kullandığımız argümandan dolayı $\eta(p|\varphi) \equiv \eta(p|\psi)$ olur ve işimiz biter. ■

Daha önce verdiğimiz hepdoğrular listesinden ve Çıkarım Teoremi'nden hemen aşağıdaki, kanıtlarda sürekli kullandığımız mantıksal çıkarımları kazanırız.

Temel Mantıksal Çıkarımlar

$\varphi \Vdash \varphi$	$\varphi \curlyvee \varphi \Vdash \varphi$	$\varphi, \varphi \to \psi \Vdash \psi$	$\varphi \to \psi, \neg\psi \Vdash \neg\varphi$
$\varphi \curlywedge \psi \Vdash \varphi$	$\varphi \Vdash \varphi \curlyvee \psi$	$\neg\varphi \Vdash \varphi \to \psi$	$\varphi \to \psi \Vdash \neg\psi \to \neg\varphi$
$\varphi \curlywedge \psi \Vdash \psi$	$\varphi \Vdash \psi \curlyvee \varphi$	$\varphi \Vdash \psi \to \varphi$	$\varphi \to \neg\psi \Vdash \psi \to \neg\varphi$
$\varphi \Vdash \neg\neg\varphi$	$\neg\neg\varphi \Vdash \varphi$	$\varphi \curlyvee \psi, \neg\psi \Vdash \varphi$	$\varphi \to \psi, \psi \to \eta \Vdash \varphi \to \eta$

Şimdi bu çıkarımların önemli olan birkaçını kanıtlarda alışık olduğumuz söylemlere dönüştürelim:

(a) $\neg\varphi \Vdash \varphi \to \psi$: φ yanlışsa φ'den her ψ çıkar (regula falsi).

(b) $\varphi, \varphi \to \psi \Vdash \psi$: φ doğruysa ve φ doğru olduğunda ψ de doğruysa ψ de doğrudur (**ayırma, modus ponens**).

(c) $\varphi \to \psi, \neg\psi \Vdash \neg\varphi$: φ doğru olduğunda ψ de doğru ancak ψ yanlışsa φ de yanlıştır.

(d) $\varphi \to \psi, \psi \to \eta \Vdash \varphi \to \eta$: φ doğru olduğunda ψ de doğruysa ve ψ doğru olduğunda η da doğruysa bu durumda φ doğru olduğunda η de doğrudur.

2.6.2 Kompaktlık Teoremi

Γ sonlu olduğunda bir modeli olup olmadığı doğruluk tablosu ile belirlenebilir. Biz P asal önermeler kümesinin herhangi bir sonsuz küme olmasına izin verdik ve Γ *sonsuz* olduğunda da bir modeli olup olmadığıyla da ilgilendiğimiz durumlarla karşılaşıyoruz. Γ'nın sonsuz olması durumunda doğruluk tabloları bir işe yaramaz. Γ'nın *her sonlu* altkümesi çelişkisizse Γ **sonlu çelişkisizdir** diyelim. Hiçbir ψ için $\{\psi, \neg\psi\}$ bir modele sahip olamayacağından Γ sonlu çelişkisizse $\psi \in \Gamma$ ise $\neg\psi \notin \Gamma$ olmak zorundadır. Sıra önermeler mantığının en önemli teoremlerinden biri olan Kompaktlık Teoremi'ne gelmiştir.

Teorem 2.6.15 (Kompaktlık Teoremi) *Γ'nın bir modeli olması için gerek ve yeter koşul her sonlu $\Phi \subseteq \Gamma$ altkümesinin bir modeli olmasıdır. Başka sözlerle Γ'nin çelişkisiz olması için gerek ve yeter koşul sonlu çelişkisiz olmasıdır.*

Sonuç 2.6.16 $\Gamma \Vdash \psi$ *olması için gerek ve yeter koşul* $\Phi \Vdash \psi$ *olacak biçimde sonlu bir* $\Phi \subseteq \Gamma$ *altkümesinin bulunmasıdır.*

Kanıt. *Birinci kanıt:* $\Phi \subseteq \Gamma$ ise $\operatorname{mod}\Gamma \subseteq \operatorname{mod}\Phi$ olduğundan savın bir yönü aşikârdır: Γ'nın modelleri varsa ve $\Phi \subseteq \Gamma$ ise Φ'nin de modeli vardır.

Şimdi her sonlu $\Phi \subseteq \Gamma$ için Φ'nin bir modeli olsun. Bu koşulda Γ'nın da bir modeli olduğunu kanıtlayacağız.

$$\mathbb{F} := \{\Psi \,|\, \Gamma \subseteq \Psi \subseteq \text{Omf ve } \Psi \text{ sonlu çelişkisiz}\}$$

kümesini $\subseteq$ ile sıralayalım. $\Gamma \in \mathbb{F}$ olduğundan $\mathbb{F} \neq \emptyset$. $(\mathbb{F}, \subseteq)$ Zorn Lemması'nın koşullarını sağlar. Gerçekten de $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{F}$ bir zincir olsun. $\Omega := \bigcup \mathcal{Z} = \{\eta \,|\, \exists \Psi \in \mathcal{Z} \text{ ve } \eta \in \Psi\}$'nin $\mathcal{Z}$ zincirinin $\mathbb{F}$'de bir üst sınırı olduğunu savunuyoruz. Tanım gereği her $\Psi \in \mathcal{Z}$ için $\Gamma \subseteq \Psi \subseteq \Omega$. Şimdi sonlu $\Phi \subseteq \Omega$ keyfi verilsin. Her $\gamma \in \Phi$ için $\gamma \in \Psi_\gamma$ olacak biçimde en az bir $\Psi_\gamma \in \mathcal{Z}$ vardır. $\mathcal{Z}$ bir zincir ve $\{\Psi_\gamma \,|\, \gamma \in \Phi\}$ sonlu olduğundan bunlardan birisi, ona Ψ_{γ^*} diyelim, bunların en büyüğüdür. Böylece $\Phi \subseteq \Psi_{\gamma^*} \in \mathbb{F}$ ve Ψ_{γ^*} sonlu çelişkisiz olduğundan Φ'nin de bir modeli vardır. Sonuçta $\Omega \in \mathbb{F}$ olur.

Zorn Lemması'na göre $\mathbb{F}$ büyük öğelere sahiptir. Ω_m bir büyük öğe olsun. Şimdi

$$(*) \text{ Her } \varphi \in \text{Omf için ya } \varphi \in \Omega_m \text{ ya da } \neg\varphi \in \Omega_m$$

olduğunu savunuyoruz. Şimdi $(*)$ önermesinin doğru olmadığını varsayalım, dd. en az bir φ için $\varphi, \neg\varphi \notin \Omega_m$. Dolayısıyla Ω_m büyük öğe olduğundan, $\Omega_m \cup \{\varphi\}$, $\Omega_m \cup \{\neg\varphi\} \notin \mathbb{F}$ olur. Bu durumda sonlu $\Phi, \Phi' \subseteq \Omega_m$ kümeleri $\Phi \cup \{\varphi\}$ ve $\Phi' \cup \{\neg\varphi\}$ sağlanamaz olacak biçimde vardırlar. $\Phi \cup \Phi' \subseteq \Omega_m$ sonlu kümesinin bir modeli olamayacağını kanıtlarsak bu $\Omega_m \in \mathbb{F}$ ile çelişir. Gerçekten de d yorumu $\Phi \cup \Phi'$'nin bir modeli olsun. d yorumu $d(\varphi) = 0$ ise $\Phi' \cup \{\neg\varphi\}$'nin, $d(\varphi) = 1$ ise $\Phi \cup \{\varphi\}$'nin bir modeli olur ve bu iki durum da varsayımlarımızla çelişir. Dolayısıyla φ ve $\neg\varphi$ formüllerinden en az biri Ω_m'de olmalıdır. Diğer yandan Ω_m tanım gereği sonlu çelişkisiz olduğundan φ ve $\neg\varphi$ formüllerinden ikisi birden Ω_m kümesinde olamazlar. Böylece $(*)$ savı kanıtlanmıştır.

Bir $d : P \to 2$ değerlemesini

$$d(p) := 1 \iff p \in \Omega_m$$

olacak biçimde tanımlayalım. Şimdi FTV ile

$$\text{Her } \psi \in \text{Omf için } (d(\psi) = 1 \iff \psi \in \Omega_m)$$

olduğunu kanıtlayacağız(2.5.13).

1. $\psi = p \in P$ için sav tanım gereği doğrudur.

2. $\psi = \neg\varphi$ ve φ için önerme kanıtlanmış olsun.

$$d(\psi) = 1 \iff d(\varphi) = 0 \overset{tvk}{\iff} \varphi \notin \Omega_m \overset{(*)}{\iff} \psi = \neg\varphi \in \Omega_m.$$

3. $\psi = \varphi \to \eta$ ve sav φ ve η için kanıtlamış olsun.

(a) $\Longrightarrow$ *yönü*: $d(\psi) = 1$ olsun. $\psi \notin \Omega_m$ varsayalım. $(*)$'dan dolayı $\neg\psi \in \Omega_m$ olur. $d(\psi) = 1$ ise $0 \le d(\varphi) \le d(\eta) \le 1$ olacaktır. Eğer $d(\varphi) = d(\eta) = 1$ ise varsayımdan dolayı $\varphi, \eta \in \Omega_m$ olacaktır. Bu durumda $\{\varphi, \eta, \neg\psi\} \subseteq \Omega_m$ kümesi tutarsızdır ve bu Ω_m kümesinin sonlu çelişkisiz olmasıyla çelişir. Eğer $d(\varphi) = 0$ ve $d(\eta) = 1$ ise bu kez Ω_m kümesinin tutarsız $\{\neg\varphi, \eta, \neg\psi\}$ altkümesini, yok eğer $d(\varphi) = d(\eta) = 0$ ise $\{\neg\varphi, \neg\eta, \neg\psi\}$ tutarsız altkümesini elde ederiz. $\psi \notin \Omega_m$ bizi olası her durumda çelişkiye götürdü, öyleyse $\psi \in \Omega_m$.

(b) $\Longleftarrow$ *yönü:* Şimdi $\psi \in \Omega_m$ olsun. $d(\varphi) = 1$ ve $d(\eta) = 0$, dd. $d(\psi) = 0$ olamayacağını göstermeliyiz. Böyle olduğunu varsayalım. Varsayımdan dolayı $\varphi, \neg\eta \in \Omega_m$ olacaktır. Bu durumda $\{\psi, \varphi, \neg\eta\} \subseteq \Omega_m$ sonlu kümesi sağlanamaz; çünkü herhangi bir $d' : P \to \{0, 1\}$ değerlemesinde $d'(\varphi) = d'(\neg\eta) = 1$ ise $d'(\psi) = 0$! $\{\psi, \varphi, \neg\eta\}$ çelişkilidir ve bu Ω_m'nin sonlu tutarlı olmasıyla çelişir.

Böylece $d \in \operatorname{mod}\Omega_m$ ve $\Phi \subseteq \Omega_m$ olduğundan $d \in \operatorname{mod}\Phi$.

Sonucun kanıtı: Önermenin bir yönü çıkarımın monotonluğundan dolayı aşikardır. Şimdi $\Gamma \Vdash \psi$ olsun. Çelişki yöntemi kullanacağız: Varsayalım ki her sonlu $\Phi \subseteq \Gamma$ için $\Phi \not\models \psi$ olsun. Bu ise her sonlu $\Phi \subseteq \Gamma$ için bir d değerlemesinin $d \models \Phi$ ve $d \not\models \psi$ olacak biçimde var olduğunu söyler; bu ise $d \models \Phi \cup \{\neg\psi\}$ demektir. Dolayısıyla $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$'nin her sonlu altkümesinin bir modeli vardır. Teoremimizden dolayı $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$'nin bir modeli vardır. Bu ise $\Gamma \Vdash \psi$ ile çelişir. Varsayım yanlıştır ve $\Phi \Vdash \psi$ olacak biçimde sonlu bir $\Phi \subseteq \Gamma$ vardır.

Teoremin ikinci kanıtı : $|P| = \kappa$ sonsuz ise $|\operatorname{Omf} P| = \kappa$ (bkz. (2.2.8)). $\operatorname{Omf} P$ kümesini $(\varphi_\xi)_{\xi<\kappa}$ olarak iyi sıralayalım. Her $\alpha < \kappa$ için $\Gamma_\alpha \subseteq \operatorname{Omf}$ olmak üzere $(\Gamma_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ dizisini yinelgen tanımlamayla aşağıdaki gibi tanımlayalım:

1. $\Gamma_0 := \Gamma$.
2. $\Gamma_{\alpha+1} := \begin{cases} \Gamma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} & , \Gamma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} \text{ sonlu çelişkisiz.} \\ \Gamma_\alpha \cup \{\neg\varphi_\alpha\} & , \Gamma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} \text{ sonlu çelişkisiz değil.} \end{cases}$
3. $\Gamma_\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} \Gamma_\alpha$, λ limit sırasayısı.

Şimdi $\Gamma^* := \bigcup_{\alpha<\kappa} \Gamma_\alpha$ olsun. Birinci kanıtta Ω_m yerine Γ^* aldığımızda kanıtın değişmeden kalabilmesi için Γ^* sonlu çelişkisiz olmalı ve $(*)$ sağlanmalıdır[3]. Γ^*'ın tanımı gereği her φ için $\varphi \in \Gamma^*$ veya $\neg\varphi \in \Gamma^*$. Geriye Γ^*'ın sonlu

[3]Aslında Ω_m gibi Γ^* da Γ'yı içeren sonlu çelişkisiz formül kümeleri arasında $\subseteq$ bağıntısına göre maksimaldir.

çelişkisiz olduğunu görmek kalıyor; o zaman $\varphi, \neg\varphi \in \Gamma^*$ olmaz ve $(*)$ kanıtlanmış olur. Bunun içinse sonlu ötesi tümevarımla her $\xi < \kappa$ için Γ_ξ'nın sonlu çelişkisiz olduğunu görmek kalıyor.

$\xi = 0$ için $\Gamma_0 = \Gamma$ sonlu çelişkisizdir. $\xi = \alpha + 1$ ve Γ_α sonlu çelişkisiz olsun. $\Gamma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\}$ sonlu çelişkisizse $\Gamma_{\alpha+1} = \Gamma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\}$ sonlu çelişkisizdir. Şimdi $\Gamma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\}$ sonlu çelişkisiz olmasın. Bu durumda $\Gamma_\alpha \cup \{\neg\varphi_\alpha\}$'nın sonlu çelişkisiz olduğunu savunuyoruz. Aksini varsayarsak $\Theta \cup \{\varphi_\alpha\}$ çelişkili olacak biçimde sonlu bir $\Theta \subseteq \Gamma_\alpha$ ve $\Theta' \cup \{\neg\varphi_\alpha\}$ çelişkili olacak biçimde sonlu bir $\Theta' \subseteq \Gamma_\alpha$ kümesi bulunabilir. $\Delta := \Theta \cup \Theta' \subseteq \Gamma_\alpha$ sonlu ve Γ_α sonlu çelişkisiz olduğundan Δ çelişkisizdir, dd. $\operatorname{mod}\Delta \neq \emptyset$. Şimdi $d \in \operatorname{mod}\Delta$ olsun. $d(\varphi_\alpha) = 1$ ise $\Theta \cup \{\varphi_\alpha\}$ çelişkisiz, $d(\varphi_\alpha) = 0$ ise $\Theta \cup \{\neg\varphi_\alpha\}$ çelişkisiz olacaktır. Bunlar varsayımlarımızla çelişir. Sonuçta $\Gamma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\}$ sonlu çelişkisiz değilse $\Gamma_\alpha \cup \{\neg\varphi_\alpha\}$ sonlu çelişkisizdir. Öyleyse $\Gamma_{\alpha+1} = \Gamma_\alpha \cup \{\neg\varphi_\alpha\}$ sonlu çelişkisizdir. Son olarak λ bir limit sırasayısı ve her $\xi < \lambda$ için Γ_ξ sonlu çelişkisiz olsun. $\Theta \subseteq \Gamma_\lambda$ sonlu kümesi keyfi verilsin $(\Gamma_\xi)_{\xi<\lambda}$ dizisi $\subseteq$ bağıntısına göre monoton artan olduğundan bir $\xi < \lambda$ için $\Theta \subseteq \Gamma_\xi$ olur ve tümevarım koşulundan Θ çelişkisizdir. Kanıtın devamı Ω_m yerine Γ^* almak koşuluyla ilk kanıtın aynısıdır. ■

Not 2.6.17 Genel topolojinin temel bilgilerini bilen okurlar için teoremimizin, adının kaynağını da açıklayacak, üçüncü bir kanıtını vereceğiz. Topolojiden kompakt uzayların çarpım uzaylarının çarpım topolojisiyle ele alındığında kompakt olduğunu biliyoruz (Tychonov Teoremi). Bu teoremin kanıtı da iyi sıralama teoremini veya örneğin Zorn Lemması gibi ona eşdeğer bir başka teoremi kullanır.). $\mathbf{2}$ ayrık topoloji ile kompakttır. Tychonov Teoremi'nden dolayı ${}^P\mathbf{2}$ çarpım topolojisiyle bir kompakt topolojik uzaydır. $p \in P$ için

$$S_p^1 := \{d \in {}^P\mathbf{2} \mid d(p) = 1\} \text{ ve } S_p^0 := \{d \in {}^P\mathbf{2} \mid d(p) = 0\}$$

silindirleri bu uzayın topolojisinin bir altbazıdır. $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in P^n$ ve $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{2}^n$ için

$$S_{\mathbf{p}}^{\mathbf{a}} = S_{p_1}^{a_1} \cap \cdots \cap S_{p_n}^{a_n}$$

olsun. Bunlar hem açık hem de kapalı kümelerdir (alıştırma). $\varphi \in \mathrm{Omf}$ ve $\deg\varphi = \{p_1, \ldots, p_n\}$ ise

$$\operatorname{mod}(\varphi) = \bigcup_{\mathbf{a}\in\mathbf{2}^n,\, \varphi[\mathbf{a}]=1} S_{\mathbf{p}}^{\mathbf{a}}$$

kümeleri de hem açık hem de kapalıdırlar ($\bigcup_{a\in\emptyset} S_{\mathbf{p}}^{\mathbf{a}} = \emptyset$!). Bunun sonucu olarak her sonlu $\Gamma \subseteq \mathrm{Omf}$ için $\operatorname{mod}\Gamma$ kapalıdır.

Şimdi Φ'nin her sonlu altkümesinin bir modeli olsun. Bu durumda

$$\{\operatorname{mod}\Gamma \mid \Gamma \subseteq \Phi \text{ ve } \Gamma \text{ sonlu}\}$$

ailesi ${}^P2$ kompakt uzayımızın boştan farklı kapalı kümelerinin sonlu arakesit özelliğine sahip bir ailesidir (alıştırma). Dolayısıyla

$$\operatorname{mod}\Phi = \bigcap\{\operatorname{mod}\Gamma \mid \Gamma \subseteq \Phi \text{ ve } \Gamma \text{ sonlu}\} \neq \emptyset.$$

▲

2.6.3 Kompaktlık Teoremi'nin Uygulamaları

$V \neq \emptyset$ ve $E \subseteq V \times V$ yansımasız ve bakışımlı bir bağıntı ise (V, E) ikilisine bir **yönlenmemiş çizge** denir. V kümesinin öğelerine çizgenin **köşeleri,** E'nin öğelerine ise çizgenin **kenarları** denir. Bir anımsatma:

E **yansımasızdır** [4]:$\Longleftrightarrow \forall a \in V\ (a, a) \notin E$ ve

E **bakışımlıdır** :$\Longleftrightarrow \forall a, b \in V\ ((a, b) \in E \Longrightarrow (b, a) \in E)$.

Her $(a, b) \in E$ için $\{a, b\}$ iki öğeli bir kümedir. V'nin iki öğeli altkümelerinin kümesi $[V]^2$ ile gösterilir. Elbette

$$E^* := \{\{a, b\} \mid\}(a, b) \in E\} \subseteq [V]^2.$$

Bu nedenle (V, E) yönlenmemiş çizgesini (V, E^*) ikilisi olarak da tanımlayabilirsiniz, aynı kapıya çıkar:

$$(a, b) \in E \Longleftrightarrow \{a, b\} \in E^*$$

denkliği birinden diğerine geçişi sağlar. (V', E') çizgesine, $V' \subseteq V$ ve $E' = E \cap (V' \times V')$ ise (V, E) çizgesinin bir **altçizgesi** denir. V' sonlu ise (V', E') çizgesi sonludur denir.

Renkler kümesi diyeceğimiz bir $R \neq \emptyset$ kümesi verilsin. Bir $f : V \to R$ fonksiyonu her $(a, b) \in E$ için $f(a) \neq f(b)$ olacak biçimde varsa (V, E) çizgesi R-**boyanabilir** ve f ise bir R-**boyamadır** denir. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $R = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ ise çizgemiz n-**boyanabilir** diyeceğiz.

Teorem 2.6.18 (Erdös-de Bruijn) *$n \in \mathbb{N}$ olsun. (V, E) yönlenmemiş çizgesinin her sonlu altçizgesi n-boyanabilir ise (V, E) çizgesinin kendisi de n-boyanabilir.*

[4]Her $x \in V$ için $(x, x) \in E$ ise E bağıntısı *yansımalıdır* denir. Burada "*yansımasız*" kavramını "*yansımalı değil*" olarak kullanmadığımızı belirtelim.

Kanıt. Her $x \in V$ ve her $k \in n$ için $p_x^k := (x,k)$ olsun. Asal önermelerimizin kümesi olarak $P := \{p_x^k \mid x \in V \text{ ve } k \in n\}$ kümesini alacağız. p_x^k asal önermemiz "x köşesi k ile boyanmıştır" olsun. Her $x \in V$ ve $(a,b) \in E$ için

$$\begin{aligned}
\varphi_x &:= p_x^0 \curlyvee p_x^1 \curlyvee \cdots \curlyvee p_x^{n-1} \\
\psi_x^{ij} &:= \neg(p_x^i \curlywedge p_x^j),\ 0 \le i < j \le n-1 \\
\eta_{ab}^k &:= \neg(p_a^k \curlywedge p_b^k),\ k = 0,1,\ldots,n-1 \\
\Phi &:= \{\varphi_x \mid x \in V\} \\
\Psi &:= \{\psi_x^{ij} \mid x \in V \text{ ve } 0 \le i < j \le n-1\} \\
\Theta &:= \{\eta_{ab}^k \mid (a,b) \in E \text{ ve } k = 0,1,\ldots,n-1\} \\
\Omega &:= \Phi \cup \Psi \cup \Theta
\end{aligned}$$

olarak tanımlansınlar. φ_x önermesi her x köşesinin en az bir renge boyandığını, ψ_x^{ij} önermesi x köşesinin farklı iki renge boyanmadığını, η_{ab}^k önermesi ise herhangi bir $(a,b) \in E$ kenarının köşelerinin farklı renklere boyandığını söyler.

Önce Ω'nın bir d yorumu varsa çizgemizin n-boyanabilir olduğunu görelim. x keyfi verilsin. $d(\varphi_x) = 1$ ve $d(\psi_x^{ij}) = 1$, $0 \le i < j \le n-1$ eşitlikleri bize tam bir $0 \le f(x) < n-1$ için $d(p_x^{f(x)}) = 1$ olduğunu söyler. Böylece tanımlanan $f : V \to R$ fonksiyonu $\models \Theta\,[d]$ olduğundan bir n-boyamadır. Burada $R = \{0,1,\ldots,n-1\}$ olduğunu anımsatalım.

Geriye $\operatorname{mod}\Omega \neq \emptyset$ olduğunu görmek kalıyor. $\Gamma \subseteq \Omega$ sonlu bir altküme olsun. Γ'nın içerdiği φ_x, ψ_x^{ij} ve η_{ab}^k formüllerinde geçen x ve a,b noktalarının sonlu kümesi V' olsun. $E' := E \cap (V' \times V')$ olmak üzere teoremin koşulundan dolayı (V',E') sonlu alt çizgesi n-boyanabilir. $f' : V' \to R$ bir n-boyama ise her $x \in V'$ için

$$d'(p_x^k) := \begin{cases} 1 & ,\ k = f'(x) \\ 0 & ,\ k \neq f'(x) \end{cases}$$

olarak tanımlayalım ve f' fonksiyonunu P'ye istenildiği gibi genişletelim. f' bir boyama olduğundan $d' \in \operatorname{mod}\Gamma$. Böylece her sonlu $\Gamma \subseteq \Omega$'nın en az bir modeli olduğunu gördük. Kompaktlık Teoremi'nden dolayı Ω'nın modelleri vardır. ■

Şimdi yönlenmemiş bir (V,E) çizgesi verilsin ve $V \subseteq \mathbb{R}^2$ olsun. Her $(a,b) \in E$ kenarı için a,b köşelerini bir doğru parçasıyla birleştirelim. Bu şekilde elde ettiğimiz kenarlar asla birbirini kesmiyorlarsa (V,E) çizgesine **düzlemseldir** diyelim.

Teorem 2.6.19 (Dört Renk Teoremi) *Her sonlu düzlemsel çizge 4-boyanabilir.*

Bu teorem şimdiye kadar yalnızca bilgisayar destekli kanıtlanabilmiştir. Bu teoremi kanıtlanmış varsayarsak, (2.6.18)'den aşağıdaki önermeyi elde ederiz.

Teorem 2.6.20 *Her düzlemsel çizge 4- boyanabilir.*

[17]'de sonlu dallanan her sonsuz ağacın bir sonsuz dalı olduğunu kanıtlamıştık. Şimdi bu teoremi Kompaktlık Teoremi yardımıyla kanıtlayacağız. Önce [17]'deki bazı tanımları anımsatalım. $\mathcal{T} = (T, <)$ kısmi sıralanmış kümesine her $x \in T$ için $T_x = \{t \in T \,|\, t < x\}$ olmak üzere $(T_x, <)$ iyi sıralanmış ve T'nin bir en küçük öğesi varsa bir **ağaç** diyeceğiz. $t_0 := \min T$ öğesine T ağacımızın **kökü** denir. T ağacının öğelerine bu ağacın **dallanma noktaları** veya **düğümleri** denir. T ağacının bir D **dalından** $\subseteq$ bağıntısına göre maksimal olan bir $D \subseteq T$ zincirini anlayacağız, dd. $(D, <$) doğrusal sıralanmıştır ve bu tip altkümeler arasında $\subseteq$ bağıntısına göre maksimaldir. $x, y \in T$ için $x < y$ ise ve $x < z < y$ olacak biçimde bir $z \in T$ yoksa y öğesi x öğesinin bir **dolaysız ardılı** ve x ise y öğesinin bir **dolaysız öncülüdür** denir. Her $x \in T$ öğesinin dolaysız ardılları sonlu ise $\mathcal{T}$ ağacı **sonlu dallanmıştır** denir. Bir ağaçta herhangi bir öğenin birden fazla dolaysız öncülü olamaz (alıştırma).

Bir $Y \subseteq T$ zincirine $t_0 \in Y$ ise ve her $t_0 \neq t \in Y$ için t'nin dolaysız öncülü de Y'de ise (t_0'dan başlayan) bir **yol** diyeceğiz. $|Y| = n + 1$ ise Y'nin öğeleri $k = 1, \ldots, n$ olmak üzere t_k öğesi t_{k-1} öğesinin dolaysız ardılı olacak biçimde $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ olarak sıralanır. Bu yola uzunluğu n olan, t_0'dan t_n'e giden veya t_0'ı t_n'e bağlayan bir yol diyelim. Bir ağaçta t_0'dan t_n'e giden bir yol varsa bu yolun tek olarak belirli olduğunu göstermeyi alıştırma olarak bırakıyoruz. Ayrıca her dal açık olarak bir yoldur.

Teorem 2.6.21 (König) *Sonlu dallanan bir $(T, <)$ ağacında her n için uzunluğu n olan bir yol varsa en az bir sonsuz yol da vardır.*

Kanıt. $t_0 := \min T$ ağacımızın kökü olmak üzere $Y_0 := \{t_0\}$ ve her $n \geq 1$ için Y_n ise uzunluğu n olan bir yolla t_0'a bağlanabilen $t \in T$ öğelerinin kümesi olsun. Varsayımdan dolayı her n için $Y_n \neq \emptyset$. Diğer yandan ağacımız sonlu dallandığı için her Y_n sonludur.

Y'nin bir sonsuz yol olması tam da

1. Her n için $|Y \cap Y_n| = 1$ ve
2. Her $y \in Y$ ve her $t \in T$ için $t < y$ ise $t \in Y$)

demektir. (2.6.18)'de olduğu gibi burada da bir P asal önermeler kümesini ve onlarla oluşturulan uygun bir Φ formül kümesini öyle seçeceğiz ki Φ'nin bir modeli olması böyle bir Y yolunun varlığını versin. Her $t \in T$ öğesine bir p_t değişkeni veya asal önermesi karşılık getirelim (Farklı t'lere farklı p_t'ler

karşılık getirilecektir; örneğin sabit bir p ile $p_t = (p, t)$ alınabilir.). $t, u \in T$ olmak üzere

$$\varphi_n := \bigvee_{t \in Y_n} p_t,\ \psi_n := \bigwedge_{t,u \in Y_n,\, t \neq u} \neg(p_t \barwedge p_u),\ \eta_{tu} := p_u \to p_t$$
$$\Phi := \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\psi_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\eta_{tu} \mid t, u \in T \text{ ve } t < u\}$$

olarak açıklansın.

Önce $d \in \operatorname{mod} \Phi$ ise $Y := \{t \in T \mid d(p_t) = 1\}$ kümesinin bir yol olduğunu görelim. $d(\varphi_n) = 1$ tam da $Y \cap Y_n \neq \emptyset$ anlamına gelir, $d(\psi_n) = 1$ ise bu bilgiyi $|Y \cap Y_n| = 1$ eşitliğine dönüştürür. $u \in Y$ ve $t < u$ ise $d(\eta_{tu}) = 1$'den $t \in Y$ elde edilir.

Sonlu $\Gamma \subseteq \Phi$ kümesi keyfi verilsin. $\deg \Gamma = \bigcup_{\xi \in \Gamma} \deg \xi$ sonlu bir kümedir.

$$m := \max\{n \mid p_t \in \deg \Gamma \text{ ve } t \in Y_n\}$$

olsun. Bir $t_m \in Y_m$ seçelim ve $t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ olmak üzere $Y^* := \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ bir yol olsun. $d : P \to 2$ dönüşümü her $t_k \in Y^*$ için $d(p_{t_k}) = 1$ ve her $T \backslash Y^*$ içinse $d(p_t) = 0$ olarak açıklansın. $\models \Gamma\,[d]$ olduğu apaçıktır.

Her sonlu $\Gamma \subseteq \Phi$ kümesinin bir modeli olduğundan Kompaktlık Teoremi'nden dolayı $\operatorname{mod} \Phi \neq \emptyset$ ve işimiz biter. ■

$G = (V, E)$ yönlenmemiş bir çizge ve V sonsuz olsun. Bir $W \subseteq V$ alt kümesine birbirinden *farklı her* $x, y \in W$ için $(x, y) \in E$ ise bağlantılı, birbirinden *farklı her* $x, y \in W$ için $(x, y) \notin E$ ise mutlak bağlantısızdır denir. Ramsey Teoremi'nin bir basit uygulaması aşağıdaki teoremdir ([17], Problem 4.0.3).

Teorem 2.6.22 *$G = (V, E)$ yönlenmemiş sonsuz bir çizge ise bağlantılı veya mutlak bağlantısız sonsuz bir altkümesi vardır.*

Şimdi bu teoreminin sonlu biçimi diyebileceğimiz aşağıdaki teoremi kanıtlayacağız.

Teorem 2.6.23 *Her $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısına karşılık bir $m \in \mathbb{N}$ doğal sayısı izleyen koşulu sağlayacak biçimde bulunabilir: $|V| \geq m$ olan her (V, E) çizgesinin n öğeli bir altkümesi bağlantılı veya mutlak bağlantısız olacak biçimde vardır.*

Kanıt. Savımızın yanlış olduğunu varsayalım. Bu durumda bir n doğal sayısı bulunabilir öyle ki her m doğal sayısına karşılık n öğeli bağlantılı veya mutlak bağlantısız altkümeleri olmayan m öğeli bir $G_m = (V_m, E_m)$ yönlenmemiş çizgesi vardır.

Şöyle bir yol izleyeceğiz: Modelleri (2.6.22) ile çelişen çizgeler tanımlamamıza izin veren önermemantıksal bir Φ formüller kümesi tanımlamaya çalışacağız.

X herhangi bir küme ve $k \in \mathbb{N}$ ise X kümesinin k öğeli altkümelerinin kümesini $[X]^k$ ile gösterelim. Değişkenler kümemiz $P := [\mathbb{N}]^2$ olsun. Her $A \in [\mathbb{N}]^n$ için

$$\varphi_A := \bigvee_{p \in [A]^2} p \quad \text{ve} \quad \psi_A := \bigvee_{p \in [A]^2} \neg p$$

olmak üzere

$$\Phi := \{\varphi_A \mid A \in [\mathbb{N}]^n\} \cup \{\psi_A \mid A \in [\mathbb{N}]^n\}$$

olsun.

Şimdi Φ'nin bir modeli olduğunu varsayalım ve $d \in \Phi$ olsun. $V := \mathbb{N}$ ve $E := \{p \in [\mathbb{N}]^2 \mid d(p) = 1\}$ olmak üzere (V, E) yönlenmemiş sonsuz bir çizgedir. Bu çizgede n öğeli bağlantılı bir altküme olamayacağı gibi n öğeli mutlak bağlantısız bir altküme de olamayacağını göstereceğiz. Bu ise (2.6.22) ile çelişir. Gerçekten de $A \in [V]^n = [\mathbb{N}^n]$ keyfi verilsin. $d(\varphi_A) = 1$ olduğundan en az bir $p = (x, y) \in A$ için $d(p) = 1$ olur ve dolasıyla A mutlak bağlantısız olamaz. Yine $d(\psi_A) = 1$ olduğundan en az bir $p' = (x', y') \in A$ için $d(\neg p') = 1$ olacağından A bağlantılı da olamaz.

Geriye Φ'nin bir modeli olduğunu göstermek kalıyor. Kompaktlık Teoremi'nden dolayı her sonlu $\Gamma \subseteq \Phi$'nın bir modeli olduğunu göstermek yeterlidir. $\Gamma \subseteq \Phi$ sonlu bir küme olsun. $M := \bigcup \deg \Gamma$ sonludur ve $m := |M|$ olsun. Varsayımımızdan dolayı m öğeli bir (V_m, E_m) yönlenmemiş çizgesi n öğeli bağlantılı veya mutlak bağlantısız altkümesi olmayacak biçimde vardır. $V_m^* := V_m \cup M$ dersek $\deg \Gamma \subseteq [V_m^*]^2$ olduğu apaçıktır. Ayrıca (V_m^*, E_m) yönlenmemiş çizgesi (V_m, E_m) yönlenmemiş çizgesine yeni kenar eklenmeden, en fazla yeni köşeler eklenerek elde edildiğinden (V_m^*, E_m) çizgesinde de n öğeli bağlantılı veya mutlak bağlantısız altkümeler yoktur. Bu nedenle

$$d(p) = 1 :\Longleftrightarrow p \in E_m$$

ile tanımlanan $d : P \to 2$ değerlemesi Γ'nın bir modelidir. İşimiz biter. ■

Önermeler Mantığının İlksavlaştırılması

Biz formüllerimizden hepdoğru olanların peşindeyiz. Ayrıca Γ formül kümesi ve ψ formülü verildiğinde yine $\Gamma \Vdash \psi$ ile gösterdiğimiz bir çıkarım kavramı var. Bu anlambilimsel bir kavramdır ve tüm $\varphi \in \Gamma$ formüllerini doğru kılan her d yorumunda ψ formülünün de doğru olduğunu söyler.

Formüllerimizi içeriklerinden arındırdık, ancak henüz hiçbir şey kazanmış değiliz. Henüz kanıtlarımız içeriksel kanıtlardır. Yenilik, kanıtlarımızı

da içeriksel olmaktan çıkarıp sonlu ve kontrol edilebilir mekanik işlemlere dönüştürdüğümüz zaman ortaya çıkar. Bir sonraki bölümde ayrıntılı biçimde inceleyeceğimiz biçimsel kuramlar ve kanıtlara örnek oluşturmak üzere Önermeler Mantığını biçimsel kuram olarak ele alacağız. Yapacağımız işi kısaca özetleyelim.

Her şeyden önce önermeler mantığını ilksavlaştırmak istiyoruz. Bunun için hepdoğrularımızdan bir kısmını ilksavlarımız (aksiyomlarımız) olarak seçeceğiz. Mantık işlemlerimizden fonksiyonel tam olan herhangi bir gruptan yola çıkılabilir. Biz $\neg$ ve $\rightarrow$ ile başlayacağız, dd. abecemiz

$$P \cup \{\neg, \rightarrow, (,)\}$$

olacaktır. Sonra ilksavlardan yola çıkarak bir takım biçimsel çıkarım kuralları yardımıyla, açıkça tanımlayacağımız, içeriksel irdelemeler içermeyen, tümüyle mekanik yöntemler olan biçimsel kanıtlarla bir takım formüllere ulaşacağız. Bu biçimde elde ettiğimiz formüllerimize biçimsel kanıtlanabilir formüller diyelim. ψ formülünün biçimsel kanıtlanabilir bir formül olduğunu $\vdash \psi$ ile göstereceğiz. Yine ψ formülünün Γ formül kümesi ile benzer biçimde biçimsel kanıtlanabilir olmasını tanımlayacak ve bunu $\Gamma \vdash \psi$ ile göstereceğiz. İlksavlarımız, kurallarımız ve tanımlarımızdan beklentimiz, çelişkisizlik, ilksavların bağımsızlığı vb. dışında şunlardır:

1. Dürüstlük (Doğruluk veya Kusursuzluk): Kurallarımız yanlış şeyler kanıtlayıp bizi yanıltmamalı; yalnızca hepdoğrular kanıtlanabilir olmalıdır, dd. her ψ için

$$\vdash \psi \text{ ise } \models \psi, \text{ dd. } \Vdash \psi.$$

2. Tamlık: Her hepdoğru kanıtlanabilir olmalıdır, dd.

$$\models \psi, \text{ dd. } \Vdash \psi \text{ ise } \vdash \psi.$$

Biz her ψ formülü ve her Γ formül kümesi için

$$\Gamma \vdash \psi \Longleftrightarrow \Gamma \Vdash \psi$$

olmasını sağlayacağız. Bunu başardığımız an $\Vdash \psi$ ve $\Gamma \Vdash \psi$ mantıksal (anlamsal) çıkarımlarını, hiçbir içeriksel irdeleme içermeyen, tümüyle mekanik $\vdash \psi$ ve $\Gamma \vdash \psi$ işlemlerine dönüştürmüş olacağız.

Frege, 1879'da $\neg, \rightarrow$ işlemcileri, 6 ilksav şeması ve bir tek çıkarım kuralından –ayırmadan– yola çıkarak önermeler mantığını ilksavlaştırmıştır. Bu yaklaşım, ilksav şema sayısı üçe indirilerek, 1928 yılında Lukasiewicz tarafından yalınlaştırılmıştır. Bu yaklaşıma kısaca FL önermeler mantığı diyeceğiz.

2.7 Frege-Lukasiewicz (FL) Önermeler Mantığı

- **Abece:** P bir sonsuz küme olmak üzere $A := P \cup \{\neg, \to,), (\}$. P kümesini verilmiş ve sabit tutacağımızdan Omf P ve Hd P yerine kısaca Omf ve Hd yazacağız. Hepdoğrularımızdan bir kısmını **ilksavlar** (veya **aksiyomlar**) olarak seçeceğiz.

- **İlksav Şemaları:** $\varphi, \psi, \eta \in$ Omf olmak üzere:

$$\begin{aligned} \sigma_1(\varphi, \psi) &:= \varphi \to (\psi \to \varphi)\,, \\ \sigma_2(\varphi, \psi, \eta) &:= (\varphi \to (\psi \to \eta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \eta)) \text{ ve} \\ \sigma_3(\varphi, \psi) &:= (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi) \end{aligned}$$

  olsun. Ilk FL , yanlış anlaşılmayacağımızı umduğumuzda ise Ilk ile tüm ilksavlarımızın kümesini gösterelim. $\varphi, \psi, \eta \in$ Omf olmak üzere $\sigma_1(\varphi, \psi)$ bir tek ilksav değil, her $\varphi, \psi \in$ Omf için bir ilksav veren bir ilksavlar şemasıdır. Benzeri $\sigma_2(\varphi, \psi, \eta)$ ve $\sigma_3(\varphi, \psi)$ içinde geçerlidir; bunların her biri bize sonsuz çoklukta ilksavlar verir. Burada φ, ψ, η sözeden değişkenlerdir, bunların yerine gerçekten formüller yazdığımızda bize ilksav verirler. Örneğin $p, q, r \in P$ olmak üzere $\sigma_1(\neg p, q \to r) = \neg p \to ((q \to r) \to \neg p$ bir ilksavdır.

- **Çıkarım Kuralları:** Bir tek çıkarım kuralımız var: **Ayırma(modus ponens)**. Omf kümesinin Bc ile göstereceğimiz bir altkümesini az ileride tanımlayacak ve öğelerine Omf kümesindeki **biçimsel çıkarımlar** veya **biçimsel teoremler** diyeceğiz. $\varphi \in$ Bc yerine $\vdash \varphi$ yazacağız. Ayırma çıkarım kuralından şunu anlayacağız:

$$\vdash \varphi \text{ ve } \vdash \varphi \to \psi \text{ ise } \vdash \psi$$

  , dd. $\varphi \in$ Bc ve $(\varphi \to \psi) \in$ Bc ise $\psi \in$ Bc. Eğer P'yi vurgulamak gerekirse Bc ve $\vdash$ yerine Bc_P ve $\vdash_P$ yazacağız.

- **Tanımlanmış Mantık İmleri**

  1. $(\neg\varphi \to \psi)$ yerine $(\varphi \curlyvee \psi)$,
  2. $\neg(\varphi \to \neg\psi)$ yerine $(\varphi \curlywedge \psi)$ ve
  3. $(\varphi \to \psi) \curlywedge (\psi \to \varphi)$, dd. $\neg((\varphi \to \psi) \to \neg(\psi \to \varphi))$ yerine $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ yazacağız.

Tanım 2.7.1 $\Gamma \subseteq$ Omf *ve* $\varphi \in$ Omf *olmak üzere* Omf *formüllerinden oluşan* sonlu *bir* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *dizisine aşağıdaki koşullar sağlandığında* φ *formülünün bir* Γ-***biçimsel kanıtı (bkanıtı)*** *denir: Her* i *için*

(1) φ_i bir ilksavdır veya
(2) $\varphi_i \in \Gamma$ veya
(3) φ_i kendinden önce gelen iki formülden ayırma ile elde edilmiştir, dd. $j < i$ ve $k < i$ doğal sayıları bulunabilir öyle ki φ_k formülü $\varphi_j \to \varphi_i$ formülünden başka bir şey değildir. Bu durumda φ_i formülü, kendinden önce gelen, φ_j ve $\varphi_j \to \varphi_i$ formüllerinden ayırmayla elde edilmiştir denir.
(4) $\varphi_n = \varphi$.

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ dizisi φ_n formülünün bir Γ-bkanıtı ise ve Γ'yi vurgulamak gerekiyorsa bunu kısaca

$$(\Gamma)\ \ \varphi_1, \ldots, \varphi_n$$

olarak göstereceğiz. φ formülünün bir biçimsel Γ-kanıtı varsa bu

$$\Gamma \vdash \varphi$$

ile gösterilir.

φ formülünün bir biçimsel Γ-kanıtı varsa φ formülü Γ'dan **biçimsel çıkarılabilir(türetilebilir)** veya φ formülü Γ ile **biçimsel kanıtlanabilir** veya φ bir Γ-**biçimsel çıkarımdır**(veya **biçimsel teoremdir**) denir. $\Gamma \vdash \varphi$ ifadesindeki Γ **önsavlarımızın (varsayımlarımızın** veya **hipotezlerimizin)** kümesi, φ ise **savımızdır (çıkarımımızdır** veya **tezimizdir**)**.** φ_i formüllerinin uzun olması durumunda kanıtı

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \text{ yerine } \begin{matrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{matrix}$$

olarak yazmayı yeğleyeceğiz.

$$\Gamma \cup \{\eta_1, \ldots, \eta_n\} \vdash \varphi \text{ yerine } \Gamma, \eta_1, \ldots, \eta_n \vdash \varphi$$
$$\{\psi_1, \ldots, \psi_m\} \vdash \varphi \text{ yerine } \psi_1, \ldots, \psi_m \vdash \varphi$$

yazacağız. $\Psi \subseteq \mathrm{Omf}$ olmak üzere

$$\vdash \varphi :\Longleftrightarrow \emptyset \vdash \varphi$$
$$\Gamma \vdash \Psi :\Longleftrightarrow \text{ Her } \psi \in \Psi \text{ için } \Gamma \vdash \psi.$$
$$\Gamma \vdash \psi_1, \ldots, \psi_n :\Longleftrightarrow \Gamma \vdash \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}.$$

$\vdash \varphi$ ise, φ **biçimsel kanıtlanabilir** veya bir **biçimsel çıkarımdır** veya **biçimsel teoremdir** diyeceğiz. $\emptyset$-kanıtı yerine ise kısaca **biçimsel kanıt** diyeceğiz.

Uzlaşma: Yalınlık açısından

Γ-biçimsel kanıt	yerine	**Γ-bkanıt**
biçimsel kanıtlanabilir	yerine	**bkanıtlanabilir**
biçimsel kanıt	yerine	**bkanıt**

kısaltmalarını da kullanacağız. $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi$ dizisi φ formülünün bir Γ-bkanıtı olsun. Bizi yalnızca *böyle bir kanıtın varlığı* ilgilendiriyor, ancak $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$'ler ilgilendirmiyorsa bu durumda yalın olarak "$\ldots, \varphi$ bir Γ-bkanıtı olsun" diyeceğiz.

Not 2.7.2 1. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ dizisi φ_n formülünün bir Γ-bkanıtı ise her $1 \leq m \leq n$ için $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ dizisi φ_m formülünün bir Γ-bkanıtıdır.
2. $\Gamma \vdash \varphi$ ise sonlu sayıda $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \Gamma$ formülleri $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \vdash \varphi$ olacak biçimde vardır.
3. $k = 1, \ldots m$ olmak üzere$\ldots, \psi_k$ bir Γ-bkanıtı ise

$$\ldots, \psi_1, \ldots, \psi_2, \ldots\ldots, \psi_m$$

bir Γ-bkanıtıdır.
4. $\Gamma \vdash \Psi$ ve $\Psi \vdash \varphi$ ise $\Gamma \vdash \varphi$. ▲

Γ-biçimsel teoremlerimizin kümesini

$$\mathrm{Bc}\,\Gamma := \{\psi \mid \Gamma \vdash \psi\}\,.$$

ile göstereceğiz. $\mathrm{Bc} := \mathrm{Bc}\,\emptyset$ kümesi kuramımızın biçimsel çıkarımlar kümesi olacaktır. Tanımın doğrudan sonucu olarak

1. $\Gamma \subseteq \mathrm{Bc}\,\Gamma$,
2. $\mathrm{Bc}(\mathrm{Bc}\,\Gamma) = \mathrm{Bc}\,\Gamma$,
3. $\Gamma \subseteq \Psi$ ise $\mathrm{Bc}\,\Gamma \subseteq \mathrm{Bc}\,\Psi$

özellikleri kolayca görülür.

$\overline{\Gamma}$ ile $\mathrm{Ilk} \cup \Gamma$ kümesinin Omf kümesinde modus ponense göre *kapanışını* gösterelim, dd. $\overline{\Gamma}$ kümesi Omf kümesinin aşağıdaki koşulları sağlayan Ψ altkümelerinin en küçüğüdür:

(1) $\mathrm{Ilk} \cup \Gamma \subseteq \Psi$,

(2) $\eta, \eta \to \kappa \in \Psi$ ise $\kappa \in \Psi$.

Besbelli ki $\overline{\Gamma}$ kümesi (1) ve (2)'yi sağlayan $\Psi \subseteq \mathrm{Omf}$ kümelerinin arakesitidir.

Teorem 2.7.3 $\overline{\Gamma} = \mathrm{Bc}\,\Gamma$, *dd.* $\mathrm{Bc}\,\Gamma$ *kümesi* $\mathrm{Ilk} \cup \Gamma$ *kümesinin* $\mathrm{Omf}\,P$ *kümesinde ayırmaya göre kapanışıdır.*

Kanıt. $\overline{\Gamma} \subseteq \mathrm{Bc}\,\Gamma$ *yönü:* Bunun için $\mathrm{Bc}\,\Gamma$ kümesinin yukarıdaki (1) ve (2) özelliklerini sağladığını göstermek yeterlidir. $\varphi \in \mathrm{Ilk} \cup \Gamma$ ise φ dizisi φ formülünün bir Γ-bkanıtıdır, dolayısıyla $\varphi \in \mathrm{Bc}\,\Gamma$ ve (1) sağlanır. Şimdi $\eta, \eta \to \kappa \in \mathrm{Bc}\,\Gamma$ olsunlar. $\ldots, \eta$ ve $\ldots, \eta \to \kappa$ birer Γ-bkanıt olmak üzere $\ldots, \eta, \ldots, \eta \to \kappa, \kappa$ dizisi κ formülünün bir Γ-bkanıtıdır, dolayısıyla $\kappa \in \mathrm{Bc}\,\Gamma$ ve (2) sağlanır.

$\mathrm{Bc}\,\Gamma \subseteq \overline{\Gamma}$ *yönü:* n üzerinden tümevarımla, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ bir Γ-bkanıt ise $\varphi_n \in \overline{\Gamma}$ olduğunu kanıtlayacağız. $n = 1$ ise $\varphi_1 \in \mathrm{Ilk} \cup \Gamma$ ve $\varphi_1 \in \overline{\Gamma}$ olur. Önerme n için kanıtlanmış ve $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1}$ bir Γ-bkanıt olsun. $1 \leq m \leq n$ için $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ de bir Γ-bkanıt olduğundan varsayımımızda ötürü $\varphi_m \in \overline{\Gamma}$ olur. Bu durumda ya $\varphi_{n+1} \in \mathrm{Ilk} \cup \Gamma$, ya da φ_{n+1} kendinden önce gelen iki formülden ayırma ile kazanılmıştır. Her iki durumda da $\varphi_{n+1} \in \overline{\Gamma}$ olur. ■

Önerme 2.7.4 *FL kuramımız dürüsttür, dd.* $\vdash \varphi$ *ise* $\Vdash \varphi$.

Kanıt. Tanım gereği her ilksavımız bir biçimsel teoremdir; biçimsel teoremlerimiz ise ilksavlardan yola çıkarak ayırmayla kazanacağımız tüm formüllerdir. Tüm ilksavlarımız birer hepdoğru olduklarından, ayrıca φ ve $\varphi \to \psi$ birer hepdoğru olduğunda ψ de bir hepdoğru olduğundan kuramımızın tüm biçimsel teoremleri birer hepdoğrudur, dolayısıyla kuramımız dürüsttür, dd. $\mathrm{Bc} \subseteq \mathrm{Hd}$. ■

Not 2.7.5 Bkanıt kavramımızı genelleştirebiliriz.

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$$

dizisinde, $\varphi_n = \varphi$ ve her bir $1 \leq i < n$ için $\varphi_i \in \mathrm{Ilk} \cup \Gamma \cup \mathrm{Bc}\,\Gamma$ olsun veya φ_i kendisinden önce gelen iki formülden ayırma ile elde edilmiş olsun. Böyle bir dizi φ formülünün bir Γ-bkanıtına dönüştürülebilir. Gerçekten de bu dizideki her bir φ_i biçimsel teoremi yerine kendisinin $\ldots, \varphi_i$ gibi bir biçimsel Γ-kanıtını yazdığımızda φ formülünün bir Γ-bkanıtı elde edilir. Bu nedenle böyle bir diziye, φ formülünün bir **genelleştirilmiş Γ-bkanıtı** veya bir **Γ-bkanıt taslağı** diyeceğiz. Bundan sıkça yararlanılır. Bu tam da geleneksel matematikteki bir durumu yansıtır. Orada da, örneğin φ'nin Gruplar Kuramı'nın bir teoremi olduğunu kanıtlamak istediğimizde, her defasında Gruplar Kuramı'nın ilksavlarından başlamayız ve o ana kadar kanıtlamış olduğumuz teoremlerden de yararlanırız. Bir anlamda kanıtlanmış teoremlerimizi ilksavlarmış gibi kullanırız. ▲

Aşağıda vereceğimiz teoremlerde, ayrıca belirtmeden, φ, ψ ve η *keyfi verilmiş formüller* olacaklardır. Diğer yandan amacımız $\vdash$ biçimsel çıkarımın $\Vdash$ mantıksal çıkarıma denk olduğunu kanıtlamaktır. Bu nedenle daha önce $\Vdash$ mantıksal çıkarımına ilişkin kazandığımız teoremler, aşağıdaki $\vdash$ biçimsel çıkarımına ilişkin teoremlerimize ışık tutacaktır.

Önerme 2.7.6 $\varphi \to \varphi \in \mathrm{Bc}$, *dd.* $\vdash \varphi \to \varphi$.

Kanıt. $\varphi_1 := \sigma_1(\varphi, \varphi \to \varphi)$, $\varphi_2 := \sigma_2(\varphi, \varphi \to \varphi, \varphi)$, $\varphi_3 := (\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$, $\varphi_4 := \sigma_1(\varphi, \varphi)$ ve $\varphi_5 := \varphi \to \varphi$ olmak üzere $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ dizisi $\varphi \to \varphi$ formülünün bir kanıtıdır. Burada φ_1, φ_2, φ_4 birer ilksavdır; φ_3 formülü φ_1 ve φ_2'den ayırma ile elde edilmişken, φ_5 formülü ise φ_3 ve φ_4'ten ayırma ile elde edilmiştir. Kanıtı daha iyi izlenebilir kılmak için φ_i formüllerini yukarıdan aşağıya açık ifadeleriyle yazacağız ve bir ikinci sütunda gerekçeleri vereceğiz:

(1)	$\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$	Ilk
(2)	$(\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$	Ilk
(3)	$(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$	(a)
(4)	$\varphi \to (\varphi \to \varphi)$	Ilk
(5)	$\varphi \to \varphi$	(b)

Burada (a)=(1)+(2)+(MP) ve (b)=(3)+(4)+(MP). ■

Önerme 2.7.7 (Γ-ayırma) $\Gamma \vdash \varphi$ *ve* $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ *ise* $\Gamma \vdash \psi$.

Kanıt. $, \ldots, \varphi$ ve $\ldots, \varphi \to \psi$ birer Γ-bkanıtları iseler, $\ldots, \varphi \ldots, \varphi \to \psi, \psi$ bize, ayırma ile, ψ'nin bir Γ-bkanıtını verir. ■

Önerme 2.7.8 $\Gamma \vdash \varphi$ *ve* $\Gamma \subseteq \Gamma'$ *ise* $\Gamma' \vdash \varphi$.

Kanıt. Aşikâr. ■

Teorem 2.7.9 (Herbrand Çıkarım Lemması)

$$\Gamma, \varphi \vdash \psi \Longleftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \to \psi.$$

Özel olarak: $\varphi \vdash \psi \Longleftrightarrow \vdash \varphi \to \psi$.

Sonuç 2.7.10 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi \in \mathrm{Omf}\, P$ *için*

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \iff \vdash \varphi_1 \to \varphi_2 \cdots \to \varphi_n \to \psi.$$

Kanıt. 1. $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ olsun. $\ldots, \varphi \to \psi$ bir Γ-bkanıt ise $\ldots, \varphi \to \psi, \varphi, \psi$ bize ψ'nin bir $\Gamma \cup \{\varphi\}$-bkanıtını verir, dd. $\Gamma, \varphi \vdash \psi$.

2. $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ ve $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ise ψ'nin bir $\Gamma \cup \{\varphi\}$-bkanıtı olsun. Şimdi n üzerinden tümevarım uygulayacağız.

$n = 1$ olsun. Bu durumda $\varphi_1 := \psi$ olmak zorundadır, dolayısıyla ψ bir ilksav veya $\psi \in \Gamma$ veya $\psi = \varphi$. $\psi = \varphi$ ise (2.7.6)dan $\vdash \varphi \to \varphi$, dolayısıyla $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ olur. Şimdi ψ bir ilksav veya $\psi \in \Gamma$ olsun. Bu durumda $\psi, \sigma_1(\psi, \varphi), \varphi \to \psi$ dizisi $\varphi \to \psi$'nin bir Γ-bkanıtıdır. Diğer gösterimle

(1)	ψ	ilksav veya $\psi \in \Gamma$
(2)	$\psi \to (\varphi \to \psi)$	ilksav $\sigma_1(\psi, \varphi)$
(3)	$\varphi \to \psi$	(1), (2), (MP).

Şimdi $n > 1$ ve her $1 \leq m < n$ için $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ bir $\Gamma \cup \{\varphi\}$-bkanıtı ise $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi_m$ kanıtlanmış olsun (tvk). Eğer $\psi = \varphi$ ise (2.7.6)'dan $\vdash \varphi \to \psi$ olur, eğer ψ bir ilksav veya $\psi \in \Gamma$ ise, az önceki gibi $\psi, \sigma_1(\psi, \varphi), \varphi \to \psi$ dizisi $\varphi \to \psi$'nin bir Γ-kanıtıdır. Şimdi $\psi \notin \Gamma$, $\psi \neq \varphi$ ve ψ bir ilksav da olmasın. Bu durumda $\varphi_n = \psi$ formülü kendisinden önce gelen iki formülden ayırma ile elde edilmiş olmak zorundadır. Dolayısıyla $1 \leq i, j < n$ doğal sayıları φ_i formülü $\varphi_j \to \psi$ olacak biçimde bulunabilirler. Hipotezden dolayı her $1 \leq m < n$ için, (2.7.2) ile, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ bir $\Gamma \cup \{\varphi\}$-kanıtıdır; dolayısıyla tümevarım koşulumuzdan $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi_m$. bu nedenle

1.	$\Gamma \vdash \varphi \to \varphi_j$	tvk
2.	$\Gamma \vdash \varphi \to (\varphi_j \to \psi)\,,\ (\varphi_i = (\varphi_j \to \psi)!)$	tvk
3.	$\Gamma \vdash (\varphi \to (\varphi_j \to \psi)) \to ((\varphi \to \varphi_j) \to (\varphi \to \psi))$	$\sigma_2(\varphi, \varphi_j, \psi)$
4.	$\Gamma \vdash (\varphi \to \varphi_j) \to (\varphi \to \psi)$	2., 3., (2.7.7)
5.	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	1., 4., (2.7.7).

Burada 3. için şunu belirtmekte yarar var: $\sigma_2(\varphi, \varphi_j, \psi)$ bir ilksav olduğunda her Γ için $\Gamma \vdash \sigma_2(\varphi, \varphi_j, \psi)$ olduğu aşikârdır.

Sonucun kanıtı: Art arda Herbrand Çıkarım Lemması uygulanır:

$$\begin{aligned}
\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi &\iff \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1} \vdash \varphi_n \to \psi \\
&\iff \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2} \vdash \varphi_{n-1} \to (\varphi_n \to \psi) \\
&\vdots \\
&\iff \vdash \varphi_1 \to (\varphi_2(\cdots \to (\varphi_n \to \psi) \cdots)) \\
&\iff \vdash \varphi_1 \to \varphi_2 \cdots \to \varphi_n \to \psi.
\end{aligned}$$

■

Teorem 2.7.11 (Doğruluk Teoremi) $\Gamma \vdash \psi \Longrightarrow \Gamma \Vdash \psi$.

Kanıt. $\Gamma \vdash \psi$ olsun. $\exists \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Gamma$ öyle ki $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$. (2.7.10) ile $\vdash \varphi_1 \to \cdots \to \varphi_n \to \psi$, (2.7.4) ile $\Vdash \varphi_1 \to \cdots \to \varphi_n \to \psi$, buradan ise (2.6.11) ile $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \Vdash \psi$ ve $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subseteq \Gamma$ olduğundan $\Gamma \Vdash \psi$ olur. ■

Not 2.7.12 (2.6.12)'de söylenenler burada da geçerlidir. Γ'dan $\varphi \to \psi$'yi türetmek, $\Gamma \cup \{\varphi\}$'den ψ'yi türetmeye denktir. ▲

Önerme 2.7.13 (Zincir Kuralı) $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ *ve* $\Gamma \vdash \psi \to \eta$ *ise bu durumda* $\Gamma \vdash \varphi \to \eta$.*Özel olarak* $\Gamma = \emptyset$ *için* $\varphi \to \psi,\ \psi \to \eta \in \mathrm{Bc}$ *ise* $\varphi \to \eta \in \mathrm{Bc}$.

Kanıt. $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ olduğundan Herbrand çıkarım kuralıyla $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ elde edilir. $\Gamma \vdash \psi \to \eta$ olduğundan (2.7.8) ile $\Gamma, \varphi \vdash \psi \to \eta$ olur. (2.7.7)'den $\Gamma \cup \{\varphi\}$-ayırma ile $\Gamma, \varphi \vdash \eta$, ve buradan bir kez daha Herbrand çıkarım kuralı ile $\Gamma \vdash \varphi \to \eta$ elde edilir. ■

Önerme 2.7.14 $\Gamma \vdash \varphi \to (\psi \to \eta)$ *ve* $\Gamma \vdash \psi$ *ise* $\Gamma \vdash \varphi \to \eta$.

Kanıt.

1.	$\Gamma \vdash \varphi \to (\psi \to \eta)$	vrs
2.	$\Gamma \vdash \psi$	vrs
3.	$\Gamma, \varphi \vdash \psi$	2, (2.7.8)
4.	$\Gamma, \varphi \vdash \psi \to \eta$	1, (2.7.9)
5.	$\Gamma, \varphi \vdash \eta$	3, 4, (2.7.7)
6	$\Gamma \vdash \varphi \to \eta$	5, (2.7.9).

■

Önerme 2.7.15 $\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$.

Kanıt.

(1)	$\neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	$\sigma_1(\neg\varphi, \neg\psi)$ ilksav
(2)	$(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$	$\sigma_3(\psi, \varphi)$ ilksav
(3)	$\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$	(1), (2), (2.7.13)

■

Not 2.7.16 Formüllerimize bir anlam yüklemesek de, onların yine de anlamsal formülleri biçimselleştirdiklerini biliyoruz. Bu nedenle tüm önermelerimizi içeriksel olarak da okuyup kanıtları da bu bağlamda izlemek son derece yararlıdır. Örneğin $\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$ biçimsel teoremi "φ yanlışsa, φ'den her ψ çıkar" olarak okuyabiliriz. ▲

Önerme 2.7.17 $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$.

Kanıt.

1.	$\neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi)$	(2.7.15), $\varphi \rightsquigarrow \neg\varphi$, $\psi \rightsquigarrow \neg\neg\neg\varphi$
2.	$(\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \to \varphi)$	$\sigma_3(\varphi, \neg\neg\varphi)$
3.	$\neg\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \to \varphi)$	1, 2, zincir kuralı
4.	$\neg\neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$	3, (2.7.9)
5.	$\neg\neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi$	(2.7.6)
6.	$\neg\neg\varphi \vdash \varphi$	4, 5 ve (2.7.7)
7.	$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$	6 ve (2.7.9).

Doğru anlaşılmak adına 1.'deki ifadenin (2.7.15)'te φ yerine $\neg\varphi$ ve ψ yerine $\neg\neg\neg\varphi$ yazılarak elde edildiğini belirtelim. ■

Önerme 2.7.18 $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$.

Kanıt.

1.	$\vdash \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$	(2.7.17), $\varphi \rightsquigarrow \neg\varphi$
2.	$\vdash (\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \neg\neg\varphi)$	$\sigma_3(\neg\neg\varphi, \varphi)$
3.	$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$	1, 2 ve (2.7.7).

■

Önerme 2.7.19 $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$.

Kanıt. (2.7.9)'dan dolayı $\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$ olduğunu kanıtlamak yeterlidir.

1.	$\varphi \to \psi$	vrs
2.	$\neg\neg\varphi \to \varphi$	(2.7.17)
3.	$\neg\neg\varphi \to \psi$	2, 1, zincir kur.
4.	$\psi \to \neg\neg\psi$	(2.7.18)
5.	$\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi$	3, 4, zincir kur.
6.	$(\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	$\sigma_3(\neg\varphi, \neg\psi)$
7.	$\neg\psi \to \neg\varphi$	5, 6, zincir kur.

Bu 7 formül dizisinde bir tek $\varphi \to \psi$ varsayımı var ve diğerleri ise, $\neg\psi \to \neg\varphi$ dışında, ilksavlar, teoremler veya bu tiplerden ayırmalarla elde edilenler olduğundan $(\varphi \to \psi) \vdash (\neg\psi \to \neg\varphi)$, dolayısıyla $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ elde edilir (bkz. (2.7.5) ■

Önerme 2.7.20 $\vdash \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$.

Kanıt. $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$ ayırmasına art arda iki kez Herbrand Çıkarım Lemması'nı uygularsak sırasıyla $\varphi \vdash (\varphi \to \psi) \to \psi$, ardın da $\vdash \varphi \to ((\varphi \to \psi) \to \psi)$ elde ederiz. Bu çıkarım ve (2.7.19)'da φ yerine $(\varphi \to \psi)$ alarak elde ettiğimiz $\vdash ((\varphi \to \psi) \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$ çıkarımından (2.7.13) zincir kuralı ile sav elde edilir. ■

Önerme 2.7.21 $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ *ve* $\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi$ *ise* $\Gamma \vdash \psi$.

Kanıt. $\Gamma, \varphi \vdash \psi \overset{(2.7.9)}{\Longleftrightarrow} \Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Buradan (2.7.19) ve (2.7.7) Γ-ayırması ile $\Gamma \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$ elde edilir. Benzer biçimde $\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi \overset{(2.7.9)}{\Longleftrightarrow} \Gamma \vdash \neg\varphi \to \psi$ denkliğinden yola çıkarak (2.7.19) ve (2.7.7) Γ-ayırması ile $\Gamma \vdash \neg\psi \to \neg\neg\varphi$ elde edilir. Dolayısıyla "$\Gamma \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$ ve $\Gamma \vdash \neg\psi \to \neg\neg\varphi$ ise $\Gamma \vdash \psi$ olduğunu gösterirsek işimiz biter.

1.	$\Gamma \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$	vrs
2.	$\Gamma \vdash \neg\psi \to \neg\neg\varphi$	vrs
3.	$\Gamma \vdash \neg\psi \to (\neg\neg\varphi \to \neg\,(\neg\psi \to \neg\varphi))$	(2.7.20)(*)
4.	$\Gamma \vdash (\neg\psi \to (\neg\neg\varphi \to \neg\,(\neg\psi \to \neg\varphi))) \to$ $((\neg\psi \to \neg\neg\varphi) \to (\neg\psi \to \neg\,(\neg\psi \to \neg\varphi)))$	(**)
5.	$\Gamma \vdash (\neg\psi \to \neg\neg\varphi) \to (\neg\psi \to \neg\,(\neg\psi \to \neg\varphi))$	3, 4, Γ-(MP)
6.	$\Gamma \vdash \neg\psi \to \neg(\neg\psi \to \neg\varphi)$	2, 5 ve Γ-(MP)
7.	$\Gamma \vdash (\neg\psi \to \neg\,(\neg\psi \to \neg\varphi)) \to ((\neg\psi \to \neg\varphi) \to \psi)$	(***)
8.	$\Gamma \vdash (\neg\psi \to \neg\varphi) \to \psi$	6, 7 ve Γ-(MP)
9.	$\Gamma \vdash \psi$	1, 8 ve Γ-(MP)

Burada (*), (2.7.20)'de $\varphi \rightsquigarrow \neg\psi$, $\psi \rightsquigarrow \neg\varphi$ değişimleri yapılacağını belirtirken, (**) $\sigma_2(\neg\psi, \neg\neg\varphi, \neg(\neg\psi \to \neg\varphi))$ ve (***) ise $\sigma_3(\psi, \neg\psi \to \neg\varphi)$ ilksavıdır. ■

Önerme 2.7.22 $\deg\varphi = \{p_1, \ldots, p_n\}$ *olan bir* φ *formülü ve bir* $d : P \to \{0,1\}$ *değerlemesi verilsin. Her* $1 \le i \le n$ *için* $d(p_i) = 1$ *ise* $p'_i := p_i$ *ve* $d(p_i) = 0$ *ise* $p'_i := \neg p_i$ *olarak açıklansın. Ayrıca* $d(\varphi) = 1$ *ise* $\varphi' := \varphi$ *ve* $d(\varphi) = 0$ *ise* $\varphi' := \neg\varphi$ *olsun. Bu durumda* $p'_1, \ldots, p'_n \vdash \varphi'$.

Kanıt. Formülümüz yalnızca $\neg$ ve $\to$ mantık imlerini içersin, tanımlanmış $\curlywedge$, $\curlyvee$, $\leftrightarrow$ imlerini içermesin. Bu durumda formüllerimiz şu üç tipten birindendir: φ ya bir değişkendir, ya $\neg\psi$, ya da $\psi \to \eta$ tipindedir. φ'nin $n := \mathrm{mu}(\varphi)$ mantıksal uzunluğu üzerinden tümevarım uygulayacağız.

1. $\mathrm{mu}(\varphi) = 0$ olsun. Bu durumda $\varphi = p_1$. $d(p_1) = 1$ ise $p'_1 = p_1$ ve $d(\varphi) = 1$ olduğundan $\varphi' = \varphi$ olur. Bu durumda savımız $\varphi \vdash \varphi$ olur ki doğrudur. $d(\varphi) = 0$ olduğunda ise $p'_1 = \neg p_1$ ve $\varphi' = \neg\varphi$ olacağından, savımız $\neg\varphi \vdash \neg\varphi$ şeklini alır ki bu da doğrudur.

2. $n \ge 1$ ve savımız mantıksal uzunluğu $< n$ olan formüller için kanıtlanmış olsun.

2.1. φ formülü $\neg\psi$ tipinde olsun. $\mathrm{mu}(\psi) < n$ olacağından savımız ψ için doğrudur.

2.1.a. $d(\psi) = 1$ olsun. Bu durumda $\psi' = \psi$ ve $\varphi' = \neg\varphi = \neg\neg\psi$ olur. Tümevarım koşulundan $p'_1, \ldots, p'_n \vdash \psi$; diğer yandan (2.7.18)'den $\vdash \psi \to \neg\neg\psi$. Bu ikisinden ayırma ile $p'_1, \ldots, p'_n \vdash \neg\neg\psi$, dolayısıyla $p'_1, \ldots, p'_n \vdash \varphi'$ elde edilir.

2.1.b. $d(\psi) = 0$ olsun. Bu durumda $\psi' = \neg\psi$ ve $d(\varphi) = 1$ olduğundan $\varphi' = \varphi$. Tümevarım koşulundan $p'_1, \ldots, p'_n \vdash \psi'$, ancak $\varphi' = \varphi = \neg\psi = \psi'$ olduğundan $p'_1, \ldots, p'_n \vdash \varphi'$.

2.2. φ önermesi $\psi \to \eta$ olsun. $\mathrm{mu}(\psi) < n$ ve $\mathrm{mu}(\eta) < n$ olacağından savımız ψ ve η için doğrudur, dd. $p'_1, \ldots, p'_n \vdash \psi'$ ve $p'_1, \ldots, p'_n \vdash \eta'$.

2.2.a. $d(\psi) = 0$ olsun. Bu durumda $\psi' = \neg\psi$ ve $d(\varphi) = 1$ olacağından $\varphi' = \varphi$ olur. Tümevarım koşulundan $p'_1, \ldots, p'_n \vdash \neg\psi$, (2.7.15)'ten $\vdash \neg\psi \to$

$(\psi \to \eta)$ olduğundan, bu ikisinden ayırma ile $p'_1, \ldots, p'_n \vdash \psi \to \eta$ elde ederiz ve $\varphi' = \varphi = \psi \to \eta$ olduğundan işimiz biter.

2.2.b. $d(\eta) = 1$ olsun. Bu durumda $\eta' = \eta$ ve $d(\varphi) = 1$ olacağından $\varphi' = \varphi$ olur. Tümevarım koşulundan $p'_1, \ldots, p'_n \vdash \eta$. Bu ve $\sigma_1(\eta, \psi)$ ilksavı $\vdash \eta \to (\psi \to \eta)$'dan ayırma ile $p'_1, \ldots, p'_n \vdash \psi \to \eta$. $\varphi' = \psi \to \eta$ olduğundan işimiz biter.

2.2.c. $d(\psi) = 1$ ve $d(\eta) = 0$. Bu durumda $\psi' = \psi$, $\eta' = \neg\eta$ ve $\varphi' = \neg\varphi$ olur.

(1)	$p'_1, \ldots, p'_n \vdash \psi$	tvk
(2)	$p'_1, \ldots, p'_n \vdash \neg\eta$	tvk
(3	$\vdash \psi \to (\neg\eta \to \neg(\psi \to \eta))$	(2.7.20)
(4)	$p'_1, \ldots, p'_n \vdash \neg\eta \to \neg(\psi \to \eta)$	(1), (3), (MP)
(5)	$p'_1, \ldots, p'_n \vdash \neg(\psi \to \eta)$	(2), (4), (MP)

$\varphi' = \neg(\psi \to \eta)$ olduğundan işimiz biter. ■

Teorem 2.7.23 (Tamlık Teoremi) *$\Vdash \varphi$ ise $\vdash \varphi$. Sözlerle: φ mantıksal doğru, eş anlamlı olmak üzere bir hepdoğru ise φ bir biçimsel teoremdir, dolayısıyla*

$$\models \varphi \iff \vdash \varphi, \ \ dd. \ \Vdash \varphi \iff \vdash \varphi.$$

Sonuç 2.7.24 *Her $\varphi \in \operatorname{Omf} P$ formülü ve her $\Gamma \subseteq \operatorname{Omf} P$ için*

$$\Gamma \Vdash \varphi \iff \Gamma \vdash \varphi.$$

Kanıt. (Kalmár): φ bir hepdoğru ve $\deg \varphi = \{p_1, \ldots, p_n\}$ olsun. Her $d : P \to \{0, 1\}$ değerlemesi için, φ bir hepdoğru olduğundan $\varphi' = \varphi$ olduğunu gözetirsek, (2.7.22) ile $p'_1, \ldots, p'_n \vdash \varphi$ elde ederiz. d değerlemesini sırasıyla $d(p_n) = 1$ ve $d(p_n) = 0$ olarak seçerek sırasıyla

(1) $p'_1, \ldots, p'_{n-1}, p_n \vdash \varphi$,

(2) $p'_1, \ldots, p'_{n-1}, \neg p_n \vdash \varphi$

elde ederiz. $p'_1, \ldots, p'_{n-1}, p_n \vdash \varphi$ ve $p'_1, \ldots, p'_{n-1}, \neg p_n \vdash \varphi$ biçimsel çıkarımları ve (2.7.21)'den $p'_1, \ldots, p'_{n-1} \vdash \varphi$ elde edilir. Bu işlemi sürdürürsek sonlu adımda $\vdash \varphi$ elde ederiz. Böylece $\Vdash \varphi \Longrightarrow \vdash \varphi$ elde ederiz. $\vdash \varphi \Longrightarrow \Vdash \varphi$ ise (2.7.4)'te gösterilmişti.

(2.7.24)'ün kanıtı: $\Gamma \vdash \varphi \iff$ Sonlu sayıda $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Gamma$ formülleri $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ olacak biçimde vardır. Devam edersek

$$\begin{aligned} \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi &\overset{(2.7.10)}{\iff} \vdash \varphi_1 \to \cdots \to \varphi_n \to \varphi \\ &\overset{(2.7.23)}{\iff} \Vdash \varphi_1 \to \cdots \to \varphi_n \to \varphi \\ &\overset{(2.6.11)}{\iff} \varphi_1, \cdots, \varphi_n \Vdash \varphi. \end{aligned}$$

$\Delta := \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ olmak üzere $\Gamma \vdash \varphi$ önermesinin $\Delta \Vdash \varphi$ olacak biçimde bir sonlu $\Delta \subseteq \Gamma$ kümesinin bulunmasına denk olduğunu gösterdik. (2.6.16) teoreminden dolayı ise bu $\Gamma \Vdash \varphi$ önermesine denktir. ■

Sonuç 2.7.25 *FL kuramımızda hiçbir formülümüz için hem φ hem de $\neg\varphi$ biçimsel teorem olamaz, dd. FL kuramı* ***biçimsel tutarlıdır.***

Kanıt. Hem φ hem de $\neg\varphi$ biçimsel teorem olması her ikisinin de hepdoğru olması demektir ki söz konusu olamaz! ■

Not 2.7.26 φ formülünde tanımlanmış mantık imlerini kullanarak, $\neg, \rightarrow$, $\curlywedge, \curlyvee$ ve $\leftrightarrow$ imlerinin tümünü veya bir kısmını içeren ψ formülünü elde edelim. ψ'nin bir hepdoğru olması φ'nin bir hepdoğru olmasına denk olduğundan (2.7.23)'ten dolayı ψ'nin hepdoğru olması φ'nin bir biçimsel teorem olmasına denktir. ▲

Tamlık Teoremi'nin ikinci bir kanıtını vereceğiz. Bu kanıt (2.6.15) kompaktlık teoreminin kanıtının bir anlamda biçimselleştirilmesi olacaktır. Önce Γ kümesi için verdiğimiz anlamsal tutarlı (çelişkisiz) ve anlamsal tutarsız(çelişkili) kavramlarını biçimselleştireceğiz. Amacımız $\Gamma \Vdash \psi \iff \Gamma \vdash \psi$ olduğunu kanıtlamaktır. Bunun bir yönünü Doğruluk Teoremi olarak kanıtladık. Gösterilmesi gereken $\Gamma \Vdash \psi \implies \Gamma \vdash \psi$ yönüdür. Γ'nın biçimsel tutarsız olması her ψ formülü için $\Gamma \vdash \psi$ olmasıdır. Dolayısıyla Γ biçimsel tutarsızsa $\Gamma \Vdash \psi \implies \Gamma \vdash \psi$ doğrudur. Öyleyse biçimsel tutarlı Γ kümelerine odaklanacağız. Her biçimsel tutarlı Γ kümesinin bir modeli olduğunu benzer biçimde kanıtlayacağız. $\Gamma \Vdash \psi \implies \Gamma \vdash \psi$ önermesini ise $\Gamma \nvdash \psi \implies \Gamma \nVdash \psi$ karşı konum ilkesi ile göstereceğiz. $\Gamma \nvdash \psi$ ise $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ kümesinin biçimsel tutarlı olduğunu kanıtlayacağız. Bu durumda $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ kümesinin varlığını kanıtlayacağımız d modeli için $d \models \neg\psi$ olacağından $d \not\models \psi$ olur ve böylece $\Gamma \nVdash \psi$ elde ederiz ve işimiz biter. Şimdi bunu adım adım gerçekleştirelim. Bu kanıt yöntemini üçüncü bölümde birinci dereceden biçimsel mantık kuramlarının tamlığını gösterirken de kullanacağız.

Tanım 2.7.27 *$\Gamma \subseteq \mathrm{Omf}\, P$ olmak üzere $\Gamma \vdash \psi$ ve $\Gamma \vdash \neg\psi$ olacak biçimde bir $\psi \in \mathrm{Omf}\, P$ formülü varsa ve ancak bu durumda Γ kümesi* ***biçimsel tutarsızdır*** *(veya* ***biçimsel çelişkilidir)*** *denir. Aksi durumda Γ kümesi* ***biçimsel tutarlıdır*** *(veya* ***biçimsel çelişkisizdir)*** *denir.*

Tanımı şöyle de dile getirebiliriz:

$$\Gamma \text{ biçimsel tutarlıdır} \iff \forall \varphi \in \mathrm{Omf}\, P\ (\Gamma \nvdash \varphi \vee \Gamma \nvdash \neg\varphi)$$

Önerme 2.7.28 $\Gamma \subseteq \operatorname{Omf} P$ *olsun.* Γ*'nin biçimsel tutarsız olması için gerek ve yeter koşul* $\operatorname{Bc}\Gamma = \operatorname{Omf} P$*, dd. her* $\psi \in \operatorname{Omf} P$ *için* $\Gamma \vdash \psi$ *olmasıdır. Tersten söylersek* Γ*'nin biçimsel tutarlı olması için gerek ve yeter koşul en az bir* $\psi \in \operatorname{Omf} P$ *için* $\Gamma \nvdash \psi$ *olmasıdır.*

Kanıt. 1. Γ biçimsel tutarsız olsun. En az bir ψ için $\Gamma \vdash \psi$ ve $\Gamma \vdash \neg\psi$. Şimdi $\varphi \in \operatorname{Omf} P$ keyfi verilsin. (2.7.15)'ten dolayı $\neg\psi \to (\psi \to \varphi)$ bir biçimsel teoremdir. Dolayısıyla

$$\neg\psi, \psi, \neg\psi \to (\psi \to \varphi), \psi \to \varphi, \varphi$$

iki kez ayırma ile bir genelleştirilmiş Γ-bkanıttır, dd. $\Gamma \vdash \varphi$.

2. Her φ için $\Gamma \vdash \varphi$ ise elbette aynı zamanda $\Gamma \vdash \neg\varphi$ olacağından Γ biçimsel tutarsızdır. ■

Her φ için $\varphi \to \varphi$ bir biçimsel teorem olduğundan Γ'nin tutarlı olması en az bir (ve elbette her) φ için $\Gamma \nvdash \neg(\varphi \to \varphi)$ olmasına denktir. Tanımlanmış imlerle $\neg(\varphi \to \varphi) = \varphi \curlywedge \neg\varphi$ olduğundan bu en az bir φ için $\Gamma \nvdash (\varphi \curlywedge \neg\varphi)$ demektir. Özellikle

$$\Gamma \text{ biçimsel tutarlı} \iff \Gamma \nvdash \bot$$

Önerme 2.7.29 $\Gamma \subseteq \operatorname{Omf} P$ *ve* $\psi \in \operatorname{Omf} P$ *olsun.*

(1) $\Gamma \vdash \psi \iff \Gamma \cup \{\neg\psi\}$ *biçimsel tutarsızdır.*

(2) $\Gamma \vdash \neg\psi \iff \Gamma \cup \{\psi\}$ *biçimsel tutarsızdır.*

(3) Γ *biçimsel tutarlı ise* $\Gamma \cup \{\psi\}$ *veya* $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ *biçimsel tutarlıdır.*

Kanıt. (1) $\Longrightarrow$: $\Gamma \vdash \psi$ ise $\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \psi, \neg\psi$ olacağından $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ biçimsel tutarsızdır.

(1) $\Longleftarrow$: $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ biçimsel tutarsız ise (2.7.28)'den $\Gamma, \neg\psi \vdash \psi$ olur. Diğer yandan $\Gamma, \psi \vdash \psi$ aşikârdır. (2.7.21)'den $\Gamma \vdash \psi$ olur.

(2) ise (1) gibi kanıtlanır.

(3): Sav doğru değilse teoremin (1) ve (2)'sinden $\Gamma \vdash \neg\psi$ ve $\Gamma \vdash \psi$ elde edilir. Bu ise Γ'nin biçimsel tutarlı olmasıyla çelişir. ■

Not 2.7.30 (2.7.29)(1) ve (2) bildik çelişki yöntemiyle kanıt yöntemimizi biçimselleştirirler. Gerçekten de Γ varsayımlarımızdan ψ'yi kanıtlamak istediğimizde "ψ yanlış olsun" diyerek $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ varsayımlarından yola çıkarak bir çelişkiye ulaşırız. Bu genelde bir φ için φ ve $\neg\varphi$ formüllerinin doğru olduğunu göstererek elde edilir. $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ çelişkilidir, dolayısıyla sav doğrudur deriz. ▲

Önerme 2.7.31 Γ *biçimsel tutarlı ve*

$$\mathbb{F} := \{\Omega \,|\, \Gamma \subseteq \Omega \subseteq \operatorname{Omf} P,\ \Omega \text{ biçimsel tutarlı}\} \tag{2.30}$$

olmak üzere $(\mathbb{F}, \subseteq)$ *Zorn Lemması'nın koşullarını sağlar.*

Kanıt. $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{F}$ bir zincirse $\Sigma := \bigcup \mathcal{Z}$ kümesinin bu zincirin bir üst sınırı olduğunu göstermek yeterlidir. $\Gamma \subseteq \Sigma \subseteq \operatorname{Omf} P$ olduğundan Σ kümesinin biçimsel tutarlı olduğunu gösterirsek işimiz biter. Σ'nin biçimsel tutarsız olduğunu varsayalım. $\Sigma \vdash \psi$ ve $\Sigma \vdash \neg\psi$ olacak biçimde bir ψ formülü vardır. ψ ve $\neg\psi$ formüllerinin Σ-bkanıtlarında geçen, Σ kümesine ait *sonlu* sayıdaki formüllerin kümesi Δ olsun. Özellikle $\Delta \vdash \psi$ ve $\Delta \vdash \neg\psi$ olur. Δ sonlu bir küme ve $\mathcal{Z}$ bir zincir olduğundan bir $\Omega \in \mathcal{Z}$ kümesi $\Delta \subseteq \Omega$ olacak biçimde bulunabilir. Şimdi $\Omega \vdash \psi$ ve $\Omega \vdash \neg\psi$ elde ederiz ki bu Ω kümesinin biçimsel tutarlı olmasıyla çelişir! ■

Önerme 2.7.32 Ω_m *kümesi* $(\mathbb{F}, \subseteq)$*'de bir büyük öğe ise aşağıdakiler geçerlidir: Her* $\varphi, \psi \in \operatorname{Omf} P$ *için*

(1) Ya $\varphi \in \Omega_m$ *ya da* $\neg\varphi \in \Omega_m$*.*
(2) $\varphi \in \Omega_m \iff \Omega_m \vdash \varphi$*.*
(3) $\Omega_m \vdash \neg\varphi \iff \Omega_m \nvdash \varphi$ *ve* $\Omega_m \vdash \varphi \iff \Omega_m \nvdash \neg\varphi$*.*
(4) $\Omega_m \vdash \varphi \to \psi \iff \Omega_m \vdash \varphi$ *ise* $\Omega_m \vdash \psi$*.*

Kanıt. (1) Sav doğru olmasın. Ω_m büyük öğe olduğundan bu durumda $\Omega_m \cup \{\varphi\}$ ve $\Omega_m \cup \{\neg\varphi\}$ kümeleri biçimsel tutarsız olacaktır. Buradan (2.7.29) ile $\Omega_m \vdash \neg\varphi$ ve $\Omega_m \vdash \varphi$ elde edilir ki bu Ω_m kümesinin biçimsel tutarlı olmasıyla çelişir. Dolayısıyla Ω_m kümesi φ ve $\neg\varphi$ formüllerinden en az birini içerir; tutarlı olduğundan ikisini birden içeremez.

(2) $\Longrightarrow$ yönü apaçıktır. $\Longleftarrow$ yönü: $\varphi \notin \Omega_m$ olsun. (1)'den $\neg\varphi \in \Omega_m$, dolayısıyla $\Omega_m \vdash \neg\varphi$. Buradan ve Ω_m'nin tutarlılığından $\Omega_m \nvdash \varphi$ olur.

(3) Doğrudan (1) ve (2)'den çıkar.

(4) $\Longrightarrow$ yönü: $\Omega_m \vdash \varphi \to \psi$ olsun. Ayrıca $\Omega_m \vdash \varphi$ ise Ω_m-ayırma ile $\Omega_m \vdash \psi$.

$\Longleftarrow$ yönü: $\Omega_m \nvdash \varphi$ ise (3) ile $\Omega_m \vdash \neg\varphi$ olur. Bu ve (2.7.15) ile $\Omega_m \vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$ olacağından ayırma ile $\Omega_m \vdash \varphi \to \psi$ olur. Eğer $\Omega_m \vdash \varphi$ ve $\Omega_m \vdash \psi$ ise bu kez $\sigma_1(\psi, \varphi) = \psi \to (\varphi \to \psi)$ ilksavından da yararlanarak ayırma ile $\Omega_m \vdash \varphi \to \psi$ elde edilir. ■

Önerme 2.7.33 Γ *biçimsel tutarlı olsun.* $\mathbb{F}$ *(2.30) ile tanımlanmış,* Ω_m *kümesi* $(\mathbb{F}, \subseteq)$*'de bir büyük öğe olmak üzere bir* $d : P \to \{0, 1\}$ *değerlemesi her* φ *için*

$$d(\varphi) = 1 \iff \Omega_m \vdash \varphi \iff \varphi \in \Omega_m$$

olacak biçimde bulunabilir.

Kanıt. Ω_m bir önceki önermede olduğu gibi $(\mathbb{F}, \subseteq)$'de bir büyük öğe olsun. Bir $d : P \to \{0,1\}$ değerlemesi aşağıdaki gibi tanımlansın: Her $d \in P$ için

$$d(p) := \begin{cases} 1 & , \ p \in \Omega_m. \\ 0 & , \ p \notin \Omega_m. \end{cases}$$

(2.7.32)(2)'den her $p \in P$ için $d(p) = 1 \iff \Omega_m \vdash p$. Buradan yola çıkarak (FTK) ile her φ için

$$d(\varphi) = 1 \iff \Omega_m \vdash \varphi$$

olduğunu kanıtlayacağız. Önerme φ için kanıtlanmışsa (2.7.32)(3) ile

$$d(\neg\varphi) = 1 \iff d(\varphi) = 0 \overset{tvk}{\iff} \Omega_m \nvdash \varphi \iff \Omega_m \vdash \neg\varphi$$

elde edilir. Eğer sav φ ve ψ için kanıtlanmışsa, bu kez (2.7.32)(4) ile

$$\begin{aligned} d(\varphi \to \psi) = 1 &\iff d(\varphi) = 1 \text{ ise } d(\psi) = 1 \\ &\overset{tvk}{\iff} \Omega_m \vdash \varphi \text{ ise } \Omega_m \vdash \psi \\ &\iff \Omega_m \vdash \varphi \to \psi. \end{aligned}$$

Böylece (2.7.32)(2) ile birlikte her φ için $d(\varphi) = 1 \iff \Omega_m \vdash \varphi \iff \varphi \in \Omega_m$. ■

Teorem 2.7.34 (Tamlık Teoremi) *Her $\Gamma \subseteq \operatorname{Omf} P$ ve her $\psi \in \operatorname{Omf} P$ için*

$$\Gamma \Vdash \psi \iff \Gamma \vdash \psi.$$

Sonuç 2.7.35 *Bir $\Gamma \subseteq \operatorname{Omf} P$ kümesinin biçimsel tutarlı olması için gerek ve yeter koşul Γ'nin bir modelinin olmasıdır, dd. anlamsal tutarlı olmasıdır.*

Kanıt. $\Longleftarrow$ yönü (2.7.11) Doğruluk Teoremi olarak kanıtlandı.

$\Longrightarrow$ yönü: Γ biçimsel tutarsızsa her ψ için $\Gamma \vdash \psi$ olduğundan sav aşikârdır. Öyleyse Γ biçimsel tutarlı olsun. Savımızı karşı konum ilkesi ile kanıtlayacağız. $\Gamma \nvdash \psi$ olsun. (2.7.29)(1)'den $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ biçimsel tutarlıdır. $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ kümesini içeren biçimsel tutarlı $\Omega \subseteq \operatorname{Omf} P$ formül kümelerimiz arasında Ω^* bir büyük öğe olsun. (2.7.33)'ten dolayı Ω^*'ın bir d modeli vardır. Bu d modeli, dd. değerlemesi aynı zamanda $\{\Gamma, \neg\psi\}$'nin de bir modelidir; dolayısıyla $\Gamma \nVdash \psi$ olur.

Sonucun kanıtı: Γ biçimsel tutarsız $\iff \Gamma \vdash \bot \iff \Gamma \Vdash \bot \iff$ Hiçbir d değerlemesi Γ'nın modeli olamaz(olsaydı $d(\bot) = 1$ olurdu!). ■

Not 2.7.36 (2.6.15)'in Zorn Lemması yerine ona denk olan İyi Sıralama Teoremi'ni kullanan ikinci bir kanıtını vermiştik. Benzeri burada da yapılabilir. $|P| = \kappa$ sonsuz ise $|\operatorname{Omf} P| = \kappa$ (bkz. (2.2.8)). $\operatorname{Omf} P$ kümesini $(\varphi_\xi)_{\xi<\kappa}$ olarak iyi sıralayalım. Her $\alpha < \kappa$ için $\Gamma_\alpha \subseteq \operatorname{Omf}$ olmak üzere $(\Gamma_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ dizisini yinelgen tanımlamayla aşağıdaki gibi tanımlayalım:

1. $\Gamma_0 := \Gamma$.
2. $\Gamma_{\alpha+1} := \begin{cases} \Gamma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} & , \Gamma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} \text{ biçimsel tutarlı.} \\ \Gamma_\alpha \cup \{\neg\varphi_\alpha\} & , \Gamma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} \text{ biçimsel tutarsız.} \end{cases}$
3. $\Gamma_\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} \Gamma_\alpha$, λ limit sırasayısı.

Şimdi $\Gamma^* := \bigcup_{\alpha<\kappa} \Gamma_\alpha$ olsun. Γ^* kümesi $(\mathbb{F}, \subseteq)$'de bir büyük öğedir ve bir d değerlemesinin her φ için $d(\varphi) = 1 \iff \varphi \in \Gamma^*$ olacak biçimde bulunabileceğinin kanıtı yukarıda verilenin aynıdır. ▲

Böylece bir ψ formülünün bir Γ-bkanıtının olması ψ formülünün Γ'dan mantıksal olarak çıkmasına denktir. Dolayısıyla mantıksal ve biçimsel kavramlarımız örtüşürler; örneğin Γ'nın mantıksal tutarlı olması biçimsel tutarlı olmasına denktir.

Biz biçimsel çıkarım kurallarımızı

$$\varphi_1, \ldots \varphi_n \,|\, \psi$$

olarak göstermeyi yeğleyeceğiz. Ayırma kuralımızı

$$\varphi, \varphi \to \psi \,|\, \psi$$

olarak yazacağız. $\Vdash$ ve $\vdash$ bağıntılarının denkliğini gösterdiğimizden s. 70'deki mantıksal çıkarımlar bize doğrudan aşağıdaki temel biçimsel çıkarımları verirler.

Temel Biçimsel Çıkarımlar

$\varphi \vdash \varphi$	$\varphi \curlyvee \varphi \vdash \varphi$	$\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$	$\varphi \to \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi$
$\varphi \curlywedge \psi \vdash \varphi$	$\varphi \vdash \varphi \curlyvee \psi$	$\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$	$\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$
$\varphi \curlywedge \psi \vdash \psi$	$\varphi \vdash \psi \curlyvee \varphi$	$\varphi \vdash \psi \to \varphi$	$\varphi \to \neg\psi \vdash \psi \to \neg\varphi$
$\varphi \vdash \neg\neg\varphi$	$\neg\neg \vdash \varphi$	$\varphi \curlyvee \psi, \neg\psi \vdash \varphi$	$\varphi \to \psi, \psi \to \eta \vdash \varphi \to \eta$

Kitabımızın ikinci kısmında birinci dereceden mantıkları ilksavlaştırırken $\sigma_1(\varphi, \psi)$, $\sigma_2(\varphi, \psi, \eta)$ ve $\sigma_3(\varphi, \psi)$ ilksavları yine ilksavlarımız arasında olacaklar ve ayırma kuralı ise çıkarım kurallarımız arasında olacaktır. Dolayısıyla yukarıda verdiğimiz tüm biçimsel çıkarımları orada ayrıca kanıtlamadan kullanacağız!

Daha önce de başka ilksavlar ve çıkarım kurallarıyla da yola çıkılabileceğini söylemiştik. Belli başlı bir iki dizgeyi verelim. Tüm ilksavlarımız yine ilksav şemaları olarak anlaşılacaktır.

Hilbert-Bernays

- **Abece:** $P \sqcup \{\neg, \curlywedge, \curlyvee, \to, \leftrightarrow,), (\}$.
- **İlksavlar;**

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
   $(\varphi \to (\varphi \to \psi)) \to (\varphi \to \psi)$
   $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \eta) \to (\varphi \to \eta))$
2. $\varphi \curlywedge \psi \to \varphi$
   $\varphi \curlywedge \psi \to \psi$
   $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \eta) \to (\varphi \to \psi \curlywedge \eta))$
3. $\varphi \to \varphi \curlyvee \psi$
   $\psi \to \varphi \curlyvee \psi$
   $(\varphi \to \eta) \to ((\psi \to \eta) \to (\varphi \curlyvee \psi \to \eta))$
4. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\varphi \to \psi)$
   $(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\psi \to \varphi)$
   $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \varphi) \to ((\varphi \leftrightarrow \psi))$, (buraya kadar *pozitif mantık)*
5. $(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$, (buraya kadar *minimal kalkül)*
   $\varphi \to \neg\neg\varphi$, (buraya kadar *sezgisel mantık)*
   $\neg\neg\varphi \to \varphi$ (*klasik mantık)*

- **Çıkarım Kuralları:** $\varphi \,|\, \varphi(p|\psi)$ (yerine koyma) ve $\varphi, \varphi \to \psi \,|\, \psi$ (MP).

<u>**Shoenfield**</u>

- **Abece:** $P \sqcup \{\neg, \curlyvee,), (\}$. Diğer mantık imleri tanımlanmış imler olacaklar.
- **İlksavlar:** $\varphi \curlyvee \neg\varphi$
- **Çıkarım kuralları:** Dört çıkarım kuralımız var:

Genişleme:	$\psi \,\|\, \varphi \curlyvee \psi$,	Birleşme:	$\varphi \curlyvee (\psi \curlyvee \eta) \mid (\varphi \curlyvee \psi) \curlyvee \eta$
Kısaltma:	$\varphi \curlyvee \varphi \,\|\, \varphi$,	Kesme:	$\varphi \curlyvee \psi, \neg\varphi \curlyvee \eta \,\|\, \psi \curlyvee \eta$

<u>**Nicod**</u>

- **Abece:** $P \sqcup \{\uparrow,), (\}$. Alışıldık tüm mantık imlerimiz tanımlanmış imler olacaklardır.
- **İlksavlar:**
  $(\varphi \uparrow (\psi \uparrow \eta)) \uparrow ((\theta \uparrow (\theta \uparrow \theta)) \uparrow ((\tau \uparrow \psi) \uparrow ((\varphi \uparrow \tau)(\varphi \uparrow \tau))))$
- **Çıkarım Kuralı:** $\varphi, \varphi \uparrow (\psi \uparrow \eta) \,|\, \eta$

Elbette ilksavlar ve çıkarım kuralları ne kadar az ise ilerlemek o kadar zorlaşır. Nicod'un yaklaşımı ilginç ama doğal olmaktan çok uzaktır. Bizim yaklaşımımız veya Shoenfield'in yaklaşımı, ilksavları ve çıkarım kuralları birlikte düşünüldüğünde, fazla olmadan doğal olduklarından en çok yeğlenen yaklaşımlardır.

Bölüm 3

BİRİNCİ DERECEDEN KURAMLAR

Daha Öklid döneminde geometride bir şey fark edilmişti: Geometrinin tüm teoremleri, doğrulukları apaçık olan bir avuç yasadan yola çıkılarak kanıtlanabilirler. Bu baştaki apaçık doğrulara geometrinin *ilksavları* (veya *belitleri* veya *aksiyomları*) denir. Bu "*apaçık olma*" sonradan darbe yedi. Bir yandan biz bugün Öklid Geometrisi'nden farklı ve gerçekten işe yarar başka geometriler tanıyoruz. Diğer yandan Öklid Geometrisi'nin ilksavlarındaki *nokta, doğru* ve *düzlem* gibi temel kavramlar *tanımlanmışlardır.* Biz bugün bu tanımların *gerçekten bir tanım olmadıklarını* biliyoruz. Bir yandan bu ilksavların apaçık doğrular oldukları savunulurken diğer yandan kullandıkları temel kavramlar gerçekte var olmayan, içinde yaşadığımız uzaydan soyutlanmış *ideal nesnelerdir.* Herkesin bildiği gibi dünyamızda, Öklid Geometrisinin anlamak istediği anlamda ne nokta ne doğru ne de düzlem vardır.

İlksavsal yaklaşım bu kadar eskidir. Bundan yaklaşık iki bin yıl sonra matematikçiler bir başka şey fark ettiler: Gerçek sayılar ve onların toplama işlemi, matrisler ve onların toplama işlemi, tanım kümeleri aynı olan kompleks değerli fonksiyonlar ve onların toplama işlemi, sıfırdan farklı gerçek sayılar ve onların çarpma işlemi söz konusu olduğunda ve benzeri sayısız durumda farklı şeyler yapıldığı sanılırken yaptığımız bir çok şeyin aslında bir anlamda aynı şeyler olduğu anlaşıldı. Bu bizi *yapı* kavramına götürdü.

Yapılar söz konusu olduğunda iki tür teoremlerimiz vardır: söz konusu yapının *her* modelinde geçerli olan teoremler ve bu yapının *özel bir* modelinde geçerli olan teoremler. Örneğin yapımız sıralı cisimler olduğunda

$$\forall x \left(x \neq 0 \Rightarrow 0 < x^2 \right)$$

önermesi her sıralı cisimde doğrudur; buna karşın

$$\forall x \left(0 < x \Rightarrow \exists y \left(x = y^2\right)\right)$$

önermesi $\mathbb{Q}$ sıralı cisminde yanlış, $\mathbb{R}$ sıralı cisminde doğrudur.

İlerde ayrıntılı biçimde tanımlayacağımız gibi bir $\mathfrak{A}$ yapısı bir $A \neq \emptyset$ kümesi, bu kümeden seçilmiş bir $\mathcal{C}$ sabitler kümesi ve bazı A-fonksiyonları bazı A-bağıntıları ve bunlarla dile getirilen bazı ilksavlardan oluşur. Yapı kavramının temelinde *kümeler* vardır. Ancak kümeler söz konusu olduğunda bir takım açmazlarla karşılaşıldı(bkz. [17]). Özellikle Frege'nin sandığı gibi her kavramının kaplamının belirli olmadığını öğrendiğimiz gibi, Dedekind'in yaptığı gibi her tür soyut şeyi bir araya getirip küme oluşturma özgürlüğümüz olmadığını da öğrendik. Diğer yandan mantıksal çıkarımların bizzat kendilerini de inceleme konusu yapabilir, tıpkı geometri de olduğu gibi, mantıksal çıkarımları da bir avuç, "*mantıksal ilksavlar*" diyeceğimiz, mantıksal çıkarımlardan kazanabiliriz. Hilbert'in *biçimsel kuramlar* yaklaşımı, tüm bu sorunlara çözüm arayan, mantıksal çıkarımları da kişisellikten arındıran ve aşağıdaki alıntılarda çok net görülen, bir *içerikten arındırılmış denetlenebilir somutlaştırmadır.*

> Gördüğümüz gibi, genel kavram kaplamları ve içeriklerle soyut işlemler yapmak yetersiz ve güvensiz olarak ortaya çıktı. Mantıksal çıkarımlar ve mantıksal operasyonların işlemesinin ön koşulu olarak daha çok tasarımımızda bir şeyler olmak zorundadır: ortada mantık dışı bazı ayrık ϕ nesneleri her düşünceden önce dolaysız algılama olarak bulunmalıdır. Mantıksal çıkarımlar güvenli olacaksa, bu nesneler tüm ayrıntılarında kavranabilmeli ve aynı zamanda onların nesnelerle gösterilmeleri, ayırt edilmeleri ve birbirini izlemeleri bizim için, daha başka bir şeye indirgenemeyen dolaysız görsel bir şeyler olmalıdır. Bu bakış açısını alan benim için - Frege ve Dedekind'in tam zıttı olarak- Sayılar Kuramı'nın nesneleri, biçimleri yerden, zamandan, imlerin oluşturulmasının özel koşullarından ve gösterimlerindeki ufak farklardan bağımsız olarak bizlerce genel olarak ve güvenle tanınabilen imlerin bizzat kendileridir. Saf matematiğin - üstelik tüm bilimsel düşünme, anlama ve aktarmanın- inşaası için benim değişmez felsefi duruşum buradadır: *Başlangıçta* - burada böyledir- *im vardır* ([49], s. 162-3).[1].

[1]"Wie wir sahen, hat sich das abstrakte operieren mit allgemeinen Begriffsumfängen und Inhalten als unzulänglich und unsicher herausgestellt. Als Vorbedingung über die Awendung logischer Schlüsse und Betätigung logischer Operationen muß vielmehr schon

> Eğer Hilbert gibi biri için "Sayılar Kuramı'nın nesneleri bizzat imlerse", böyle bir anlatım göz ardı edilemez. Sayıları ideal nesneler veya saf bilincin bir eyleminden oluşan olasılıklar olarak gören idealist yaklaşıma karşın burada insanın somut işini göz önünde tutan bir "antropik" yaklaşım ortaya çıkar. Burada matematikçi, imlerden oluşturulmuş formülleriyle, atölyesinde odun, rende, testere ve tutkalla marangozun yaptığına benzer davranır. [97]

Bir *biçimsel kuramın nesneleri*, her şeyden önce, hiç bir imine bir anlam yüklenmemiş bir $W \neq \emptyset$ abecesinin *terimler* ve *formüller* diyeceğimiz bir takım sözcükleri olacaktır. W abecesi iki *ayrık* kümeden oluşacaktır: Biri L ile göstereceğimiz kuramın **nesne dili**, diğeri ise tüm biçimsel kuramlarımızda ortak olacak olan $O = \{), (, \neg, \to, \dot{\forall}\}$ kümesidir. $L = \emptyset$ olabilir. L kümesine bir **biçimsel dil** de denir. Bu abecenin terimlerinin kümesini $\operatorname{Tm} L$ ve formüllerinin kümesini $\operatorname{Fm} L$ ile göstereceğiz. L nesne dilini kullanan biçimsel kuramlarımızın evreni $\operatorname{Fm} L$ kümesidir. $\operatorname{Fm} L$ formüllerinin bir kısmı biçimsel kuramımızın ilksavları olarak seçilecektir. İlksavlarımız da iki ayrık parçadan oluşacaktır: Birincisi tüm biçimsel kuramlarımızda ortak olacak Λ_m **mantık ilksavları**, diğeri ise kuramın **öz ilksavları** diyeceğimiz bir Δ kısmı. Burada da $\Delta = \emptyset$ olabilir. $\Gamma = \Lambda_m \sqcup \Delta$ olmak üzere biçimsel kuramımızı $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ ile göstereceğiz. Aynı L dilini kullanan farklı biçimsel kuramları birbirinden ayıran öz ilksavlarıdır. Bir biçimsel kuramın son parçası ise, tüm biçimsel kuramlarımızda ortak seçeceğimiz **biçimsel çıkarım kurallarıdır**. Kuramımızın amacı sonlu sayıda biçimsel çıkarım kuralları yardımıyla ilksavlardan yola çıkarak ulaşabileceğimiz formülleri bulmaktır: Bu tür formüllere kuramımızın **biçimsel teoremleri** veya **biçimsel çıkarımları** denir. Burada bir yandan W abecesinin herhangi bir sözcüğünün bir formül olup olmadığı, diğer yandan herhangi bir $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ formülünün bir ilksav olup olmadığı tartışma götürmez netlikte belirlenebilir olmalıdır-

---

etwas in der Vorstellung gegeben sein: gewisse außerlogische diskrete Objekte, die anschaulich als unmittelbares Erlebnis vor allem Denken da sind. Soll das logische Schließen sicher sein, so müssen sich diese Objekte vollkommen in allen Teilen überblicken lassen und ihre Aufweisung, ihre Unterscheidung, ihr Aufeinaderfolgen ist mit den Objekten zugleich unmittelbar anschaulich für uns da als etwas, das sich nicht noch auf etwas reduzieren läßt. İndem ich diesen Standpunkt einnehme, sind mir–im genauen Gegensatz zu Frege und Dedekind– die Gegenstãnde der Zahlentheorie die Zeichen selbst, deren Gestalt unabhängig von Ort und Zeit und von den besonderen Bedingungen der Herstellung des Zeichens sowie von geringfügigen Unterschieden in der Ausführung sich von uns allgemein und sicher wiedererkennen läßt. Hierin liegt die feste philosophische Einstellung, die ich zur Begründung der reinen Mathematik –wie überhaupt zu allen wissenschaftlichen Denken, Verstehen und Mitteilen– für erforderlich halte: *am Anfang* –so heißt hier– *ist das Zeichen*."

lar. $\mathcal{K}$ biçimsel kuramımızın somut nesneleri $\operatorname{Fm} L$ kümesinin öğeleridir. φ eğer $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ biçimsel kuramının bir biçimsel teoremi ise bunu $\mathcal{K} \vdash \varphi$, $\vdash_{\mathcal{K}} \varphi$ veya $\Gamma \vdash \varphi$ gösterimleri ile belirteceğiz.

Burada diğer matematik derslerinde olmayan bir durumla karşı karşıyayız. Nasıl analiz veya cebir veya matematiğin diğer alanlarında çalışıyorsak aynı biçimde $\mathcal{K}$ kuramında da aynı biçimde çalışacağız. Bu kurama ilişkin bazı kavramlar açıklayacağız öyle ki bu kavramlar $\mathcal{K}$ kuramının sözcükleri olmayacaklardır. Yine $\mathcal{K}$ kuramının *biçimsel teoremlerine* ilişkin *teoremler* kanıtlayacağız. Elbette bu teoremler matematiğin diğer alanlarındaki kanıt yöntemleriyle kanıtlanacaklardır ve $\mathcal{K}$ kuramının bir biçimsel teoremi değildirler. Örneğin

Teorem 3.0.1 *$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ ve $\Gamma \vdash \psi \to \eta$ ise $\Gamma \vdash \varphi \to \eta$, dd. sözlerle: $\varphi \to \psi$ ve $\psi \to \eta$ formülleri $\mathcal{K}$ kuramının biçimsel teoremleri iseler $\varphi \to \eta$ formülü de $\mathcal{K}$ kuramının bir biçimsel teoremidir.*

$\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ biçimsel kuramına ilişkin biçimsel teoremleri araştırır ve aktarırken kullandığımız dil L dilinden farklı bir dildir ve **sözeden dil** (veya **metadil**) olarak adlandırılır. Kitabımızda sözeden dilimiz, bir takım matematiksel terim ve kavramlarla zenginleştirilmiş Türkçe'dir. Yukarıda verdiğimiz teorem, biçimsel teorem olmayıp, biçimsel teoremlere ilişkin bir teoremdir. O teoremi

$$(\Gamma \vdash \varphi \to \psi) \wedge (\Gamma \vdash \psi \to \eta) \Longrightarrow \Gamma \vdash \varphi \to \eta$$

olarak da yazabiliriz. Bu formül kuramımızın abecesinde olmayan $\vdash, \wedge, \Longrightarrow$ harflerini içerdiği için $\mathcal{K}$ kuramının diline ilişkin bir sözcük değildir; dolayısıyla bir biçimsel teorem olması söz konusu olamaz! $\mathcal{K}$ biçimsel kuramının biçimsel teoremlerine ilişkin bu tür teoremlere $\mathcal{K}$ kuramına ilişkin **sözeden teorem**ler (veya **metateorem**ler) denir. Bunları birbirinden ayırmak çok önemlidir. Kitabımızda karşımızda genellikle sözeden teoremlerimiz olacağından bunları, geleneksel matematikte olduğu gibi, yalın olarak "teorem" olarak adlandıracağız. $\mathcal{K}$ kuramının biçimsel teoremlerini her zaman "biçimsel teorem" olarak adlandıracağız.

Bir an için Gruplar Kuramı'nı araştırdığımızı varsayalım. Gruplar Kuramı'nın bir teoreminden anladığımız *her* grupta doğru olan önermelerdir. Bir $\mathfrak{G}$ grubu bir $G \neq \emptyset$ kümesi, bu kümede tanımlı bir $\cdot^{\mathfrak{G}} : G \times G \to G$ fonksiyonu ve bir $e^{\mathfrak{G}} \in G$ etkisiz öğesi ile belirlenmiştir; burada $\cdot^{\mathfrak{G}}$ fonksiyonu ve $e^{\mathfrak{G}}$ etkisiz öğesi ile bildik grup aksiyomlarının sağlanmış olması istenir. Bu durumda $\mathfrak{G} = (G, \cdot^{\mathfrak{G}}, e^{\mathfrak{G}})$ bir gruptur denir. Gruplar Kuramı'nı biçimselleştirirken, ortak yanlarını biçimselleştireceğiz; bu durumda bize iki öğeli bir $L_g = \{\bullet, \mathbf{e}\}$ biçimsel dili yetecektir. Burada $\bullet$ iki değişkenli bir

fonksiyon imi ve **e** ise bir sabit imi olacaktır. Grup aksiyomlarını bu aksiyomlarda geçen $\forall, \wedge$ ve $=$ mantık imlerini $\dot{\forall}, \dot{\wedge}$ ve $\doteq$ imleriyle biçimselleştirerek $\Lambda_g \subset \operatorname{Fm} L_g$ formül kümesini elde edelim. $\Gamma_g = \Lambda_m \sqcup \Lambda_g$ olmak üzere $\mathcal{K}_g = (L_g, \Gamma_g)$ biçimsel kuramı ile gruplar kuramını biçimselleştirmiş oluruz. Beklentimiz $\mathcal{K}_g$ kuramının biçimsel teoremlerinin Gruplar Kuramı'nın teoremleriyle örtüşmesidir. Açalım: $\mathcal{K}_g \vdash \varphi$ olsun. $\mathfrak{G}$ herhangi bir grup olmak üzere φ formülündeki $\bullet$ fonksiyon imi $\cdot^{\mathfrak{G}}$ fonksiyonu, **e** sabit imi $e^{\mathfrak{G}}$ sabiti ile ve φ deki tüm biçimsel mantık imleri anlamsal mantık imleriyle yorumlandığında elde edilen içeriksel önerme doğrudur. Tersine her $\mathfrak{G}$ grubunda doğru olan önerme $\mathcal{K}_g$ biçimsel kuramının bir φ biçimsel teoreminin yorumlarından başka bir şey değildir.

Geleneksel matematikte teorem olduğunu ileri sürdüğümüz her önermenin bir kanıtını veririz. $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ biçimsel kuramında bir *biçimsel kanıt* kavramı açıklayacak ve φ formülünün $\mathcal{K}$ kuramının bir biçimsel teoremi olmasının bu formülün bir Γ-biçimsel kanıtının olmasına denk olduğunu göstereceğiz.

İşe önce bir düzene sokup biçimselleştirmek istediğimiz geleneksel matematikte ne yaptığımızı ve nasıl yaptığımızı gözden geçirerek başlayacağız.

3.1 Yapılar

Matematikte genel olarak yapıları inceleriz. Örneğin G bir gruptur dediğimizde her şeyden önce $G \neq \emptyset$ boştan farklı bir kümedir. Ayrıca bir $\cdot : G \times G \to G$ fonksiyonu verilmiştir ve bu fonksiyonun grup ilksavlarını sağlaması istenir. Okurun bildiği bu ilksavları yazmayacağız. G kümesinin öğelerinden birisi, e etkisiz öğesi, özeldir. Biz bu grubu $\mathfrak{G} := (G, \cdot, e)$ ile göstereceğiz. $\mathfrak{G} := (G, \cdot, e)$ yapılara bir örnek oluşturur. G kümesine $\mathfrak{G}$ yapısının **evreni**(**taşıyıcısı** veya **desteği**) denir. $\cdot$ fonksiyonu ve e sabitinin $\mathfrak{G}$ yapısıyla ilişkisini vurgulamak için onları $\cdot^{\mathfrak{G}}$ ve $e^{\mathfrak{G}}$ olarak göstereceğiz. Böylece $\mathfrak{G}$ grup yapısını $\mathfrak{G} = (G, \cdot^{\mathfrak{G}}, e^{\mathfrak{G}})$ olarak göstereceğiz. $L^{\mathfrak{G}} := \{\cdot^{\mathfrak{G}}, e^{\mathfrak{G}}\}$ kümesine $\mathfrak{G}$ yapısının **anlamsal dili** diyelim. $+^{\mathfrak{N}}$ doğal sayılardaki toplamayı göstermek üzere $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, +^{\mathfrak{A}}, 0^{\mathfrak{A}})$ yapısının $L^{\mathfrak{A}} := \{+^{\mathfrak{A}}, 0^{\mathfrak{A}}\}$ anlamsal dili ile $\mathfrak{G}$ yapısının $L^{\mathfrak{G}} := \{\cdot^{\mathfrak{G}}, e^{\mathfrak{G}}\}$ anlamsal dilinin benzerliği hemen göze çarpar: Her ikisi de iki değişkenli bir fonksiyon ve bir sabitten oluşur. $\mathfrak{G}$ yapısının bir grup olmasını istemiştik, $\mathfrak{A}$ ise bir yarı gruptur. İki farklı cebirsel yapının anlamsal dilleri benzeşebilir. $L^{\mathfrak{G}}$ ve $L^{\mathfrak{A}}$ dillerini biçimselleştirdiğimizde aynı **biçimsel** $L = \{\mathbf{f}, \mathbf{e}\}$ **diline** sahip olacaklardır. Burada **f** iki değişkenli bir fonksiyon imi, **e** ise bir sabit imi olacaktır. **f** imi $\mathfrak{G}$ yapısında $\mathbf{f}^{\mathfrak{G}} = \cdot^{\mathfrak{G}} : G \times G \to G$ olarak yorumlanırken $\mathfrak{A}$ yapısında $\mathbf{f}^{\mathfrak{A}} = +^{\mathfrak{A}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olarak yorumlanmıştır. **e** sabiti $\mathfrak{G}$ yapısında $e^{\mathfrak{G}}$ olarak

yorumlanırken $\mathfrak{A}$ yapısında $e^{\mathfrak{A}} = 0^{\mathfrak{A}}$ olarak yorumlanmıştır. Burada $\mathbf{f}$'nin *bir fonksiyon olmadığını, ancak L-yapılarında* $\mathbf{f}$*'ye iki değişkenli fonksiyonların karşılık getirildiğini belirtelim.*

Bir Boole cebiri iki tane iki değişkenli ve bir tane bir değişkenli fonksiyon ve iki seçilmiş sabit içerir ve okurun sezebileceği gibi $\mathfrak{B} := (B, \vee^{\mathfrak{B}}, \wedge^{\mathfrak{B}}, '^{\mathfrak{B}}, 0^{\mathfrak{B}}, 1^{\mathfrak{B}})$ olarak gösterilir.

(S, R) bir sıralanmış kümedir dediğimizde, $S \neq \emptyset$ olmak üzere bazı koşulları sağlayan bir $R \subseteq S^2$ bağıntısını anlarız. Bu yapıyı $\mathfrak{S}$ olarak göstereceğiz ve R bağıntısının $\mathfrak{S}$ ile ilişkisini vurgulamak içinse R yerine $R^{\mathfrak{S}}$ yazacağız. Geleneğe uyarak, sıralama söz konusu olduğunda R yerine $<$ yazarsak, yapımız $\mathfrak{S} = \left(S, <^{\mathfrak{S}}\right)$ olur.

Örneğin $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ bir cisimdir dediğimizde $0, 1 \in \mathbb{R}$ ve $+, \cdot : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olduğunu biliyoruz. Başka sözlerle $\mathbb{R} \neq \emptyset$ ve bu kümede iki sabit, iki tane iki değişkenli fonksiyon verilmiştir. Bunlar ayrıca cisim ilksavlarını sağlarlar. Şu anda bizi bu ilksavlar ilgilendirmiyor. Bu yapıyı $\mathfrak{R}$ ile gösterip fonksiyon ve sabitlerin bu yapıyla ilişkisini vurgularsak $\mathfrak{R} = \left(\mathbb{R}, +^{\mathfrak{R}}, \cdot^{\mathfrak{R}}, 0^{\mathfrak{R}}, 1^{\mathfrak{R}}\right)$ olur. $M^{n\times n}(\mathbb{R})$ reel terimli $n \times n$-matrislerinin kümesi ve $\theta_n, I_n \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$ sırasıyla sıfır ve birim matris olmak üzere

$$\mathfrak{M}^{n\times n} = (M^{n\times n}(\mathbb{R}), +^{\mathfrak{M}^{n\times n}}, \circ^{\mathfrak{M}^{n\times n}}; \theta_n^{\mathfrak{M}^{n\times n}}, I_n^{\mathfrak{M}^{n\times n}})$$

halkasının $L^{\mathfrak{M}^{n\times n}}$ anlamsal dili ile $\mathfrak{R}$ cisminin $L^{\mathfrak{R}}$ anlamsal dilleri benzeşir ve bu yapılar aynı $L = \{\dot{+}, \bullet, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ biçimsel dilinin yapılarıdır. Burada $\dot{+}$ ve $\bullet$ iki değişkenli fonksiyon imleri, $\mathbf{0}$ ve $\mathbf{1}$ ise iki sabit imidir. $\mathfrak{R}_< = \left(\mathbb{R}, <^{\mathfrak{R}}, +^{\mathfrak{R}}, \cdot^{\mathfrak{R}}, 0^{\mathfrak{R}}, 1^{\mathfrak{R}}\right)$ ile sıralanmış cismimizi gösterelim.

Matematikte karşılaştığımız yapıların çoğu *az sayıda* fonksiyon, bağıntı ve sabitlerle verilir. Fonksiyonlar genelde iki değişkenli ve bağıntılarda ikili bağıntılardır. Biz yapılarda fonksiyonların, bağıntıların ve sabitlerin sonsuz olmasına da izin vereceğiz ve fonksiyonların değişken sayılarına ve bağıntıların derecelerine bir kısıtlama getirmeyeceğiz.

Tanım 3.1.1 *Bir* $\mathfrak{A} = (A, \mathcal{R}^{\mathfrak{A}}, \mathcal{F}^{\mathfrak{A}}, \mathcal{C}^{\mathfrak{A}})$ *dörtlüsüne aşağıdaki koşullar sağlandığında bir* ***yapı*** *denir:*

1. $A \neq \emptyset$ *bir kümedir.* A *kümesine* $\mathfrak{A}$ *yapısının* ***evreni,*** *veya* ***nesne alanı*** *(veya* ***desteği)*** *denir ve* $A := |\mathfrak{A}|$ *yazılır.*

2. A, $\mathcal{R}^{\mathfrak{A}}, \mathcal{F}^{\mathfrak{A}}$ *kümeleri ikişer ikişer ayrıktırlar.* $\mathcal{R}^{\mathfrak{A}}$ *ve* $\mathcal{F}^{\mathfrak{A}}$ *kümelerinin*

$$\mathcal{R}^{\mathfrak{A}} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{R}_n^{\mathfrak{A}} \text{ ve } \mathcal{F}^{\mathfrak{A}} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{F}_n^{\mathfrak{A}}$$

parçalanışları verilmiştir.

3. Her $R^{\mathfrak{A}} \in \mathcal{R}_n^{\mathfrak{A}}$ *için* $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$*, dd.* $R^{\mathfrak{A}}$*,* A*'da* n*-yerli bir bağıntıdır.*

4. Her $f^{\mathfrak{A}} \in \mathcal{F}_n^{\mathfrak{A}}$ *için* $f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$.
5. $\mathcal{C}^{\mathfrak{A}} \subseteq A$.

$L^{\mathfrak{A}} := \mathcal{F}^{\mathfrak{A}} \cup \mathcal{R}^{\mathfrak{A}} \cup \mathcal{C}^{\mathfrak{A}}$ kümesine $\mathfrak{A}$ yapısının **anlamsal dili** diyelim. Demek ki $\mathcal{R}^{\mathfrak{A}}$ ve $\mathcal{F}^{\mathfrak{A}}$ sırasıyla $\mathfrak{A}$ yapısının bağıntılar ve fonksiyonlarının kümeleridir. $\mathcal{R}_n^{\mathfrak{A}}$, $\mathcal{F}_n^{\mathfrak{A}}$ ve $\mathcal{C}^{\mathfrak{A}}$ kümelerinin bazıları veya tümü boş küme olabilir. Bu tanıma göre $\mathfrak{G} = (G, \emptyset, \cdot^{\mathfrak{G}}, e^{\mathfrak{G}})$ ve $\mathfrak{Z} := (\mathbb{N}, \emptyset, +^{\mathfrak{Z}}, \cdot^{\mathfrak{Z}}, 0^{\mathfrak{Z}})$ yapıları için $\mathcal{R}^{\mathfrak{G}} = \mathcal{R}^{\mathfrak{Z}} = \emptyset$, $\mathcal{F}^{\mathfrak{G}} = \mathcal{F}_2^{\mathfrak{G}} = \left\{\cdot^{\mathfrak{G}}\right\}$, $\mathcal{F}^{\mathfrak{Z}} = \mathcal{F}_2^{\mathfrak{Z}} = \left\{+^{\mathfrak{Z}}, \cdot^{\mathfrak{Z}}\right\}$, $\mathcal{C}^{\mathfrak{G}} = \left\{e^{\mathfrak{G}}\right\}$ ve $\mathcal{C}^{\mathfrak{Z}} = \left\{0^{\mathfrak{Z}}\right\}$ olur. $\mathfrak{B}$ Boole cebiri için $\mathcal{R}^{\mathfrak{B}} = \emptyset$, $\mathcal{F}^{\mathfrak{B}} = \mathcal{F}_1^{\mathfrak{B}} \cup \mathcal{F}_2^{\mathfrak{B}} = \left\{'^{\mathfrak{B}}\right\} \cup \left\{\vee^{\mathfrak{B}}, \wedge^{\mathfrak{B}}\right\}$ ve $\mathcal{C}^{\mathfrak{B}} = \left\{0^{\mathfrak{B}}, 1^{\mathfrak{B}}\right\}$ olur. $\mathfrak{S}$ yapısı için $\mathcal{R}^{\mathfrak{S}} = \mathcal{R}_2^{\mathfrak{S}} = \left\{<^{\mathfrak{S}}\right\}$ ve $\mathcal{F}^{\mathfrak{S}} = \emptyset$, $\mathcal{C}^{\mathfrak{S}} = \emptyset$ olur.

Bir $\mathfrak{A} = (A, \mathcal{R}^{\mathfrak{A}}, \mathcal{F}^{\mathfrak{A}}, \mathcal{C}^{\mathfrak{A}})$ yapısına $\mathcal{F}^{\mathfrak{A}} = \emptyset$ ise bir **bağıntısal yapı,** eğer $\mathcal{R}^{\mathfrak{A}} = \emptyset$ ise bir **fonksiyonel yapı** veya bir **cebir** denir. $\mathfrak{S}$ bir bağıntısal yapı iken $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{B}$ ve $\mathfrak{R}$ birer fonksiyonel yapılardır. Diğer yandan $\mathfrak{R}_<$ ne bir bağıntısal yapı ne de bir fonksiyonel yapıdır.

Not 3.1.2 $\mathcal{R}^{\mathfrak{A}}$'nın $\left\{\mathcal{R}_1^{\mathfrak{A}}, \mathcal{R}_2^{\mathfrak{A}}, \mathcal{R}_2^{\mathfrak{A}}, \ldots\right\}$ ve $\mathcal{F}^{\mathfrak{A}}$'nın $\left\{\mathcal{F}_1^{\mathfrak{A}}, \mathcal{F}_2^{\mathfrak{A}}, \mathcal{F}_2^{\mathfrak{A}}, \ldots\right\}$ parçalanışlarını vermek bir $\sigma : \mathcal{F}^{\mathfrak{A}} \cup \mathcal{R}^{\mathfrak{A}} \to \mathbb{N}^*$ fonksiyonu vermeye eşdeğerdir. Parçalanış ve σ dönüşümü $\mathcal{F}_n^{\mathfrak{A}} = \sigma^{-1}(n) \cap \mathcal{F}^{\mathfrak{A}}$ ve $\mathcal{R}_n^{\mathfrak{A}} = \sigma^{-1}(n) \cap \mathcal{R}^{\mathfrak{A}}$ denklemleriyle kenetlenmişlerdir. Çoğu yazar σ ile çalışır. Kimi yazar A^0 kümesini yalnızca boş () sıfırlısını içeren tek öğeli $A^0 = \{()\}$ kümesi olarak alıp her $c \in \mathcal{C}^{\mathfrak{A}}$ sabitini $f(()) = c$ değerini alan 0-değişkenli $f : A^0 \to A$ fonksiyonu ile özdeşleyip $\mathcal{C}^{\mathfrak{A}} = \mathcal{F}_0^{\mathfrak{A}}$ alarak $\mathcal{C}^{\mathfrak{A}}$ sabitler kümesinden vazgeçerler. Veya Kümeler Kuramı gösterimleriyle $0 = \emptyset$ ve ${}^0A = \{f \mid f : 0 \to A\} = \{\emptyset\} = \{0\}$ olduğundan her $f : {}^0A \to A$ fonksiyonu $f(0) = f(\emptyset) = c$ değeri ile tek olarak belirli olduğundan $f = c$ alınabilir. Biz bu yolu izlemeyeceğiz.

Diğer yandan fonksiyonlar özel bağıntılar olduğundan fonksiyonlardan tümüyle vazgeçebilir ve yalnızca bağıntılarla çalışabilirsiniz. Ancak fonksiyonları vurgulamayı yeğleyecek ve onları ayrıca belirteceğiz. ▲

Çoğu zaman fonksiyonlar, bağıntılar ve sabitler sonludur. Eğer $\mathfrak{A}$ yapısının bağıntıları $R_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, R_m^{\mathfrak{A}}$, fonksiyonları $f_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, f_n^{\mathfrak{A}}$ ve sabitleri $c_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, c_k^{\mathfrak{A}}$ ise bu yapıyı

$$\mathfrak{A} = (A; R_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, R_m^{\mathfrak{A}}; f_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, f_n^{\mathfrak{A}}; c_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, c_k^{\mathfrak{A}})$$

olarak yazmayı yeğleyeceğiz: burada bağıntıları, fonksiyonları ve sabitleri birbirlerinden kesinlikle ayırabilmek için bu grupları noktalı virgülle ayırdık. Bu gösterimlerle $\mathfrak{G} = (G; \emptyset; \cdot^{\mathfrak{G}}; e^{\mathfrak{G}})$, $\mathfrak{Z} = (\mathbb{N}; \emptyset; +^{\mathfrak{Z}}, \cdot^{\mathfrak{Z}}; 0^{\mathfrak{Z}})$, $\mathfrak{S} = (S; <^{\mathfrak{S}}; \emptyset; \emptyset)$, $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}; \emptyset, +^{\mathfrak{R}}, \cdot^{\mathfrak{R}}; 0^{\mathfrak{R}}, 1^{\mathfrak{R}})$ ve $\mathfrak{R}_< = \left(\mathbb{R}; <^{\mathfrak{R}}; +^{\mathfrak{R}}, \cdot^{\mathfrak{R}}; 0^{\mathfrak{R}}, 1^{\mathfrak{R}}\right)$ olur. Bizi en çok ilgilendirecek yapı ise $+, \cdot$ doğal sayılardaki bildik toplama, çarpma ve $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ise $S(n) := n + 1$ ile tanımlanan ardıl fonksiyonu olmak üzere yalın gösterimle $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}; S, +, \cdot; 0)$ yapısıdır.

3.1.1 Çok Türlü Yapılar

Yapı tanımımızda bir tek evren var, dd. nesnelerimiz tek türlüdür. Ancak matematikte bazı yapılar farklı türden nesneler içerirler. Örneğin Öklid geometrimiz *noktalar* ve *doğrular* olmak üzere iki tür nesne içerir. Benzer biçimde vektör uzayları tanımında *vektörler* ve *skalarlar,* yönlenmemiş çizgelerde *köşeler* ve *kenarlar* olmak üzere iki tür nesnemiz vardır.

Çok türlü yapılarda türleri damgalayacağımız bir T türler kümesine fazladan gereksinimiz vardır. **Çok türlü** bir $\mathfrak{A}$ yapısından bir

$$((A_t)_{t\in T}, T, \mathcal{R}, \mathcal{F}, (\mathcal{C}_t)_{t\in T}, \tau)$$

6-lısını anlayacağız öyle ki aşağıdakiler geçerlidir:

1. $T \neq \emptyset$ ve $\{A_t\}_{t\in T}$ boş olmayan kümelerin bir ayrık ailesidir.
2. $\tau : \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \to \bigcup_{n=1}^{\infty} T^n =: T_1^{<\omega}$ tip belirtme dönüşümüdür. $\tau(\mathcal{F}) \subseteq \bigcup_{n=2}^{\infty} T^n$.
3. $R \in \mathcal{R}$ ve $\tau(R) = (t_1, \ldots, t_n)$ ise $R \subseteq A_{t_1} \times \cdots \times A_{t_n}$.
4. Her $f \in \mathcal{F}$ için $\tau(f) = (t_1, \ldots, t_n, t)$ ise $f : A_{t_1} \times \cdots \times A_{t_n} \to A_t$.
5. Her $t \in T$ için $\mathcal{C}_t \subseteq A_t$.

Örneğin K cismi üzerinden bir V vektör uzayı bizim için $T := 2 = \{0, 1\}$ olan bir yapıdır. $A_0 = V$, $A_1 = K$, $\mathcal{R} = \emptyset$, $\mathcal{F} = \{+_V,\ +_K\ ,\ \cdot_K\ , \cdot_{KV}\}$ ve $\mathcal{C}_0 = \{0_0\}$, $\mathcal{C}_1 = \{0_1,\ 1_1\}$ olmak üzere bu yapı

$$\begin{array}{l}\big((A_t)_{t\in 2}\,, 2, \emptyset, \mathcal{F}, \tau\big)\,,\ \text{açık olarak ise}\\ ((V, K); 2; \emptyset; +_V, +_K, \cdot_K, \cdot_{KV}; 0_0, 0_1, 1_1; \tau)\end{array}$$

olarak verilir. Burada $\tau(+_V) = (0, 0, 0)$, $\tau(+_K) = (1, 1, 1)$, $\tau(\cdot_K) = (1, 1, 1)$, $\tau(\cdot_{KV}) = (1, 0, 0)$. Kolayca sezileceği gibi

$$\begin{aligned} +_V &: V \times V \to V\\ +_K &: K \times K \to K\\ \cdot_K &: K \times K \to K\\ \cdot_{KV} &: K \times V \to V \end{aligned}$$

sırasıyla bildik vektörel toplama, skalar toplama, skalarların çarpımı ve bir skalarla bir vektörün çarpım işlemleridir. 0_0 sıfır vektörü 0_1 ve 1_1 ise K cisminin sıfır ve biridir.

Biz çok türlü yapıları incelemeyeceğiz. Nedeni basittir: Herhangi bir çok türlü yapı, mantık açısından tüm önemli soruları da taşıyarak, doğal biçimde tek türlü bir yapıya dönüştürülebilir. Her $f : A_{t_1} \times \cdots \times A_{t_n} \to A_t$

her şeyden önce bir $G_f \subseteq A_{t_1} \times \cdots \times A_{t_n} \times A_t$ bağıntısıdır. $A := \bigcup_{t\in T} A_t$ alınır ve bağıntılar ayrıca bir basamaklı A_t, $t \in T$ bağıntılarıyla genişletilir. $\mathcal{C}' := \bigcup_{t\in T} \mathcal{C}_t$ alınırsa $\mathcal{R}' := \mathcal{R} \cup \{G_f \,|\, f \in \mathcal{F}\} \cup \{A_t \,|\, t \in T\}$ olmak üzere tek türlü $\mathfrak{A}' := (A, \mathcal{R}', \emptyset, \mathcal{C}', \sigma')$ yapısı elde edilir. Aşikâr olan σ''yü yazma işini okura bırakıyoruz.

Not 3.1.3 Vektör uzayları başka biçimde de tek türlü yapı olarak verilebilir. Her $k \in K$ için bir $f_k : V \to V\ (x \rightsquigarrow kx)$ dönüşümü ile işimiz biter: $\mathcal{F} = \{+_V\} \cup \{f_k \,|\, k \in K\}$ olmak üzere $(V; \emptyset; \mathcal{F}; 0)$ bir vektör uzayı yapısı olarak tanımlanabilir. ▲

3.2 Anlamsal Alan Hakkında Bazı Notlar

Burada birinci dereceden yüklem mantığını biçimsel olarak ele aldığımızda vereceğimiz bazı tanımların altında yatan nedenlere ışık tutacak bazı noktalara değineceğiz. Bunun için herhangi bir yapıyı araştırırken yaptıklarımızı amacımıza uygun olarak yeniden gözden geçireceğiz. Açıklayacağımız kavramları bir Analiz I kitabında karşılaşacağımız yapılarla örnekleyeceğiz. Evrenimiz genelde $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi olmak üzere bazen de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ kümeleridir. Bu kümelerde $+$ toplama, $\cdot$ çarpma işlemi ve bir de $<$ sıralama bağıntımız vardır. Toplama ve çarpma iki değişkenli fonksiyonlar ve $<$ sıralaması ise bir ikili bağıntıdır. Örneklerimizi $\mathfrak{S} := (\mathbb{R}; <; \emptyset; \emptyset)$, $\mathfrak{R} := (\mathbb{R}; \emptyset; +, \cdot; 0, 1)$ ve $\mathfrak{R}_< := (\mathbb{R}; <; +, \cdot; 0, 1)$ yapılarında vereceğiz. Burada yalınlık açısından $\mathfrak{R} := (\mathbb{R}; \emptyset; +^{\mathfrak{R}}, \cdot^{\mathfrak{R}}; 0^{\mathfrak{R}}, 1^{\mathfrak{R}})$ yerine $\mathfrak{R} := (\mathbb{R}; \emptyset; +, \cdot; 0, 1)$ yazmayı yeğledik ve aynı tutumu $\mathfrak{S}$ ve $\mathfrak{R}_<$ içinde sergiledik. Bazı örneklerimizde ise $\mathbb{R}$ kümesinin yerini $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ kümeleri alacaktır.

Aşağıdaki kavramlar herhangi bir analiz kitabımızın metin kısmını unutup geriye kalanlara odaklandığımızda karşılaştıklarımızı bir düzene sokmak amacı taşır. Her şeyden önce formüllerimizin çoğunda

$$x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots$$

gibi değişkenlere rastlarız. Değişkenlerin sayısına bir kısıtlama getirilmemiştir. Genellikle sayılabilir çoklukta değişkenler yeterli görülürse de biz herhangi bir sonsuz $\mathcal{V}$ değişkenler kümesiyle çalışacağız. Herhangi bir $\mathfrak{A} = (A; \mathcal{R}^{\mathfrak{A}}; \mathcal{F}^{\mathfrak{A}}\ ; \mathcal{C}^{\mathfrak{A}})$ yapısı verilsin.

$\mathfrak{A}$ Yapısının Terimleri

(T1) Her değişken bir terimdir.

(T2) Her $c^{\mathfrak{A}} \in \mathcal{C}^{\mathfrak{A}}$ sabiti bir terimdir.

(T3) $f^{\mathfrak{A}} \in \mathcal{F}_n^{\mathfrak{A}}$, $t_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}$ birer terimseler $f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{A}})$ de bir terimdir.

Tüm **terimler** bu şekilde elde edilenlerdir.

$\mathfrak{A}$ yapısının terimlerinin kümesinin $\operatorname{Tm} L^{\mathfrak{A}}$ ile gösterelim. Terimlerimizden değişken içermeyenler A evrenimizin nesneleridirler, değişken içerenler ise değişkenler yerine evrenimizin nesneleri konduğunda bize evrenimizin nesnelerini verirler. t teriminde bulunan değişkenler $x_1, \ldots, x_n$ olsun. Bu durumda t terimini bazen $t(x_1, \ldots, x_n)$ ile göstereceğiz. $a_1, \ldots, a_n \in A$ olmak üzere t teriminde x_i değişkeni yerine, bulunduğu her yerde a_i yazarak elde ettiğimiz nesnemizi $t(a_1, \ldots, a_n)$ ile gösterelim. Böylece t terimi $\underline{t}$ ile göstereceğimiz bir $\underline{t} : A^n \to A$ fonksiyonu tanımlar. $s = s(x_1, \ldots, x_n)$ ve $t = t(x_1, \ldots, x_n)$ terimleri için

$$s = t :\Longleftrightarrow \underline{s} = \underline{t} \Longleftrightarrow \text{ Her } a_1, \ldots, a_n \in A \text{ için } s(a_1, \ldots, a_n) = t(a_1, \ldots, a_n)$$

olarak tanımlanır. t teriminin değişkenleri $x_1, \ldots, x_k$ arasında olduğunda da $t = t(x_1, \ldots, x_k)$ yazacağız. Bu durumda bir $\underline{t} : A^k \to A$ fonksiyonu tanımlayabiliriz. Hangi durumun söz konusu olduğu geçtiği bağlam içerisinde anlaşılır olacaktır.

Örnek 3.2.1 $\mathfrak{S}$ yapısının terimleri sadece $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ değişkenleridir. $\mathfrak{R}$ ve $\mathfrak{R}_<$ yapıları aynı terimlere sahiptirler. Örneğin

$$0, 1, 2, 3, 4, 3x, x + 0, 1 \cdot 0, x + 1, 2x + y, 4xy, x^2y^3, (x + yz)^3 \ldots$$

bu yapıların terimleridirler. Terimlerimizin değişken içermeyenleri gerçel sayılarken, değişken içeren terimlerde değişkenler yerine gerçel sayılar koyduğumuzda terimlerimiz bize gerçel sayılar verirler. $\mathfrak{R}$ yapısının $s = s(x, y) = (x + y)^2$ ve $t = t(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$ terimleri için $s = t$ olduğunu biliyoruz. ▲

Formüllerimiz

(F1) $s^{\mathfrak{A}}$ ve $t^{\mathfrak{A}}$ terimler olmak üzere $s^{\mathfrak{A}} = t^{\mathfrak{A}}$ bir formüldür.

(F2) $R^{\mathfrak{A}} \in \mathcal{R}_n^{\mathfrak{A}}$ ve $t_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}$ terim iseler $R^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{A}})$ bir formüldür.

(F3) φ bir formülse $\neg\varphi$ de bir formüldür.

(F4) φ ve ψ formülseler $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \Rightarrow \psi)$ ve $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ de birer formüldürler.

(F5) φ bir formül ve x bir değişkense $\exists x\varphi$ ve $\forall x\varphi$ de bir formüldür.

$\mathfrak{A}$ yapısının formüllerinin kümesini $\operatorname{Fm} L^{\mathfrak{A}}$ ile gösterelim. Tüm **formüller** bu işlemlerle elde edilenlerdir. (F1) ve (F2) de verilen formüllere **atomik** veya **temel formüller** denir.

Örnek 3.2.2 $\mathfrak{S}$'nin bazı formülleri $x, y, z \in \mathcal{V}$ olmak üzere

$$x = x, \neg(x = y), x < y, (x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z)$$
$$\forall x(x = x), \forall x \exists y\, \neg(x = y).$$

Bunlardan sadece $x = x$ ve $x < y$ atomik formüldürler. Bilindiği gibi $\neg(x = y)$ yerine $x \neq y$ ve $\neg(x < y)$ yerine ise $x \not< y$ yazılır. $\mathfrak{S}$ yapısının $<$ bağıntısını içermeyen tüm formülleri aynı zamanda $\mathfrak{R}$'nin de formülleridirler. Ayrıca $\mathfrak{R}$'nin bazı formülleri

$$x = x, 0 \neq 1, x+5 = y, (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2, (x = y) \Rightarrow \forall z\ (xz = yz), \ldots$$

$\mathfrak{S}$ ve $\mathfrak{R}$'nin tüm formüllerinin aynı zamanda $\mathfrak{R}_<$'nin de formülleri olduğu açıktır. $\mathfrak{R}_<$'nin formüllerine başka örnek olarak

$$\forall x(3 < x), \exists x(3 < x), \forall x\left(0 \neq x \Rightarrow 0 < x^2\right), \exists x\left(x^2 = 2\right), \exists x\,(xy = z)$$

formüllerini verebiliriz. ▲

Not 3.2.3 Formüllerimizin değişken içermeyenlerinin doğruluğu veya yanlışlığından söz edebiliyoruz: Çünkü onlar birer önermedirler. Örneğin $3 = 5$ yanlıştır, $1 < 4$ doğrudur. Şimdi bize $\varphi(x) := (3 < x)$ formülü verilmiş olsun. Bu formül bu şekliyle bir önerme değildir. Buna karşın bu formülde x gördüğümüz yere bir gerçel sayı yazarsak iş değişir: Örneğin $\varphi(2)$ yanlış buna karşın $\varphi(4)$ doğrudur. Bu örnekte formülümüz x yerine çalıştığımız yapının evreninin öğelerini koyduğumuzda, bazıları için doğru, bazıları içinse yanlış önermeler elde ettik. İki özel durumla karşılaşabiliriz. Örneğin $\mathfrak{N}_< = (\mathbb{N}, <; +, \cdot; 0)$ yapısında $\psi(x)$ve $\eta(x)$ formülleri sırasıyla $(x = 0) \vee (x > 0)$ ve $(x + 1 = x)$ formülleri olsunlar. Bu yapının evreninden seçeceğimiz *her* $n \in \mathbb{N}$ nesnesi için $\psi(n)$ doğrudur, $\eta(n)$ ise yanlıştır. Bu özel durumlarda $\mathfrak{N}$ *yapısında* ψ *formülü doğrudur* ve ψ *formülü ise yanlıştır* denir.

$3 < x$ formülü bir sav(veya önerme) değildir; ancak x yerine evrenimizin öğelerini koyduğumuzda birer sava dönüşürler. Buna karşın "Her x doğal sayısı için $3 < x$" ve "En az bir x doğal sayısı için $3 < x$", imlerle

$$\forall x(3 < x) \text{ ve } \exists x(3 < x)$$

formülleri birer önermedirler, dolayısıyla bunların doğruluk ve yanlışlıklarından söz edebiliriz. Bunlardan ilki yanlış ikincisi doğrudur. ▲

Not 3.2.4 $\mathfrak{R}$ yapısında "Sıfırdan farklı her gerçel sayının karesi pozitiftir" önermesini x ve y herhangi değişkenler olmak üzere

$$\forall x\left(x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0\right) \text{ veya } \forall y\left(y \neq 0 \Rightarrow y^2 > 0\right)$$

olarak formülleştirebiliriz. Bu bize bu tip formüllerde aslında x ve y değişkenlerinin sanal bir varlığa sahip olduğunu söyler. Eğer φ formülü yalnızca x değişkenini içeriyorsa, $\forall x\varphi$ ve $\exists x\varphi$ formülleri x değişkenini içermiyormuş

gibi davranırlar, dolayısıyla bunlar da birer önermedirler. Bu nedenle bu formüllerde $\forall x$ ve $\exists x$ niceleyicilerin φ formülündeki x değişkenini **bağladığı,** veya **yok ettiği** veya **öldürdüğü** söylenir. Yine $x, y, z, \ldots$ birbirinden farklı değişkenler olmak üzere

$$\forall x(3 < x), \forall y\,(3 < y), \forall z\,(3 < z), \ldots$$

aynı şeyi dile getirirken benzer biçimde

$$\exists x(3 < x), \exists y\,(3 < y), \exists z\,(3 < z), \ldots$$

formülleri aynı şeyi dile getirirler. ▲

Not 3.2.5 $3 < x$ formülündeki x ile $\forall x(3 < x)$, $\exists x(3 < x)$ formüllerindeki x değişkenlerinin karakterleri tümüyle farklıdırlar. $3 < x$ formülünde x yerine herhangi bir terim koyabiliriz, ancak $\forall x(3 < x)$, $\exists x(3 < x)$ formüllerinde x değişkeni yerine bir terim koyamayız. $\forall x(3 < x)$ formülünde x yerine örneğin 2 yazarak elde edeceğimiz $\forall 2(3 < 2)$ ifadesi yapımızın bir formülü değildir ve inceleme dışıdır. ▲

Not 3.2.6 Şimdi de $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}; \emptyset; +, \cdot; 0)$ yapısının

$$\psi(x, y, z) := \exists x(xy = z)$$

formülüne bakalım. Bu formülde x değişkeniyle y, z değişkenlerinin karakterleri tümüyle farklıdır. İleride ayrıntılı biçimde tanımlayacağımız gibi bu formülde tüm x değişkenleri *bulundukları yerde bağlı* bulunurlarken y ve z değişkenleri *bulundukları yerde serbest* bulunurlar. $\psi(x, y, z)$ formülünde x bağlı değişkeninin yerine formülde *herhangi bir yerde serbest bulunan değişkenlerden farklı* – örneğimizde y ve z'den farklı – özellikle *formülde geçmeyen herhangi bir* değişken, örneğin u koyarak – *bağlı değişken değiştirme* ile– elde edilen

$$\psi(u, y, z) := \exists u\,(uy = z)$$

formülleri aynı şeyi dile getirirler: Her ikisi de y'nin z'yi bölmesini, dd. $y|z$ bağıntısını dile getirirler. Bazen $\psi(x, y, z)$ formülünde y ve z değişkenleri yerine sırasıyla s ve t terimleri koymak isteriz. Böyle bir işlem sonunda elde edilen formülü

$$\psi(x, y|s, z|t) := \exists x(xs = t)$$

ile gösterelim. Bu yerine koyma işleminin aşağıdaki koşulu sağlamasını istiyoruz:

- $\psi(x, y, z)$ formülü y ve z için neyi dile getiriyorsa $\psi(x, y|s, z|t)$ formülü s ve t için aynı şeyi dile getirmelidir.

Örneğimizde s ve t terimleri x değişkenini içermedikleri sürece bu koşul sağlanır. Örneğin $u \neq x$ herhangi bir değişken olmak üzere $s = yu + 3$ ve $t = u^2 + 1$ ise $\psi(x, y|s, z|t)$ tam da $s|t$ bağıntısını dile getirir. Şimdi $s = x$ ve $t = z$ alalım. Bu kez

$$\psi(x, y|s, z|t) = \psi(x, y|x, z|z) = \exists x(xx = z)$$

formülünü elde ederiz ki bu bambaşka bir şeyi dile getirir: z doğal sayısının bir başka doğal sayının karesi olduğunu söyler. Örneğin $z = 6$ için bu önerme yanlıştır. Buna karşın

$$\psi(x, y|2, z|6) = \exists x\,(x2 = 6)$$

önermesi $3 \cdot 2 = 6$ olduğu için doğrudur. y ve z değişkenleri $\exists x$ niceleyicisinin etki alanındadırlar. Bu nedenle s veya t terimi x değişkenini içerirse, bu terimlerin *serbest olan* x değişkeni $\psi(x, y|s, z|t)$ formülünde *bağlı* duruma geçerler! Bu sorun yaratır. Bunu aklımızda tutalım! Örneğin $s = xy$ ve $t = 1$ alırsak

$$\psi(x, y|xy, z|1) = \exists x\left(x^2y = 1\right)$$

elde ederiz ki bu bambaşka bir şeydir. ▲

Not 3.2.7 Bir önceki nottaki duruma koşut bir örneği analizden vereceğiz ve oradaki tanıdık bir işlem bize ileride mantıkta yapacağımız bir işleme ışık tutacaktır. Biz $x \neq y$ olmak üzere

$$\int xydx = \frac{1}{2}x^2y + c,\ c \in \mathbb{R}$$

olduğunu biliyoruz. Bu formülde $\int$'yi gezen değişkeni x etki alanı xy olan bir niceleyici gibi düşünebiliriz[2]. Bu formülde y yerine eşitliğin her iki yanına herhangi bir sabit örneğin 4 veya x bağlı değişkenini içermeyen herhangi bir fonksiyon örneğin $y^2 \cos z$ yazdığınızda yine doğru bir eşitlik elde edersiniz. Ancak y yerine x değişkenini içeren bir fonksiyon örneğin x^3z yazdığınızda eşitlik bozulur! Ancak yine de bu formülde iki tarafa da y yerine x^3z koymanın bir yolu var: Önce integralin değişkenini değiştirerek, örneğin

$$\int tydt = \frac{1}{2}t^2y + c,\ c \in \mathbb{R}$$

[2]Aslında $f(x, y) := xy$ olmak üzere $\int f(x, y)dx$ yerine $\int x\, f(x, y)$ yazsaydık bu benzerliği izlemek daha kolay olurdu! Bir yandan y'den farklı $z, u, \ldots$ değişkenleri için $\int_a^b x\, f(x, y) = \int_a^b z\, f(z, y) = \int_a^b u\, f(u, y) = \cdots$ olurken diğer yandan $\int x\, f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y + c$ eşitliğinde y yerine x değişkenini içermeyen herhangi bir terim konabilir.

şekline sokarız. Şimdi her iki yanda y yerine x^3z koymanın bir sakıncası yoktur (*Bağlı değişken değiştirme*). ▲

Not 3.2.8 Belki bazılarımızın aklı bir yerde takılı kalmış olabilir: Biz $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ formülüne de doğru diyoruz ve onun bir teorem olarak kanıtlandığına rastlayanlarımız da vardır. Bu formülde olduğu gibi $x_1, \ldots, x_n$ değişkenlerini içeren herhangi bir $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ formülüne "doğru" dediğimizde kastettiğimiz "Her $x_1, \ldots, x_n$ için $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$" önermesinin doğru olduğudur, dd.

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \text{ doğrudur } :\Longleftrightarrow \forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n) \text{ doğrudur.}$$

▲

Not 3.2.9 Analizde çalıştığımız evren $\mathfrak{R}$'dir. Çalışma alanımız, dd. evrenimiz belli olduğundan "her x gerçel sayısı için $\psi(x)$'tir", imlerle $\forall x\psi$ ve "en az bir x gerçel sayısı için $\psi(x)$'tir", imlerle $\exists x\psi$ olarak gösterilir. Bu önermelerin doğruluğundan anladığımız tam da herkesin anladığı aşağıdakilerdir:

$$\begin{aligned} \forall x\psi \textbf{ doğrudur } &:\Longleftrightarrow \text{H}er\ a \in \mathbb{R} \text{ için } \psi(a) \text{ doğrudur.} \\ \exists x\psi \textbf{ doğrudur } &:\Longleftrightarrow \text{En az bir } a \in \mathbb{R} \text{ için } \psi(a) \text{ doğrudur,} \end{aligned}$$

dd. doğruluk değerleri

$$d(\forall x\psi) = \min_{a\in\mathbb{R}} d(\psi(a)) \text{ ve } d(\exists x\psi) := \max_{a\in\mathbb{R}} d(\psi(a)).$$

Bu önermeler birbiriyle ilişkilidirler. "*Her x için ψ doğrudur.*" önermesi "*ψ'nin yanlış olduğu bir x yoktur.*" önermesiyle eş anlamladır; bu ise"*En az bir x için ψ yanlıştır*" önermesinin *yanlış* olmasıyla eş anlamlıdır. İmlerle gösterirsek $\forall x\psi$ ile $\neg\exists x(\neg\psi)$ denk önermelerdir, aynı anda doğru veya aynı anda yanlıştırlar, dd.

$$\forall x\psi \text{ doğrudur} \Longleftrightarrow \neg\exists x\neg\psi \text{ doğrudur} \tag{3.1}$$

Biçimsel niceleyicilerimizi bu denkliği sağlayacak biçimde seçeceğiz.$\forall$'ye **evrensel niceleyici**, $\exists$'ye **varlık niceleyicisi** denir. $\forall x\psi$ ve $\exists x\psi$ ifadelerindeki ψ'ye niceleyicilerin **etki alanı** ve x değişkenine niceleyicilerin **(gezen) değişkeni** denir. ▲

Not 3.2.10 Şimdi $\psi(y) := (5 < y)$ olsun. Bu formül x değişkenini içermediğinden $\forall x\psi$ ve $\exists x\psi$ formülleri içerik olarak ψ'den başka bir şey değildir. ▲

Not 3.2.11 $=$ eşitliğinin ise aşağıdaki özellikleri vardır: $\psi = \psi(x)$ salt x değişkenini içeren bir formül ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

(Eş1) $x = x$.
(Eş2) $x = y$ ise $y = x$**.**
(Eş3) $x = y$ ve $y = z$ ise $x = z$**.**
(**Eş4**) $a = b$ ise $\psi(a)$'nın doğru olması için gerek ve yeter koşul $\psi(b)$'nin doğru olmasıdır, imlerle: $a = b \Longrightarrow (\psi(x|a) \Leftrightarrow \psi(x|b))$

Bu nedenle $=$ eşitlik imini biçimselleştirecek olan $\doteq$ **eşitlik iminin** bunları garanti eden ilksavları olmalıdır. Bu ilksavları ileride vereceğiz. Ancak eşitlik bu dört ilksavı sağlayan *tek* ikili bağıntı *değildir*. Evrenimizde (Eş1)-(Eş4) ilksavlarında $=$ imi yerine bir E ikili bağıntısı yazıldığında bu dört ilksav sağlansın. Bu tür bağıntılar bize tanıdıktırlar: Onlara (**kuramsal) aynılık** veya **ayırt edilemezlik bağıntıları** veya **benzeşme** diyeceğiz[3]. İlk üç ilksav E bağıntısının bir **denklik bağıntısı** olduğunu söyler. E bir aynılık bağıntısı ise çalıştığımız evrendeki a, b nesneleri ve ψ formülleri için $\psi(a) \Leftrightarrow \psi(b)$ olduğundan bu ψ formülleri ile a, b nesnelerini ayırt edemeyiz; bu formüllerdeki işlevleri aynıdır. Biz gerçekte matematikte $=$ imini de çoğu zaman özdeşlik değil kuramsal aynılık, dd. ayırt edilemezlik anlamında kullanırız. Örneğin 2+3=5 yazdığımızda 2+3'ün 5 ile özdeş olduğunu önermeyiz. Kastettiğimiz herhangi bir aritmetik formülde birinin yerine diğerini, geçtiği bazı veya her yerde, yazabileceğimizdir. Böylece elde edilen yeni ifadeyle önceki aynı şeyi dile getirirler, dd. 2+3 ve 5 aritmetik kuramında aynıdırlar. Örneğin $s = (x + y)^2$ ve $t = x^2 + 2xy + y^2$ terimleri kesinlikle özdeş değillerdir, ancak birbirine eşittirler, dd. $s = t$. Eş1, Eş2 ve Eş3 çoğu zaman **özdeşlik ilksavları** olarak adlandırılırlar. ▲

3.3 Birinci Dereceden Biçimsel Diller

Bu kesimde $\mathfrak{A} = (A, \mathcal{R}^{\mathfrak{A}}, \mathcal{F}^{\mathfrak{A}}, \mathcal{C}^{\mathfrak{A}})$ yapılarımızın $L^{\mathfrak{A}} = \mathcal{R}^{\mathfrak{A}} \sqcup \mathcal{F}^{\mathfrak{A}} \sqcup \mathcal{C}^{\mathfrak{A}}$ dillerini ve mantık imlerimizi, bunlara bağlı olarak $\mathrm{Fm}\, L^{\mathfrak{A}}$ formüllerini biçimselleştireceğiz. Bir önceki kesimde yaptığımız gibi yapının dilini $L^{\mathfrak{A}} = (\mathcal{R}^{\mathfrak{A}}, \mathcal{F}^{\mathfrak{A}}, \mathcal{C}^{\mathfrak{A}})$ olarak da göstereceğiz. Bir L biçimsel dili ayrık üç kümeden oluşacaktır: $\mathcal{R}$ bağıntı imleri kümesi, $\mathcal{F}$ fonksiyon imleri kümesi ve $\mathcal{C}$ sabit imleri kümesi. Bu $L = \mathcal{R} \sqcup \mathcal{F} \sqcup \mathcal{C}$ dilimizi bazen $L = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ ile de göstereceğiz.

Önce bir abecemiz olacak, sonra onlardan kelimeler ve tümceler oluşturacağız. Burada sözcükler *tek bir biçimde* anlaşılır olmalıdırlar. Abecemiz değişkenler, mantık imleri, sabit imleri, fonksiyon imleri ve bağıntı imlerinden oluşacaktır. Bu imlerin aslında hiç bir anlamlarının olmadığını, örneğin

[3]congruence (İng., Fran.), Kongruenz (Alm.) matematik literatürümüze **eşleşim** olarak geçmiştir. Ancak buradaki olayı doğru yansıtmıyor! Seçtiğimiz sözcükler uzun, ancak olayı daha doğru yansıtıyorlar ve bunu önemsiyoruz. Bu ileride vereceğimiz bir örnekle daha iyi kavranacaktır.

bir *fonksiyon iminin bir fonksiyon olmadığını, ancak modellerde bir fonksiyonla yorumlanacaklarını* son bir kez belirtelim. Bu zorunlu imler dışında tek türlü okunurluğu sağlamak için ayraçlar, izlemeyi kolaylaştırmak için bazı kısaltmalar da kullanacağız. Burada da *seçeceğimiz tüm imlerin birbirinden farklı* olmasını isteyeceğiz. Birinci dereceden bir dilin parçalarını verelim. Önermeler mantığı bölümünde formüller üzerinden tümevarımsal tanımlamaların *yinelgen tanımlamalar temeline* nasıl oturtulacağını örnekledik. Burada terimlerimizi, formüllerimizi tümevarımsal, dolayısıyla yinelgen yöntemle açıklayacak ve bunlara ilişkin tanım ve teorem kanıtlarında da tümevarımsal yöntemler kullanacağız. Bu bölümde Platonik yaklaşım alacak ve aktüel sonsuz kümelerle çalışacağız; başka deyişle fonksiyon, bağıntı, sabit ve değişken kümelerimizin çokluğuna hiçbir kısıtlama getirmeyeceğiz. Ancak kitabın son bölümünde Hilbert'in "Belirlenebilirlik" problemini ele alacak ve zorunlu olarak dili *sayılabilir* seçmek zorunda kalacağız; işte o zaman, kavramlarımızın yinelgen olarak tanımlanmış olmaları çok önem kazanacaktır. Okur bu kesimde, kolayca sözlerle geçiştirilebilecek çoğu tanımı aşırı ayrıntıya kaçarak tanımladığımızı görecektir; bu yaklaşım bir anlamda ileride Gödel teoremlerini kanıtlarken anlaşılacaktır. Kavramlarımız ilerde açıklayacağımız anlamda *algoritmik,* dolayısıyla belirlenebilir olacaklardır.

Değişkenlerimiz

Sonsuz bir $\mathcal{V}$ kümesi değişkenler kümesi olarak verilmiştir. Bu kümeyi yapılarda kullandığımız değişken kümesi olarak seçmekte hiçbir sakınca yoktur. Bunlardan herhangi birini göstermek üzere

$$x, y, z, \ldots . x_1, y_1, z_1, \ldots, x_2, y_2, z_2, \ldots$$

sözeden değişkenlerimiz olacaktır. Sözeden değişkenler için kullanılan harflerin veya damgaların farklı olması, yerlerine konacak değişkenlerin *kendilerinin* farklı olması anlamına gelmez; belli bir yerine koymada $x = y$, $x_2 = x_5 = z_3$ olabilir. $\mathcal{V}$ sonsuz seçildiğinden birebir bir $i : \mathbb{N} \to \mathcal{V}$ dönüşümü vardır. Böyle bir i seçilmiş ve her $n \in \mathbb{N}$ için $v_n := i(n)$ olarak açıklanmış olsun. Bu durumda $\{v_0, v_1, v_2, \ldots\} \subseteq \mathcal{V}$ olur. Sözeden değişkenlerden farklı olarak $n \neq m$ ise $v_n \neq v_m$ olur. Çoğu yazar bu değişkenlerle yetinir ve $\mathcal{V} = \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$ alır; hatta sonlu yaklaşıma önem verilirse $\mathcal{V}$ böyle tamamlanmış bir sonsuz küme değil, ileride anlatacağımız gibi değişkenlerimiz için oluşum halinde bir

$$v_0, v_1, v_2, \ldots$$

algoritmik liste alınır[4]. Kabaca şöyle söyleyebiliriz: Elimizde hep bir sonlu

[4]"etkin liste" kavramı ileride açıklanacaktır. Şimdilik bunun her $n \in \mathbb{N}$ için bize bir $v_n \in \mathcal{V}$ hesaplayan bir algoritmamız olduğu anlamına geldiğini söylemekle yetinelim.

$v_0, v_1, v_2, \ldots, v_m$ değişkenler kümesi vardır, ancak sonlu sayıda olmak koşuluyla, daha fazlasına gereksinim duyduğumuzda $m < n$ için

$$v_0, v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n$$

listesini oluşturabiliriz.

Mantık İmleri

$\neg, \curlywedge, \curlyvee, \to, \leftrightarrow, \dot\forall, \dot\exists, \doteq$. Bu imler sırasıyla sözeden kuramdan "*değil", "ve", "veya", "ise", "ancak ve ancak", "her", "en az bir"* ve "*eşitliği*", imlerle sırasıyla $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists, =$'yi biçimselleştirirler. Önermeler mantığının tüm imlerini daha baştan almaya gerek yoktur. önermeler mantığından fonksiyonel tam olan herhangi bir $J' \subset J$ ile mantık imleri olarak

$$J' \cup \{\doteq, \dot\exists\} \text{ veya } J' \cup \{\doteq, \dot\forall\}$$

almak yeterlidir. Teorem (2.5.12)'den dolayı J' olarak $\{\neg, \curlywedge\}$, $\{\neg, \curlyvee\}$, $\{\neg, \to\}$, $\{\uparrow\}$ veya $\{\downarrow\}$ alınabilir. $\dot\exists$ veya $\dot\forall$ seçilmişse diğeri (3.1) sağlanacak biçimde

$$\dot\forall x\psi := \neg\dot\exists x\neg\psi \text{ veya } \dot\exists x\varphi := \neg\dot\forall x\neg\varphi$$

olarak tanımlanır. Biz önermeler mantığını ilksavlaştırırken $\{\neg, \to\}$'den yola çıktığımız için burada mantık imleri olarak

$$M := \left\{\neg, \to, \dot\forall, \doteq\right\}$$

alacağız.

$\doteq$ mantık imi olarak alınacağı gibi bir ikili bağıntı imi olarak da alınabilir ve $\mathcal{R}$ bağıntı imlerine katılabilir. Biz her ne kadar $\doteq$ imini mantık imleri arasına katmış olsak da *bağıntılar için söyleyeceğimiz her şeyin $\doteq$ için de söylenmiş olduğunu varsayacağız.*

Bağıntı, Fonksiyon ve Sabit İmleri

Bir yandan $\mathcal{V} \cup M$ kümesiyle ayrık, diğer yandan kendi aralarında ikişer ikişer ayrık olan bir $\mathcal{C}$ **sabit imler**i kümesi, bir $\mathcal{F}$ **fonksiyon imleri** kümesi ve $\mathcal{R}$ **bağıntı imleri** kümesi verilmiştir. $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$ ve $\mathcal{F}$ kümelerinin çokluğu üzerine herhangi bir koşul koymuyoruz. Matematik yapılarda genellikle $\mathcal{R}$ ve $\mathcal{F}$ sonlu kümelerdir. $L = \mathcal{R} \sqcup \mathcal{F} \sqcup \mathcal{C}$ kümesine **birinci dereceden bir (biçimsel) dil** denir. Bu dili bazen $L = (\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{C})$ olarak da göstereceğiz. $\mathcal{R}$ ve $\mathcal{F}$ kümeleri birer

$$\mathcal{R} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{R}_n \text{ ve } \mathcal{F} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{F}_n$$

parçalanışlarıyla verilmiştir. Bu parçalanışın bir $\sigma : \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \to \mathbb{N}^*$ dönüşümü ile de verilebileceğini biliyoruz. Bu durumda σ'ya L **dilinin işareti** denir. $\mathcal{C}$,

$\mathcal{R}$ ve $\mathcal{F}$ kümelerinin L dili ile ilişkisini vurgulamak gerekirse bunları $\mathcal{C}_L$, $\mathcal{R}_L$ ve $\mathcal{F}_L$ ile göstereceğiz. L dili sonlu sayıda $R_1, \ldots, R_m$ bağıntı imleri, sonlu sayıda $f_1, \ldots, f_n$ fonksiyon imleri ve sonlu sayıda $c_1, \ldots, c_k$ sabit imlerinden oluşuyorsa, bu dili

$$L = (R_1, \ldots, R_m; f_1, \ldots, f_n; c_1, \ldots, c_k)$$

olarak, eğer yanlış anlaşılmayacağını düşünüyorsak

$$L = \{R_1, \ldots, R_m, f_1, \ldots, f_n, c_1, \ldots, c_k\}$$

olarak yazacağız.

Örnek 3.3.1 Bazı önemli dilleri verelim.

$L_\emptyset$	$= \emptyset$	Boş dil, Yüklemsel mantık dili
L_g	$= \{\bullet, \mathbf{e}\}$	Grup dili
L_h	$= \{\dot{+}, \bullet, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}$	Birim öğeli halka dili
L_{sc}	$= \{\prec, \dot{+}, \bullet, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}$	Sıralanmış cisim dili
L_s	$= \{\prec\}$	Sıralama dili
L_a	$= \{\mathbf{S}, \dot{+}, \bullet, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}$	Aritmetik dili
L_k	$= \{\dot{\in}\}$	Kümeler Kuramı dili

Burada $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{e}$ sabit imleri S tek değişkenli $\dot{+}, \bullet$ iki değişkenli fonksiyon imleri, $\prec$ ve $\dot{\in}$ ikili bağıntı imleridir. Kümeler Kuramı'nın son derece yoksul görünen $L_k = \{\dot{\in}\}$ dili neredeyse tüm matematiği dile getirmek için yeterlidir. Diğer yandan, Gruplar Kuramı'nın dili olarak $\{\bullet\}$ veya $\{\bullet, ^{-\mathbf{1}}, \mathbf{e}\}$ de alınabilir. Burada $^{-\mathbf{1}}$ tek değişkenli bir fonksiyon imidir. Bu dillerin seçimine göre aksiyomlarımız değişir, bunların cebir derslerinden okura tanıdık olduğunu düşünüyoruz. ▲

Yardımcı İmler

Yardımcı imlerimiz) sağ ve (sol ayraçlarıdırlar. Bu iki ayraç formüllerimizin tek türlü okunmasını kolaylaştırmak için kullanılır. Bu imler olmasa da olur, ancak çok yararlıdırlar. Biçimsel kuramımızı genişletmez, onlara yeni teoremler de yeni çelişkiler de eklemezler.

Abece

Abecemiz $W := \mathcal{V} \cup M \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C} \cup \{), (\}$ kümesidir. W abecesinin $\mathcal{V} \cup M \cup \{), (\}$ kısmı, $\mathcal{V}$ kümesinin ve M kümesinin seçimindeki serbestliği bir yana bırakırsak tüm birinci dereceden dillerin ortak kısmıdır. Bu diller birbirinden $\mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$ ile ayrılırlar, bu nedenle bu kümeye dil denmiştir. $\mathrm{Sz}\, W$ sözcükleri tek türlü okunurlar. Sözcüklerin bir kısmını terim ve formül olarak sınıflandıracağız.

L-Dilinin Terimleri

$\operatorname{Sz} W$ sözcükler kümesinin aşağıdaki koşulları sağlayan $A \subseteq \operatorname{Sz} W$ kümelerine bir T-k**ümesi** diyelim:

(1) $\mathcal{C} \subseteq A$,

(2) $\mathcal{V} \subseteq A$,

(3) $n \in \mathbb{N}^*, f \in \mathcal{F}_n$ ve $t_1, \ldots, t_n \in A$ ise $ft_1 \ldots t_n \in A$.

Her şeyden önce $\operatorname{Sz} W$ bir T-kümesidir.

$$\operatorname{Tm} L := \bigcap \{A \mid A \subseteq \operatorname{Sz} W \text{ bir } T\text{-kümesi}\}$$

kümesinin öğelerine L **dilinin terimleri** denir. Bu durumda

(T1) Her değişken bir L-terimidir.

(T2) Her $c \in \mathcal{C}$ sabit imi bir L-terimidir.

(T3) Her $n \in \mathbb{N}^*$ için $f \in \mathcal{F}_n$ ve $t_1, \ldots, t_n$ birer L- terimleri ise $ft_1 \ldots t_n$ de bir L- terimidir. Tüm terimler (T1)–(T3) ile elde edilenlerdir.

Burada ön yazılımı kullandık. Yine de kimi zaman kolay izlenebilirlik için $ft_1 \ldots\ t_n$ yerine $f(t_1, \ldots, t_n)$ yazacağız. Ayrıca alışılmış $f \in \mathcal{F}_2$ için fst yerine sft de yazdığımız da olacaktır. Her abecede sözcüklerin harfsel yazılımları tek türlüdür. Benzerini terimler için kanıtlayacağız.

(T1)–(T3) bize **terimler için tümevarımsal tanımlama (TTT)** ve **terimler için tümevarımsal kanıtlama (TTK)** yöntemlerini verir. Her t terimi için $p(t)$ özelliğini açıklamak ($q(t)$ önermesini kanıtlamak) istiyorsak aşağıdaki adımlar yeterlidir:

1. Her $x \in \mathcal{V}$ için $p(x)$ tanımlanır ($q(x)$ kanıtlanır).
2. Her $c \in \mathcal{C}$ için $p(c)$ tanımlanır ($q(c)$ kanıtlanır).
3. $t_1, \ldots, t_n$ için $p(t_1), \ldots, p(t_n)$ tanımlanmışsa ($q(t_1), \ldots, q(t_n)$ kanıtlanmışsa), bunlar kullanılarak, $f \in \mathcal{F}_n$ olmak üzere $t = ft_1 \ldots t_n$ ise $p(t)$ tanımlanır ($q(t)$ kanıtlanır).

L Dilinin Formülleri

$\operatorname{Sz} W$ sözcükler kümesinin bir A altkümesine aşağıdaki özellikleri sağladığında bir F-k**ümesi** diyelim:

1. Her $s, t \in \operatorname{Tm} L$ için $s \doteq t \in A$.
2. Her $t_1, \ldots, t_n \in \operatorname{Tm} L$ ve her $R \in \mathcal{F}_n$ için $Rt_1 \ldots t_n \in A$.
3. Her $\varphi \in A$ için $\neg\varphi \in A$.
4. Her $\varphi, \psi \in A$ için $(\varphi \to \psi) \in A$.
5. Her $\varphi \in A$ ve her $x \in \mathcal{V}$ için $\dot{\forall} x\varphi \in A$.

Her şeyden önce $\operatorname{Sz} W$ bir F-kümesidir.

$$\operatorname{Fm} L := \bigcap \{A \mid A \subseteq \operatorname{Sz} W \text{ bir } F\text{-kümesi}\}$$

kümesinin öğelerine L **dilinin formülleri** denir. Bu durumda

(F1) s ve t terimler olmak üzere $s \doteq t$ bir formüldür.

(F2) $R \in \mathcal{R}_n$ ve $t_1, \ldots, t_n$ terim iseler $Rt_1 \ldots t_n$ bir formüldür.

(F3) φ bir formülse $\neg\varphi$ de bir formüldür.

(F4) φ ve ψ formülseler $(\varphi \to \psi)$ de bir formüldür.

(F5) φ bir formül ve x bir değişkense $\dot{\forall} x\varphi$ de bir formüldürler.

Tüm formüller bu işlemlerle elde edilenlerdir.

Bu formüllere L-**formülleri** denir. (F1) ve (F2) de verilen formüllere **atomik** veya **temel formüller** denir. Burada $\doteq$ ve $\to$ iç yazılımda, $R, \neg$ ve $\dot{\forall}$ ön yazılımda kullanılmıştır. $\dot{\forall}$ bir ikili işler olmasına karşın, alışkanlıklara uyularak ön yazılımda kullanılmıştır. Önermeler mantığını ilksavlaştırırken $\curlywedge, \curlyvee$ ve $\leftrightarrow$'yı $\neg$ ve $\to$ ile tanımlamıştık. O tanımları burada da koruyacağız ve (3.1) sağlanacak biçimde

$$\dot{\exists} x\varphi := \neg\dot{\forall} x\neg\varphi$$

olarak açıklayacağız. Tekrarlamak da olsa bir kez daha belirtmekte yarar var:

1. $(\neg\varphi \to \psi)$ yerine $(\varphi \curlyvee \psi)$,
2. $\neg(\varphi \to \neg\psi)$ yerine $(\varphi \curlywedge \psi)$
3. $(\varphi \to \psi) \curlywedge (\psi \to \varphi)$, dd. $\neg((\varphi \to \psi) \to \neg(\psi \to \varphi))$ yerine $(\varphi \leftrightarrow \psi)$

ve

4. $\neg\dot{\forall} x\neg\varphi$ yerine $\dot{\exists} x\varphi$ yazacağız.

Not 3.3.2 Çoğu yazar $s \doteq t, Rt_1 \cdots t_n, \neg\varphi$ ve $\dot{\forall} x\varphi$ formüllerini de ayraçlar arasına alır ve $(s \doteq t), (Rt_1 \cdots t_n), (\neg\varphi)$ ve $(\dot{\forall} x\varphi)$ olarak gösterirler. Her ne kadar bu yanlış anlamaları daha iyi önlerse de, seçtiğimiz yalın yazılımın da yanlış anlaşılmayacağını düşünüyoruz. ▲

$\dot{\exists} x\varphi$ ve $\dot{\forall} x\varphi$ formüllerinde φ formülüne $\dot{\exists}$ ve $\dot{\forall}$ niceleyicilerinin **etki alanı** ve x değişkenine bu niceleyicilerin **(gezen) değişkeni** denir. Herhangi bir ψ formülünde birden fazla niceleyici bulunabilir. Herhangi bir ψ formülünde geçen bir $\dot{\forall} x$ niceleyicisinin *etki alanı* onu izleyen *ilk altformüldür.* Altformüllerin tanımını biraz ileride vereceğiz.

Burada $\curlywedge$, $\curlyvee, \leftrightarrow$ ve $\dot{\exists}$ bizim abecemizin harfleri değildirler. Bu nedenle, örneğin $(\varphi \curlyvee \psi)$ kısaltmasının uzunluğundan veya mantıksal uzunluğundan söz ettiğimizde anlaşılması gereken, yerine geçtiği $(\neg\varphi \to \psi)$ formülünün uzunluğu veya mantıksal uzunluğudur.

FmL İçin Tümevarımsal Tanımlar ve Kanıtlar

Terimlerde olduğu gibi burada da (F1)–(F5) bize Fm L **için bir tümevarımsal tanımlama** ve bir **tümevarımsal kanıtlama** yöntemi verir.

- (**FTT**)**:** Her Fm L için bir kavram açıklanmak istendiğinde, bu kavram önce atomik formüller için tanımlanır (*tümevarım başlangıcı)*, ardından bu kavram $\varphi, \psi \in \mathrm{Fm}\, L$ için açıklanmışsa (*tümevarım koşulu)*, bunlar yardımıyla bu kavramın $\neg\varphi$, $(\varphi \to \psi)$ ve $\dot{\forall} x\varphi$ ve için ne olacağı açıklanır (*tümevarım adımı*).

- **(FTK):** Her $\varphi \in \mathrm{Fm}\, L$ için bir önerme kanıtlanmak istendiğinde, bu önerme önce atomik formüller için kanıtlanır (*tümevarım başlangıcı*) ardından $\varphi, \psi \in \mathrm{Fm}\, L$ için kanıtlanmışsa (*tümevarım koşulu*) $\neg\varphi$, $(\varphi \to \psi)$ ve $\dot{\forall} x\varphi$ için kanıtları verilir (*tümevarım çıkarımı*).

Lemma 3.3.3 *Terimlerin öz başlangıçları terim değildir, dd. s terimi t teriminin başlangıcı ise $s = t$.*

Kanıt. t sözcüğünün $n = \mathrm{uz}(t)$ uzunluğu üzerinden tümevarımla kanıtlayacağız. $n = 1$ ise kanıtlanacak bir şey yoktur: Ya t ve s ikisi birden bir c sabit imi, ya da ikisi birden bir x değişkenidir. Önerme n için kanıtlanmış ve $\mathrm{uz}(t) = n + 1$ olsun. Bu durumda s ve t terimleri, harfsel yazılımlarının tekliğinden dolay, aynı $f \in \mathcal{F}_k$ ile başlarlar. Dolayısıyla $s_1, \ldots, s_k$ ve $t_1, \ldots t_k$ terimleriyle $s = fs_1 \ldots s_k$ ve $t = ft_1 \ldots t_k$ olur. $t_i = s_i, i = 1, \ldots, k$ olduğunu görelim. Bunun doğru olmadığını varsayalım ve eşitliğin doğru olmadığı en küçük damga i olsun. Bu durumda $j = 1, \ldots, i-1$ için $t_j = s_j$ ve $t_i \neq s_i$ olduğundan, ya t_i terimi s_i teriminin bir başlangıcı, ya da tersine s_i terimi t_i teriminin bir başlangıcı olmak zorundadır. $\mathrm{uz}(t_i) \leq n$ ve $\mathrm{uz}(s_i) \leq n$ olduğundan tümevarım koşulundan $s_i = t_i$ olur. Bu bir çelişki olduğundan varsayım yanlıştır. ■

Teorem 3.3.4 ***(Terimlerin tek türlü okunması)*** *Her $t \in \mathrm{Tm}\, L$ için, ya*

1. Tek olarak belirli bir $c \in \mathcal{C}$ ile $t = c$, ya

2. Tek olarak belirli bir $x \in \mathcal{V}$ ile $t = x$, ya da

3. Tek olarak belirli $f \in \mathcal{F}_n$ ve tek olarak belirli $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{Tm}\, L$ ile $t = ft_1 \ldots t_n$, dd. $f \in \mathcal{F}_n, g \in \mathcal{F}_m, t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{Tm}\, L$ ve $s_1, \ldots, s_m \in \mathrm{Tm}\, L$ olmak üzere

$$ft_1 \ldots t_n = gs_1 \ldots s_m \Longleftrightarrow n = m, f = g, t_1 = s_1, \ldots, t_n = s_n$$

Kanıt. 1. ve 2. aşikâr. Şimdi $t = ft_1 \dots t_n = gs_1 \dots s_m$ olsun. t teriminin harfsel yazılımı tek türlü olduğundan $f = g$ ve $n = m$ olmak zorundadır. Dolayısıyla $ft_1 \dots t_n = fs_1 \dots s_n$ elde ederiz. Bu durumda t_1 ve s_1 terimlerinden biri diğerinin başlangıcı olmak zorundadır. Buradan (3.3.3) ile $t_1 = s_1$ elde edilir. Böyle devam ederek sonlu adımda $i = 1, \dots, n$ için $s_i = t_i$ elde edilir. ■

Lemma 3.3.5 *L-formüllerinin öz başlangıçları L-formülleri olamaz, dd. φ formülü ψ formülünün bir başlangıcı ise $\varphi = \psi$*

Kanıt. (FTK) ile, dd. formüller üzerinden tümevarımla kanıtlayacağız. φ, $\psi \in \mathrm{Fm}\, L$ ve φ ise ψ'nin bir başlangıcı olsun. Bu durumda $\varphi = \psi$ olduğunu kanıtlayacağız. ψ formülü (F1)–(F5)'te belirtilen beş tipten biri olmak zorundadır. Diğer yandan formüllerin tiplerine baktığımızda φ ve ψ formülünün aynı tipten olduğu görülür. Sırasıyla irdeleyeceğiz.

Önermeyi önce atomik formüller için kanıtlayalım. Eğer ψ formülü $t_1 \doteq t_2$ ise φ formülü $s_1 \doteq s_2$ tipinde olmak zorundadır. Her iki formülde de $\doteq$ bir kez geçtiğinden ya t_1 terimi s_1 teriminin başlangıcı ya da s_1 terimi t_1 teriminin bir başlangıcı olmak zorundadır. Dolayısıyla (3.3.3) ile $s_1 = t_1$ ve benzer irdelemeyle $s_2 = t_2$ elde edilir. Şimdi $\psi = Rt_1 \dots t_n$ olsun. Elbette φ de R ile başlar. φ formülü $s_1, \dots, s_n$ terimleri ile $Rs_1 \cdots s_n$ olsun. φ formülü ψ formülünün başlangıcı olduğundan ya s_1 terimi t_1 teriminin başlangıcı ya da tersi olmak zorundadır. Buradan (3.3.3) ile $s_1 = t_1$ ve benzer biçimde irdelemeye devam ederek sonlu adımda her i için $s_i = t_i$ elde ederiz. Dolayısıyla $\varphi = \psi$ olur.

Şimdi $\psi = \neg\eta$ ve önerme η için kanıtlanmış olsun. φ formülü de $\neg$ ile başlar ve bir η' formülü ile $\varphi = \neg\eta'$ olmak zorundadır. η' formülü η'nın başlangıcı ve önerme η için kanıtlanmış olduğundan $\eta' = \eta$, dolayısıyla $\varphi = \psi$ olur.

Önerme $\xi, \eta \in \mathrm{Fm}\, L$ için kanıtlanmış ve $\psi = (\xi \to \eta)$ olsun. φ bir formül ve (ile başladığından en az iki $\xi', \eta' \in \mathrm{Fm}\, L$ formülü ile $\varphi = (\xi' \to \eta')$ olmak zorundadır. Bu durumda ξ' formülü ξ formülünün veya ξ formülü ξ' formülünün bir başlangıcı olmak zorundadır. Buradan ise tümevarım koşulumuzdan $\xi = \xi'$, ardından $\eta' = \eta$ elde edilir ve her durumda $\varphi = \psi$ olur.

Şimdi önerme η için kanıtlanmış ve $\psi = \dot{\forall} x\eta$ olsun. Bu durumda φ başlangıç formülü bir ξ formülü ile $\dot{\forall} x\xi$ olmak zorundadır. Bu durumda ξ formülü η formülünün bir başlangıcı olacağından varsayımımızla önce $\xi = \eta$, ardından $\varphi = \psi$ elde edilir. ■

Her φ formülünde sol ayraçların sayısı sağ ayraçlara eşittir (alıştırma). φ formülünün herhangi bir *öz* başlangıcında ise sağ ayraçların sayısı sol ayraç-

ların sayısından daha küçük olacağından, öz başlangıç bir formül olamaz! (3.3.5) ve kanıtının doğrudan sonucu aşağıdaki teklik teoremidir.

Teorem 3.3.6 (Formüllerin tek türlü okunması) *Her φ formülü için aşağıdaki beş durumdan biri ve ancak biri doğrudur*

1. $\varphi = s \doteq t$, $s, t \in \operatorname{Tm} L$.

2. $\varphi = Rt_1 \dots t_n$, $R \in \mathcal{R}_n$, *ve* $t_1, \dots, t_n \in \operatorname{Tm} L$.

3. $\varphi = \neg\psi$, $\psi \in \operatorname{Fm} L$.

4. $\varphi = (\psi \to \eta)$, $\psi, \eta \in \operatorname{Fm} L$.

5. $\varphi = \dot{\forall} x\psi$, $x \in \mathcal{V}$ *ve* $\psi \in \operatorname{Fm} L$.

Ayrıca bu gösterimlerde geçen $s, t, R, t_1, \dots, t_n, \psi, \eta$ ve x imleri tek *olarak belirlidirler.*

Sonuç 3.3.7 *Herhangi bir $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ formülünün, $\psi, \eta \in \operatorname{Fm} L$ olmak üzere tanımlanmış mantık imleriyle*

$$(\psi \barwedge \eta) \text{ veya } (\psi \veebar \eta) \text{ veya } (\psi \leftrightarrow \eta) \text{ veya } \dot{\exists} x\psi$$

gibi bir ifadesi varsa, bu gösterimlerden ancak birine *eşit olabilir ve bu tipten gösterimi de* tek *olarak belirlidir.*

Not 3.3.8 Geleneksel matematikte herhangi bir $\mathfrak{A}$ yapısını incelerken, onun terimlerinin ve formüllerinin tek türlü okunabilirliğini asla tartışmayız. Bunun önemi biçimsel kuramları incelerken ortaya çıkmıştır. $\mathfrak{A}$ yapısının terimlerini ve formüllerini oluştururken

$$W^{\mathfrak{A}} = \mathcal{V}^{\mathfrak{A}} \cup L^{\mathfrak{A}} \cup \{\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists, =\} \cup \{), (\}$$

abecesini kullandık[5]. Buradan yola çıkarsak, $\operatorname{Tm} L^{\mathfrak{A}}$ terimleri ile $\operatorname{Fm} L^{\mathfrak{A}}$ formüllerinin tek türlü okunabilirliğini elde ederiz. Böylece her $t \in \operatorname{Tm} L^{\mathfrak{A}}$ terimi *tek* olarak belirli $c \in \mathcal{C}^{\mathfrak{A}}$, $x \in \mathcal{V}$, $f \in \mathcal{F}_n^{\mathfrak{A}}$ ve $t_1, \dots, t_n$ ile şu üç tipten yalnızca biridir

$$t = c \text{ veya } t = x \text{ veya } t = f(t_1, \dots, t_n)$$

Her $\varphi \in \operatorname{Fm} L^{\mathfrak{A}}$ formülü ise *tek* olarak belirli s, t, $t_1, \dots, t_n \in \operatorname{Tm} L^{\mathfrak{A}}$, $f \in \mathcal{F}^{\mathfrak{A}}$, $R \in \mathcal{R}^{\mathfrak{A}}$, $\psi, \eta \in \operatorname{Fm} L^{\mathfrak{A}}$ ve $x \in \mathcal{V}$ ile aşağıdaki tiplerden biri ve ancak biridir:

$$(s = t),\ R(t_1, \dots, t_n), \neg\psi,\ (\psi \Rightarrow \eta)\,,\ \forall x\psi$$

[5]Biz $\mathcal{V}^{\mathfrak{A}} = \mathcal{V}$ almakta bir sakınca görmeyeceğiz. Aşırı titiz olacaksak $\mathcal{V}^{\mathfrak{A}} \neq \mathcal{V}$ alabilir, örneğin biçimsel değişkenlerimizi $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \dots$ gibi koyu, onların yapıdaki yorumlarını ise $x, y, z, \dots$ olarak yazabilirdik. Ancak değişkenlerin geçtikleri terim ve formüllerden biçimsel kuramda mı, yoksa yapılarda mı olduğumuz kuşkuya yer bırakmayacak kadar açık olacağından bu yalınlığı seçtik.

▲

Kısaltmalar

$\neg x \doteq x$ yerine $x \neq x$ yazacağız[6]. Ayrıca aşağıdaki kısaltmaları kullanacağız:

$$\dot{\exists} x \dot{\forall} y \, (\varphi(y) \leftrightarrow x \doteq y) \text{ yerine } \dot{\exists}! x \varphi(x)$$

$\mathcal{V}$ değişkenler kümemizi $\mathcal{V} = (v_\alpha)_{\alpha<\mu}$ olarak iyi sıralayalım ve bu sıralama sabit tutulsun. $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ ise

$$\dot{\forall} v_{a_1} \cdots \dot{\forall} v_{\alpha_n} \varphi := \dot{\forall} v_{\alpha_n} (\cdots (\dot{\forall} v_{a_2} (\dot{\forall} v_1 \varphi)) \cdots)$$
$$\dot{\exists} v_{a_1} \cdots \dot{\exists} v_{\alpha_n} \varphi := \dot{\exists} v_{\alpha_n} (\cdots (\dot{\exists} v_{a_2} (\dot{\exists} v_{a_1} \varphi)) \cdots)$$

olarak açıklansın. $(x_1, \ldots, x_n)$, $\{v_{a_1}, \ldots, v_{\alpha_n}\}$'in herhangi bir permütasyonu ise

$$\dot{\forall} x_1 \ldots \dot{\forall} x_n \psi := \dot{\forall} v_{\alpha_1} \cdots \dot{\forall} v_{\alpha_n} \varphi \text{ ve } \dot{\exists} x_1 \ldots \dot{\exists} x_n \psi := \dot{\exists} v_{\alpha_1} \cdots \dot{\exists} v_{\alpha_n} \varphi$$
$$\dot{\forall} x_1 \ldots x_n \psi := \dot{\forall} x_1 \ldots \dot{\forall} x_n \psi \text{ ve } \dot{\exists} x_1 \ldots x_n \psi := \dot{\exists} x_1 \ldots \dot{\exists} x_n \psi.$$

Yine $x_1, \ldots, x_n$ yerine $\overline{x_n}$ ve $t_1, \ldots, t_n$ yerine $\overline{t_n}$ kısaltmalarını kullanacağız. Bu kısaltmalarla örneğin $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, $f(t_1, \ldots, t_n)$ vs.yerine bazen $\varphi(\overline{x_n})$, $f(\overline{t_n})$ vs. yazacağız.

Ayraç Azaltma Uzlaşması

Önermeler mantığındaki ayraç azaltma uzlaşmalarımız aynen kalacaktır. Ek olarak $\mathcal{F}; \mathcal{R}, \doteq; \dot{\exists}, \dot{\forall}$ imlerinin bağlama derecelerini belirlemeliyiz. Aşağıda imlerimiz beş grup olarak verilmiştir: $x \in \mathcal{V}$ olmak üzere

$$\mathcal{F};\ \mathcal{R},\ \doteq\ ;\ \neg,\ \dot{\exists} x,\ \dot{\forall} x\ ;\ \curlywedge,\ \curlyvee\ ;\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$$

Grupların bağlama dereceleri soldan sağa azalacaktır. $\neg$, $\dot{\exists} x$, $\dot{\forall} x$ *kendilerini izleyen ilk* altformüle uygulanırlar. Diğer gruptaki imlerin bağlama dereceleri aynı olacaktır; bu nedenle onlar peşpeşe geldiklerinde neyi kastettiğimiz belirtebilmek için ayraç kaçınılmazdır. Niceleyiciler güçlü bağladıkları için $(\dot{\forall} x \varphi \rightarrow \psi)$ ile kastedilenin $\dot{\forall} x \, (\varphi \rightarrow \psi)$ *olmadığı* ve $(\dot{\exists} x \varphi \rightarrow \psi)$ ile kastedilenin $\dot{\exists} x \, (\varphi \rightarrow \psi)$ *olmadığı* apaçıktır! Ayrıca en baştaki ve en sondaki ayraçlar kaldırılabilir. Niceleyicilerin bağlama dereceleri bazı yazarlarca farklı kullanılmaktadır. Bazen yanlış anlaşılmamak için gereğinden fazla ayraç kullanacağız. Daha önce de belirttiğimiz gibi $\doteq$, özünde bir bağıntı imi olduğundan, yukarıdaki gruplamada bağıntıların yanına alınmıştır.

[6] $(x \neq x)$ gösteriminde eşitlik iminin üzerindeki nokta görünmemektedir. Ancak okuyucunun burada eşitlik imi mi yoksa özdeşlik imi mi olduğunu ayırt edebileceğini umuyoruz.

Kural olarak $f \in \mathcal{F}_2$ ve $R \in \mathcal{R}_2$ ise s ve t terimler olmak üzere fst yerine sft ve Rst yerine ise sRt yazacağız. Sıralanmış cisimlerin $L_{sc} := (\prec ; \dot{+}, \bullet; \mathbf{0}, \mathbf{1})$ dilinde $\prec \in \mathcal{R}_2$ ve $\dot{+}, \bullet \in \mathcal{F}_2$ olduğunu biliyoruz. Örneğin bu dilin

$$\dot{\forall} x \, (\mathbf{0} \prec x) \to \Big(\dot{\forall} y \Big(\dot{\forall} z \, ((y \prec z) \to ((x \bullet y) \prec (x \bullet z))) \Big) \Big) \tag{3.2}$$

formülü verilsin. Formülümüzde 8 sağ ayraç ve 8 sol ayraç vardır. Ayraç azaltırken, her sağ ayraca karşılık bir sol ayraç atılacağından, sonuçta elde edeceğimiz formülde de sağ ve sol ayraçların sayısı aynı olacaktır. Fonksiyonlar en sıkı bağladığından $(x \bullet y) \prec (x \bullet z)$ formülünü, yanlış anlaşılmadan $x \bullet y \prec x \bullet z$ olarak yazabiliriz. Daha sonra $\prec$ bağıntısı $\to$'den daha sıkı bağladığından $(y \prec z) \to (x \bullet y \prec x \bullet z)$ yerine rahatlıkla $y \prec z \to x \bullet y \prec x \bullet z$ yazabiliriz. Formülümüzün $(0 \prec x) \to$ kısmını rahatlıkla $0 \prec x \to$ olarak yazabiliriz. Son olarak $\dot{\forall}$'in $\to$'den daha sıkı bağladığını gözetirsek (3.2) formülümüz

$$\dot{\forall} x \; 0 \prec x \to \dot{\forall} y \dot{\forall} z (y \prec z \to x \bullet y \prec x \bullet z)$$

olarak yazılabilir.

Fonksiyon ve bağıntı imlerinin bağlamalarını kümeler kuramında örnekleyelim. Kümeler Kuramı'nın dili bir tek $\dot{\in}$ bağıntısını içerir. Ayrıca sonradan tanımlanan, örneğin $\cup, \cap \ldots$ gibi bazı fonksiyon imlerimiz ve $\subseteq, \subset, \ldots$ gibi bazı bağıntı imlerimiz olacaktır. Fonksiyon imleri bağıntı imlerinden daha sıkı bağladığından $(x \dot{\in} (y \cup z))$ yerine $x \dot{\in} y \cup z$ ve $(x \cap y) \subseteq z$ yerine $x \cap y \subseteq z$ yazabiliriz.

Sağ parantezleme: Bazen $\varphi_1 \to \varphi_2 \to \cdots \varphi_{n-1} \to \varphi_n$ gibi aynı mantık iminin, örneğimizde $\to$ iminin peşpeşe geldiği diziler kullanacağız. Böyle bir yazılımda $\to$ iminin sağdan sola doğru azaldığını varsayacağız. Örneğin

$$\begin{aligned} \varphi_1 \to \varphi_2 \to \cdots \varphi_{n-1} \to \varphi_n &:= \varphi_1 \to (\varphi_2 \to \cdots \to (\varphi_{n-1} \to \varphi_n) \cdots) \\ \varphi_1 \barwedge \varphi_2 \barwedge \cdots \varphi_{n-1} \barwedge \varphi_n &:= \varphi_1 \barwedge (\varphi_2 \barwedge \cdots \barwedge (\varphi_{n-1} \barwedge \varphi_n) \cdots). \end{aligned}$$

Böylece $\varphi_1 \to \varphi_2 \to \varphi_3$ ifadesi $\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \varphi_3)$ için kullandığımız bir kısaltma olacaktır.

Değişkenler

Şimdi (TTT) ve (FTT) yöntemini kullanarak her $t \in \operatorname{Tm} L$ ve her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ için bunların $\deg t$ ve $\deg \varphi$ değişken kümelerini tanımlayacağız.

1. $t = c \in \mathcal{C}$ ise $\deg t := \emptyset$,
2. $t = x \in \mathcal{V}$ ise $\deg t := \{x\}$,
3. $t = f t_1 \ldots t_n$ ise $\deg t := \deg t_1 \cup \cdots \cup \deg t_n$.

(3.3.4)'ten dolayı bu tanımlar kusursuzdur. $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ için

1. $\varphi = s \doteq t$ ise $\deg\varphi := \deg s \cup \deg t$,
2. $\varphi = Rt_1 \dots t_n$ ise $\deg\varphi := \deg t_1 \cup \dots \cup \deg t_n$,
3. $\varphi = \neg\psi$ ise $\deg\varphi := \deg\psi$,
4 $\varphi = (\psi \to \eta)$ ise $\deg\varphi := \deg\psi \cup \deg\eta$
5. $\varphi = \dot\forall x\psi$ ise $\deg\varphi := \deg\psi \cup \{x\}$.

(3.3.6)'dan dolayı bu tanımlar kusursuzdur. Kısaca: Herhangi bir terimin veya formülün değişkenlerinin kümesi, bunların harfsel yazılımında geçen değişkenlerin kümesidir. Bu tanımların doğal sonucu olarak

$\deg(\varphi \barwedge \psi) = \deg(\varphi \veebar \psi) = \deg(\varphi \leftrightarrow \psi) = \deg\varphi \cup \deg\psi$ ve
$\deg \dot\exists x\varphi = \deg\varphi \cup \{x\}$.

$\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ yazdığımızda kast edilen $\deg\varphi \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ olduğudur.

Altformüller

Bir formülün altformülleri kendisi ve kendisini atomik formüllerden başlayarak yukarıdaki kurallara uygun olarak elde ederken oluşturduğumuz formüllerden oluşur. Her $\varphi \in \mathrm{Fm}\, L$ için φ formülünün altformüllerinin $\mathrm{alf}\,\varphi$ kümesi FTT ile aşağıdaki gibi tanımlanır:

1. φ bir atomik formülse $\mathrm{alf}\,\varphi := \{\varphi\}$
2. $\varphi = \neg\psi$ ise $\mathrm{alf}\,\varphi := \{\varphi\} \cup \mathrm{alf}\,\psi$
3. $\varphi = (\psi \to \eta)$ ise $\mathrm{alf}\,\varphi := \{\varphi\} \cup \mathrm{alf}\,\psi \cup \mathrm{alf}\,\eta$
4. $\varphi = \dot\forall x\psi$ ise $\mathrm{alf}\,\varphi := \{\varphi\} \cup \mathrm{alf}\,\psi$.

Bu tanımın bir sonucu olarak $\diamond \in \{\barwedge, \veebar, \leftrightarrow\}$ olmak üzere
$\mathrm{alf}(\psi \diamond \eta) = \mathrm{alf}\,\psi \cup \mathrm{alf}(\eta) \cup \{(\psi \diamond \eta)\}$, ve $\mathrm{alf}\,\dot\exists x\psi = \left\{\dot\exists x\psi\right\} \cup \mathrm{alf}\,\psi$.

Değişkenlerin Sınıflandırılması

Bir formülde geçen değişkenler o formülde iki şekilde *bulunurlar*: **serbest** ve **bağlı.** Burada formüldeki değişkenleri iki sınıfa ayırmadığımızın, onları *bulundukları yere göre* sınıflandırdığımızın altını çizmekte yarar var. *Aynı değişken* bir formülde *bir yerde serbest başka bir yerde bağlı* bulunabilir. Şimdi değişkenlerin *bağlı* ve *serbest* bulunmalarını tanımlayacağız. Özetle bir ψ formülünde x değişkeni ψ'nin herhangi bir altformülünde geçen bir niceleyicinin gezen değişkeni ise kendisi *bağlı* bulunduğu gibi o niceleyicinin etki alanındaki x'ler de bağlı bulunurlar, dd. $\dot\exists x\varphi, \dot\forall x\varphi$ bir altformülse niceleyicilerden sonra gelen x değişkeni ve φ formülündeki x değişkenleri φ *de bulundukları her yerde bağlı bulunurlar.* Kısacası $\dot\exists x\varphi, \dot\forall x\varphi$ altformüllerindeki *bütün* x'ler bağlı bulunurlar. Diğer biçimde bulunan değişkenler serbest olarak bulunmaktadırlar. Şimdi t terimleri ve φ formülleri için (TTT) ve FTT ile $\mathrm{Bg}\, t, \mathrm{Bg}\,\varphi$ **bağlı değişkenler kümelerini** ve $\mathrm{Sb}\, t, \mathrm{Sb}\,\varphi$ **serbest değişkenler kümelerini** tanımlayalım:

1. Her $t \in \operatorname{Tm} L$ ve her atomik φ için $\operatorname{Bg} t = \operatorname{Bg} \varphi := \emptyset$ ve $\operatorname{Sb} t := \deg t$ ve $\operatorname{Sb} \varphi := \deg \varphi$

2. Her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ için $\operatorname{Bg} \neg\varphi = \operatorname{Bg} \varphi$ ve $\operatorname{Sb} \neg\varphi = \operatorname{Sb} \varphi$

3. Her $\varphi = (\psi \to \eta)$ için $\operatorname{Bg} \varphi := \operatorname{Bg} \psi \cup \operatorname{Bg} \eta$ ve $\operatorname{Sb} \varphi := \operatorname{Sb} \psi \cup \operatorname{Sb} \eta$

4. $\varphi = \dot{\forall} x\psi$ ise $\operatorname{Bg} \varphi := \operatorname{Bg} \psi \cup \{x\}$ ve $\operatorname{Sb} \varphi := \operatorname{Sb} \psi \setminus \{x\}$.

Örnek $\varphi(x, y)$ ve $\psi(x)$ *hiçbir niceleyici içermeyen iki formül ise*

$$(\dot{\forall} x\varphi(x, y) \to \dot{\forall} x\psi(x)) \curlywedge (\dot{\exists} y\, \varphi(x, y))$$

formülünde soldan sağa doğru birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü x bağlı olarak bulunurken beşinci x serbest bulunur. Yine soldan sağa olmak üzere birinci y serbest ama ikinci ve üçüncü y değişkenleri bağlı olarak bulunmaktadırlar. L_{sc} dilinin $t \dot{=} x \bullet (y \dot{+} z)$ terimi ve $x \dot{+} 1 \prec y \dot{+} z$ atomik formülündeki x, y, z değişkenleri bulundukları her yerde serbest bulunurlar. Bu dilin

$$\varphi = \dot{\forall} x\, (x \prec y \to \exists z\, x \dot{+} z \doteq y) \text{ ve}$$
$$\psi = \mathbf{0} \prec x \dot{+} y \to \dot{\forall} y\ (\mathbf{0} \prec y \to \mathbf{0} \prec y \bullet (x \prec y))$$

formülleri için $\operatorname{Bg} \varphi = \{x, z\}$, $\operatorname{Sb} \varphi = \{y\}$, $\operatorname{Bg} \psi = \{y\}$, $\operatorname{Sb} \psi = \{x, y\}$. φ formülünde x, z değişkenleri bulundukları her yerde bağlı ve y değişkeni bulunduğu her yerde serbest bulunur. ψ formülünde ise x değişkeni bulunduğu her yerde serbest bulunurken soldan birinci y serbest, diğer y'ler bağlı bulunurlar. Herhangi bir φ formülü için daima $\deg \varphi = \operatorname{Bg} \varphi \cup \operatorname{Sb} \varphi$, diğer yandan ψ örneğinde görüldüğü gibi $\operatorname{Bg} \varphi \cap \operatorname{Sb} \varphi \neq \emptyset$ olabilir.

t bir terimse *tüm değişkenler*i bulundukları *her yerde serbest* bulunur. Atomik formüllerdeki *tüm değişkenler* bulundukları *her yerde serbest* bulunurlar. φ ve ψ iki formül olmak üzere ve $\diamond$ imi $\curlyvee, \curlywedge, \to$ ve $\leftrightarrow$ imlerinden herhangi birini göstermek üzere φ ve ψ'deki değişkenler bulundukları yerde nasıl bulunuyorlarsa $\neg\psi$ ve $\varphi \Diamond \psi$'de de *aynı biçimde* bulunurlar.

ψ herhangi bir formül olmak üzere $\dot{\exists} x\psi$ ve $\dot{\forall} x\psi$ formüllerindeki $\dot{\exists} x$ ve $\dot{\forall} x$ niceleyecileri eğer x *değişkeninin* ψ*'de serbest bulunduğu yerler varsa onları da bağlı duruma* getirir, bir anlamda onu *yok eder, öldürür:* x artık $\dot{\exists} x\psi$ ve $\dot{\forall} x\psi$ formüllerinde kendisine değerler verebileceğimiz bir değişken değildir.

Bazı notlar altında analizden verdiğimiz örneklere göz attığımızda görülecektir ki aritmetik formüllerinden ancak serbest değişken içermeyenlerin doğru ve yanlışlığından söz edebiliyoruz. Serbest değişkenler içeren bir $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ formülünün doğruluğundan bahsettiğimizde ise kastedilen serbest değişken içermeyen $\forall x_1 \cdots x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ formülünün doğruluğudur. Bu durum biçimsel kuramımıza aktarılacaktır.

Tanım 3.3.9 $\operatorname{Sb}\psi = \emptyset$ *ise, dd.* ψ *formülünün hiçbir değişkeni herhangi bir yerde serbest bulunmuyorsa* ψ *formülü bir* ***savdır*** *veya* ***önermedir*** *veya* ***kapalıdır*** *denir.* L *dilinin savlarının kümesini* $\operatorname{Sav} L$ *ile göstereceğiz, dd.*

$$\operatorname{Sav} L := \{\varphi \,|\, \varphi \in \operatorname{Fm} L \text{ ve } \operatorname{Sb}\varphi = \emptyset\}.$$

Benzer biçimde bir $t \in \operatorname{Tm} L$ *terimine* $\deg t = \emptyset$ *ise* ***kapalıdır*** *denir ve* L *dilinin kapalı terimlerinin kümesi* $\operatorname{Tmc} L$ *ile gösterilir.*

$\operatorname{Sav} L$ yerine çoğu yerde $\operatorname{Fmc} L$ yazılır. Ancak biz dilimize daha uygun ve göze batan $\operatorname{Sav} L$ gösterimini yeğledik.

Örneğin L_s dilinin $\varphi := \dot\exists z\,(x \prec z \curlywedge z \prec y)$ formülü $\operatorname{Sb}\varphi = \{x, y\} \neq \emptyset$ olduğundan bir sav değildir. Buna karşın serbest değişkenleri $\dot\forall x \dot\forall y$ ile bağlayarak elde edeceğimiz $\psi := \dot\forall x \dot\forall y \varphi$, dd.

$$\dot\forall x \dot\forall y \dot\exists z\,(x \prec z \curlywedge z \prec y)$$

bir savdır. Yine

$$\dot\forall x \dot\forall y\,(x \prec y \to \dot\exists z\,(x \prec z \curlywedge z \prec y))$$

bir savdır. L_{sc} dilinde $x\dot+y \doteq y\dot+x$ atomik formülü bir sav değildir, ancak $\dot\forall x \dot\forall y\,(x\dot+y \doteq y\dot+x)$ bir savdır.

Yerine Koyma

Anlamsal Öz: $s, t \in \operatorname{Tm} L$ ve $x \in X$ olsun. t teriminde, geçtiği her yerde x yerine s terimini yazarak elde edilen terim $t(x|s)$ ile gösterilir. Örneğin $s, t, t' \in \operatorname{Tm} L_h$ terimleri $s = x \bullet y$, $t = x\dot+x \bullet z$ ve $t' = y\dot+z$ ise

$$t(x|s) = x \bullet y\dot+(x \bullet y) \bullet z \text{ ve } t'(x|s) = y + z = t'.$$

Benzer biçimde $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ formülünde, x değişkeninin *serbest bulunduğu her yerde,* x yerine s terimini yazarak elde edilen formülü $\varphi(x|s)$ ile göstereceğiz[7]. Örneğin L_h dilinin $s = x \bullet y$ terimi ve

$$\varphi = \mathbf{0} \prec x \to \dot\exists x(\mathbf{1} \prec x\dot+\mathbf{1}) \text{ ve}$$
$$\psi = \mathbf{0} \prec x \to \dot\forall y\,(\mathbf{0} \prec y \to \mathbf{0} \prec x \bullet y)$$

formülleri için

$$\varphi(x|s) = \mathbf{0} \prec x \bullet y \to \dot\exists x(\mathbf{1} \prec x\dot+\mathbf{1}) \text{ ve}$$
$$\psi(x|s) = \mathbf{0} \prec x \bullet y \to \dot\forall y\,(\mathbf{0} \prec y \to \mathbf{0} \prec (x \bullet y) \bullet y)$$

Şimdi bunları tümevarımsal yöntemle açıklayalım.

[7]Bu gösterim yerine $\varphi\frac{s}{x}$, $\varphi(x/s)$ veya $(s|x)\,\varphi$ gösterimleri de yaygındır.

Tanım 3.3.10 (Yerine Koyma) $x, y \in \mathcal{V},\ c \in \mathcal{C},\ t_1, \dots t_n \in \operatorname{Tm} L,$ $f \in \mathcal{F}_n,\ R \in \mathcal{R}_n,\ \varphi, \psi, \eta \in \operatorname{Fm} L$ *olsunlar.*
1. Terimler için

$$\begin{aligned} c(x|t) &:= c \\ x(x|t) &:= t \\ y(x|t) &:= y,\ y \neq x \\ (ft_1 \dots t_n)(x|t) &:= ft_1(x|t) \dots t_n(x|t) \end{aligned}$$

2. Formüller için

$$\begin{aligned} t_1 \doteq t_2(x|t) &:= t_1(x|t) \doteq t_2(x|t) \\ Rt_1 \dots t_n(x|t) &:= Rt_1(x|t) \dots t_n(x|t) \\ (\neg\varphi)(x|t) &:= \neg\varphi(x|t) \\ (\varphi \to \psi)(x|t) &:= \varphi(x|t) \to \psi(x|t) \\ \left(\dot\forall x\varphi\right)(x|t) &:= \dot\forall x\varphi \\ \left(\dot\forall y\varphi\right)(x|t) &:= \dot\forall y\varphi(x|t),\ y \neq x \end{aligned}$$

Bu tanımların bir doğal sonucu

$$(\varphi \diamond \psi)(x|t) = \varphi(x|t) \diamond \psi(x|t),\ \diamond \in \{\curlywedge, \curlyvee, \leftrightarrow\} \tag{3.3}$$

$$\left(\dot\exists x\varphi\right)(x|t) = \dot\exists x\varphi \tag{3.4}$$

$$\left(\dot\exists y\varphi\right)(x|t) = \dot\exists y\varphi(x|t),\ y \neq x. \tag{3.5}$$

Her şeyden önce her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ için $\varphi(x|x) = \varphi$.

Örnek 3.3.11 $\varphi \in \operatorname{Fm} L_{sc}$ formülü

$$\varphi = x \prec y \to \dot\forall z(x\dot{+}z \prec y\dot{+}z)$$

olsun. Bu durumda $s = x\dot{+}y$ ve $t = x \bullet y^2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \varphi(x|s) &= x\dot{+}y \prec y \to \dot\forall z\left((x\dot{+}y)\dot{+}z \prec y\dot{+}z\right) \\ \varphi(x|s)(y|t) &= x\dot{+}x \bullet y^2 \prec x \bullet y^2 \to \dot\forall z\left((x\dot{+}x \bullet y^2)\dot{+}z \prec x \bullet y^2\dot{+}z\right) \\ \varphi(y|t) &= x \prec x \bullet y^2 \to \dot\forall z\left(x\dot{+}z \prec x \bullet y^2\dot{+}z\right) \\ \varphi(y|t)(x|s) &= x\dot{+}y \prec (x\dot{+}y) \bullet y^2 \to \dot\forall z\left((x\dot{+}y)\dot{+}z \prec (x\dot{+}y) \bullet y^2\dot{+}z\right) \\ \varphi(z|x\dot{+}y) &= x \prec y \to \dot\forall z\left(x\dot{+}z \prec y\dot{+}z\right) = \varphi \end{aligned}$$

▲

Bu örnekte $\deg\varphi = \{x, y, z\}$, $\mathrm{Sb}\,\varphi = \{x, y\}$ ve $\mathrm{Bg}\,\varphi = \{z\}$. Bu örnekten de görüldüğü gibi bir formülün serbest değişkenlerinden önce birinin yerine bir terim, sonra elde edilen formülde başka bir değişkenin yerine başka bir terim koyduğumuzda elde edilen formüller genelde işlemlerin sırasına bağlıdır. Bunun nedeni, örneğimizde olduğu gibi, s terimi y değişkenini içerdiğinde $\varphi(x|s)$ formülünde y değişkeni yeni yerlerde serbest olarak karşımıza çıkabilir. Benzeri şeyler $\varphi(y|t)$ ve x değişkeni için olabilir. Bu şekilde karşımıza çıkan yeni serbest yerlere, *taşınmış* serbest yerler diyelim. Taşınmış serbest yerlerin varlığı, ardışık yerine koymalardaki farklılığa yol açabilir. Şimdi ardışık yerine koymalardan farklı olarak *aynı anda* x yerine s ve y yerine t terimlerini koymayı tanımlayacağız. Bu taşınmış serbest yerlerin göz önüne alınmayıp, φ formülünde x değişkeninin serbest bulunduğu yerlerde x yerine s terimini, yine φ formülünde y değişkenininin serbest bulunduğu yerlerde y yerine t terimini yazmak demektir. Örnekteki formülümüz için açıklarsak, $\varphi(x|t, y|s)$ ile göstereceğimiz bu formül

$$\varphi(x|t, y|s) = x\dot{+}y \prec x \bullet y^2 \to \dot{\forall}z((x\dot{+}y)\dot{+}z \prec x \bullet y^2\dot{+}z)$$

olur ki $\varphi(x|t, y|s)$ formülü, ardışık yerine koymalarla elde edilen $\varphi(x|s)(y|t)$ ve de $\varphi(y|t)(x|s)$ formüllerinden farklıdır. $\varphi(x|t, y|s)$ formülünü, ardışık yerine koymalarla elde etmenin bir yolu vardır. u ve v değişkenleri, x, y ve z değişkeninden farklı olmak üzere

$$\begin{aligned}
\varphi(x|u) &= u \prec y \to \dot{\forall}z\,(u\dot{+}z \prec y\dot{+}z)\\
\varphi(x|u)(y|v) &= u \prec v \to \dot{\forall}z\,(u\dot{+}z \prec v\dot{+}z)\\
\varphi(x|u)(y|v)(u|s) &= x\dot{+}y \prec v \to \dot{\forall}z\,((x\dot{+}y)\dot{+}z \prec v\dot{+}z)\\
\varphi(x|u)(y|v)(u|s)(v|t) &= x\dot{+}y \prec x \bullet y^2 \to \dot{\forall}z\,\big((x\dot{+}y)\dot{+}z \prec x \bullet y^2\dot{+}z\big)
\end{aligned}$$

dolayısıyla

$$\varphi(x|t, y|s) = \varphi(x|u)(y|v)(u|s)(v|t)$$

elde ederiz. Benzer biçimde

$$\varphi(x|t, y|s) = \varphi(y|v)(x|u)(v|t)(u|s)$$

olduğunu görmeyi okura bırakıyoruz. Bu gözlem aşağıdaki tanımın temelidir.

Tanım 3.3.12 *1.* $t \in \mathrm{Tm}\,L$ *olsun.* $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \deg t$ *ve* $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{Tm}\,L$ *olsun.* $u_1, \ldots, u_n$ *birbirinden ve* $t, t_1, \ldots, t_n$ *terimlerindeki değişkenlerden farklı olmak üzere*

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}_1|\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{x}_n|\mathbf{t}_n) := t(x_1|u_1)\cdots(x_n|u_n)(u_1|t_1)\cdots(u_n|t_n)$$

2. $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ *ve* $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \operatorname{Sb} \varphi$ *olsun.* $u_1, \ldots, u_n$ *birbirinden ve* φ *formülü ve* $t_1, \ldots, t_n$ *terimlerindeki değişkenlerden farklı olmak üzere*

$$\varphi(\mathbf{x}_1|\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{x}_n|\mathbf{t}_n) := \varphi\,(x_1|u_1) \cdots (x_n|u_n)(u_1|t_1) \cdots (u_n|t_n)$$

Bu tanımın kusursuz olduğunu görmeyi, dd. bu tanımın $u_1, \ldots, u_n$ değişkenlerinin seçiminden ve ardışık yerine koymaların sırasından bağımsız olduğunu görmeyi okura bırakıyoruz. $\varphi(x_1|t_1, \ldots, x_n|t_n)$'yi oluştururken önce serbest bulunduğu her yerde x_i yerine t_i yazıp ardından t_i'lerin açık ifadelerini yazmak hata yapmayı önler.

Uzlaşma: Yanlış anlaşılma endişemiz olmadığında yalın olarak

$$t(x_1|t_1, \ldots, x_n|t_n) \text{ yerine } t(t_1, \ldots, t_n)$$

ve

$$\varphi(x_1|t_1, \ldots, x_n|t_n) \text{ yerine } \varphi(t_1, \ldots, t_n)$$

yazacağız.

Yerine Koymada İzinli Olmak

Yukarıda değişkenlerin serbest bulundukları yerlerde terimler koymayı açıkladık. Ancak not (3.2.6)'da gördüğümüz gibi, bazı önlemler almazsak $\varphi(x_1|t_1, \ldots, x_n|t_n)$ formülünün $t_1, \ldots, t_n$ için dile getirdiği φ formülünün $x_1, \ldots, x_n$ için dile getirdiğinden farklı olabilir. Not (3.2.6)'da $\psi(x, y, z) := \dot{\exists} x(x \bullet y \doteq z)$ formülünde y yerine $s = x$ terimini koyduğumuzda elde edilen $\psi(x, y|s, z) := \dot{\exists} x(x \bullet x \doteq z)$ formülünde, s teriminde *serbest* olan x değişkeni $\psi(x, y|s, z)$ formülünde *bağlı* duruma geçti ve anlam değişikliğine yol açtı! Bu gözlem ışığında aşağıdaki tanım anlaşılır.

Tanım 3.3.13 $x \in \mathcal{V}$, $s \in \operatorname{Tm} L$ *ve* $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ *olsun.* x *değişkeninin* φ *formülünde serbest bulunduğu her bir yer, aynı zamanda herhangi bir* $y \in \deg s$ *için* $\dot{\forall} y$ *tipinde bir niceleyicinin etki alanında değilse,* φ ***de*** x ***yerine*** s ***terimi konabilir*** *veya* x, φ ***de*** s ***terimi için serbesttir*** *diyecek ve bunu* $\operatorname{Sb}(\varphi, x|s)$ *ile göstereceğiz*[8].

Özetle φ formülünde serbest bulunduğu her yerde x yerine s terimini koyduğumuzda s teriminin hiçbir değişkeni bağlı duruma geçmiyorsa φ'de x yerine s konabilir. Özellikle $\deg s \cap \operatorname{Bg} \varphi = \emptyset$ ise $\operatorname{Sb}(\varphi, x|s)$. $\operatorname{Sb}(\varphi, x|s)$ ise φ formülü x için neyi önerirse $\varphi(x|s)$ formülü s için aynı şeyi önerir.

[8]Formüllerimizde yalnızca $\dot{\forall}$ niceleyicilerinin bulunduğunu varsayıyoruz. Eğer $\dot{\exists}$ niceleyicisine de izin veriyorsak elbette $y \in \deg s$ olmak üzere x değişkeninin φ'nin $\dot{\exists} y$ tipinde bir niceleyicinin etki alanında da serbest olmamasını isteriz.

Her şeyden önce bu tanımda asla $\deg\varphi = \{x\}$ olmasını istemediğimizi belirtelim. Diğer yandan $x \notin \mathrm{Sb}\,\varphi$ veya $x \notin \deg\varphi$ ise $\varphi(x|s) = \varphi$ olduğu aşikârdır.

Atomik formüller niceleyi içermediğinden φ bir atomik formülse, φ'de her x değişkeni yerine her s terimi konabilir. $\mathrm{Sb}(\varphi, x|s)$ tanımı FTT ile aşağıdaki gibi verilebilir: Her $x \in \mathcal{V}$, her $\varphi \in \mathrm{Fm}\,L$ ve her $s \in \mathrm{Tm}\,L$ için

1. φ atomikse $\mathrm{Sb}(\varphi, x|s)$.
2. $\mathrm{Sb}(\varphi, x|s)$ ise $\mathrm{Sb}(\neg\varphi, x|s)$.
3. $\mathrm{Sb}(\varphi, x|s)$ ve $\mathrm{Sb}(\psi, x|s)$ ise $\mathrm{Sb}(\varphi \to \psi, x|s)$.
4. $\mathrm{Sb}(\psi, x|s)$ ve $y \notin \deg s$ ise $\mathrm{Sb}(\dot\forall y\psi, x|s)$.

Bu tanıma göre s teriminin herhangi bir değişkeni φ'nin herhangi bir altformülünün gezen değişkeni değilse sorun yok. Eğer s teriminin herhangi bir y değişkeni φ formülünün herhangi bir $\dot\forall y\psi$ altformülünün gezen değişkeni olduğunda ψ formülünde x serbest bulunmuyorsa yine sorun yoktur, bulunuyorsa φ formülünde x yerine s terimini koyduğumuzda anlam değişmesi olabiliyor. Bu durumda bize (3.2.7) yol gösterecektir. Yapılacak şey çok basittir: φ formülünün altformüllerinin herhangi birinin gezen değişkeni aynı zamanda s teriminin bir serbest değişkeni ise, bu gezen değişkeni s teriminin serbest değişkeni olmayan bir değişkenle değiştirerek elde ettiğimiz bir formül φ' olsun. Artık s terimi φ' formülünde x yerine konabilir ve aşağıdaki tanımı verebiliriz:

$$\varphi(x|s) := \varphi'(x|s).$$

Ancak bu durumda elbette φ' tek olarak belirli değildir; ancak ileride açıklayacağımız biçimsel denklik anlamında tek olarak belirlidir.

3.4 Fm L'nin Önermemantıksal Yapısı

Tanım 3.4.1 *$\varphi \in \mathrm{Fm}\,L$ formülüne, bir atomik formül veya bir $\psi \in \mathrm{Fm}\,L$ ve bir $x \in \mathcal{V}$ ile $\varphi = \dot\forall x\psi$ ise L dilinin bir **parçalanamaz**(veya **asal) formülüdür** denir. L dilinin asal formüllerinin kümesini P_L ile göstereceğiz.*

$s, t, t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{Tm}\,L$ ve $R \in \mathcal{R}_n$ ise $s \doteq t$ ve $R(t_1, \ldots, t_n)$ birer asal formüldürler. $\psi, \eta \in \mathrm{Fm}\,L$ olmak üzere $\neg\psi$ ve $\psi \to \eta$ asal formül değildirler. Buna karşın her $x \in \mathcal{V}$ için $\dot\forall x\neg\psi$ ve $\dot\forall x\,(\psi \to \eta)$ asal formüllerdir. Kitabın ikinci bölümünde olduğu gibi, P_L asal formüller kümesini, asal önermeler olarak alarak $\mathrm{Omf}\,P_L$ formüllerini oluşturalım. Özetle $\mathrm{Omf}\,P_L$ kümesi, $W := P_L \cup \{\neg, \to,), (\}$ abecesinin $\mathrm{Sz}\,W$ sözcükler kümesinin P_L kümesini ve her φ, ψ ile $\neg\varphi$ ve $(\varphi \to \psi)$ formüllerini de içeren en küçük altkümesidir. Kitabın ikinci bölümünü okumamış okurlar için şunu belirtelim: $P \neq \emptyset$ kümesi $\{\neg, \to,), (\}$ kümesi ile ayrık olmak üzere $\mathrm{Omf}\,P$ kümesi

$W' = P \sqcup \{\neg, \to,), (\}$ abecesinin $\operatorname{Sz} W'$ sözcükler kümesinin P kümesini ve her φ, ψ ile $\neg\varphi$ ve $(\varphi \to \psi)$ sözcüklerini içeren $\subseteq$ bağıntısına göre en küçük altkümesidir.

Teorem 3.4.2 $\operatorname{Omf} P_L = \operatorname{Fm} L$.

Kanıt. $\operatorname{Omf} P_L \subseteq \operatorname{Fm} L$ olduğu aşikârdır. Şimdi $\operatorname{Fm} L \subseteq \operatorname{Omf} P_L$ olduğunu FTK ile kanıtlayalım. Tanım gereği atomik formüller $\operatorname{Omf} P_L$'dedirler. φ, ψ ve $x \in X$ ise yine tanım gereği $\neg\varphi$, $(\varphi \to \psi)$ ve $\dot{\forall} x\varphi$ formülleri de $\operatorname{Omf} P_L$'dedirler. Dolayısıyla $\operatorname{Fm} L \subseteq \operatorname{Omf} P_L$. ■

$\operatorname{Fm} L$ formüller kümesini $\operatorname{Omf} P_L$ olarak düşündüğümüzde ikinci bölümde elde ettiğimiz *tüm* kavram ve teoremleri kullanabiliriz. Ancak bu kavramların benzerlerini $\operatorname{Fm} L$ için de açıklayacağız. Bu kavramlar içerik olarak birbirinden farklı olacaklardır. Bu nedenle $\operatorname{Omf} P_L$ için ikinci bölümde açıklanan kavramların önüne *"önermemantıksal"* sözcüğünü ekleyecek ve orada kullandığımız $\equiv, \models, \vdash, \Vdash$ gibi imleri ise, kendi bağlamları içinde bu bölümde $\equiv_{\mathrm{om}}, \models_{\mathrm{om}}, \Vdash_{\mathrm{om}}, \vdash_{\mathrm{om}}$ olarak yazacağız. Örneğin $\operatorname{Omf} P_L$'nin hepdoğrularına L dilinin **önermemantıksal hepdoğruları** veya kısaca **dosdoğruları** diyeceğiz.

$$D_L^{\mathrm{om}} := \{d \,|\, d : P_L \to \{0,1\}\}$$

kümesine $\operatorname{Omf} P_L = \operatorname{Fm} L$ formüllerinin **önermemantıksal değerlemeler** kümesi denir. Her $d \in D_L^{\mathrm{om}}$ değerlemesi her $\varphi, \psi \in \operatorname{Fm} L$ için

$$d(\neg\varphi) = 1 - d(\varphi) \text{ ve } d(\varphi \to \psi) = \max\{d(\neg\varphi), d(\psi)\}$$

olacak biçimse *tek türlü* $\operatorname{Fm} L$ kümesine genişletilebilir. Bu genişletmeyi de yine d ile göstereceğiz. Bilindiği gibi bir φ formülünün dosdoğru olması tam da her $d \in D_L^{\mathrm{om}}$ için $d(\varphi) = 1$ olmasıdır. φ formülünün bir **önermemantıksal hepyanlış**(veya **önermemantıksal çelişki** veya **önermemantıksal tutarsız)** olması tam da her $d \in D_L^{\mathrm{om}}$ için $d(\varphi) = 0$ olmasıdır. $\Psi \subseteq \operatorname{Omf} P_L$, $\varphi, \psi \in \operatorname{Omf} P_L$ ve $d \in D_L^{\mathrm{om}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\models_{\mathrm{om}} \varphi\,[d] :\iff d(\varphi) = 1.\\
&\models_{\mathrm{om}} \varphi :\iff \text{Her } d \in D_L^{\mathrm{om}} \text{ için } \models_{\mathrm{om}} \varphi\,[d]\,.\\
&\models_{\mathrm{om}} \Psi\,[d] :\iff \text{Her } \psi \in \Psi \text{ için } \models_{\mathrm{om}} \psi\,[d]\,.\\
\Psi \Vdash_{\mathrm{om}} \varphi &:\iff \text{Her } d \in D_L^{\mathrm{om}} \text{ için } \models_{\mathrm{om}} \Psi\,[d] \text{ ise } \models_{\mathrm{om}} \varphi\,[d]\,.\\
\Psi \vdash_{\mathrm{om}} \varphi &:\iff \varphi,\ \Psi\text{'den (önermemantıksal)biçimsel kanıtlanabilir.}\\
\varphi \equiv_{\mathrm{om}} \psi &:\iff \text{Her } d \in D_L^{\mathrm{om}} \text{ için } d(\varphi) = d(\psi)
\end{aligned}$$

$\Psi \vdash_{\mathrm{om}} \varphi$ biçimsel çıkarımında Ψ koşullarından başka (2.7) kesiminde verilen ilksavlar ve ayırma çıkarım kuralı kullanılacaktır. $\Psi \Vdash_{\mathrm{om}} \varphi$ ifadesini

sözlerle "φ **önermemantıksal olarak** Ψ**'den çıkar**" veya "φ, Ψ**'nin önermemantıksal sonucudur**" olarak dillendireceğiz. $\varphi \equiv_{\mathrm{om}} \psi$ ifadesini ise "φ **formülü** ψ **formülüne önermemantıksal denktir"** diye okuyacağız.

Önerme 3.4.3 *P herhangi bir asal önermeler kümesi ve $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_n)$ ise* $\mathrm{Omf}\, P$*'de bir dosdoğru olsun. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathrm{Fm}\, L$ olmak üzere $\psi := \varphi(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ formülü L dilinin bir dosdoğrusudur*[9]*. Tüm dosdoğrular bu biçimde elde edilirler.*

Kanıt. Genellikten bir şey kaybetmeden $\deg \varphi = \{p_1, \ldots, p_n\}$ olsun. Şimdi $d \in D_L^{\mathrm{om}}$ değerlemesi keyfi verilsin ve $a_i := d(\varphi_i)$ olsun. $d' : P \to \{0,1\}$ değerlemesini $i = 1, \ldots, n$ için $d'(p_i) := a_i$ olacak biçimde seçer ve φ'nin $\mathrm{Omf}\, P$'de bir hepdoğru olduğunu gözetirsek $d(\psi) = d'(\varphi) = 1$ olur. d keyfi olduğundan ψ formülü $\mathrm{Omf}\, P$'de bir hepdoğrudur, dolayısıyla bir dosdoğrudur.

Savın ikinci kısmı için $P = P_L$ almak yeterlidir. ■

(3.4.3)'ün bir sonucu olarak, Örneğin her $\varphi, \psi, \eta \in \mathrm{Fm}\, L$ için

$$\varphi \to \varphi,\ \varphi \curlywedge (\varphi \to \psi) \to \psi,\ (\varphi \to \psi) \curlywedge (\psi \to \eta) \to (\varphi \to \eta)$$
$$\varphi \to \varphi \curlyvee \psi,\ \varphi \curlywedge \psi \to \varphi,\ (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$$

birer dosdoğrudurlar. $\varphi \curlywedge \neg\varphi$ ve $\varphi \leftrightarrow \neg\varphi$ birer önermemantıksal hepyanlıştırlar.

Not 3.4.4 İkinci bölümü okumamış olanlar için: Bu tür okurlar için iki yol vardır.

Birinci Yol: Kitabın (2.7) kesimini okurlar. Orada yapılanı amacımıza uygun özetleyelim. Her $\varphi, \psi, \eta \in \mathrm{Fm}\, L$ için $\sigma_1(\varphi, \psi)$, $\sigma_2(\varphi, \psi, \eta)$ ve $\sigma_3(\varphi, \psi)$ birer *önermemantıksal ilksavdırlar* (bkz. s.88). $\mathrm{Fm}\, L$ kümesindeki tüm önermemantıksal ilksavların kümesini $\mathbf{\Delta}_{\mathrm{om}}$ ile gösterelim. $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}\, L$ olmak üzere $\mathrm{Bc}_{\mathrm{om}}\, \Gamma$ ile $\mathbf{\Delta}_{\mathrm{om}} \cup \Gamma$ kümesinin (MP) çıkarım kuralına göre kapanışını gösterelim: Diğer deyişle $\mathrm{Bc}_{\mathrm{om}}\, \Gamma$ kümesi $\mathrm{Fm}\, L$ kümesinin (a) $\mathbf{\Delta}_{\mathrm{om}} \cup \Gamma$ kümesini içeren ve (b) φ ve $\varphi \to \psi$ formüllerini içerdiğinde ψ formülünü de içeren altkümelerinin $\subseteq$ bağıntısına göre en küçük altkümesidir. $\varphi \in \mathrm{Bc}_{\mathrm{om}}\, \Gamma$ olduğunda $\Gamma \vdash_{\mathrm{om}} \varphi$ yazılır. $\emptyset \vdash_{\mathrm{om}} \varphi$ yerine $\vdash_{\mathrm{om}} \varphi$ yazılır. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi$ dizisine her bir $i = 1, \ldots, n$ için $\varphi_i \in \mathbf{\Delta}_{\mathrm{om}} \cup \Gamma$ veya φ_i kendinden önce gelen iki formülden (MP) çıkarım kuralı ile elde edilmişse φ formülünün Γ-*önermemantıksal biçimsel kanıtı* denir. $\varphi \in \mathrm{Bc}_{\mathrm{om}}\, \Gamma$ olması için gerek ve

[9] $\varphi(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$'den kastedilen $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ formülünde geçtiği her yerde p_i yerine φ_i yazılarak elde edilen formüldür.

yeter koşul φ'nin bir Γ-önermemantıksal biçimsel kanıtının olmasıdır. Biz (2.7) kesiminde

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{om}} \varphi \iff \Gamma \Vdash_{\mathrm{om}} \varphi$$

olduğunu kanıtladık. İlk yolumuzda ya (1.7) kesimini okur ya da burada özetlenen bilgileri doğru kabul edersiniz. $\vdash_{\mathrm{om}} \varphi$ ise $\varphi \in \mathrm{Fm}\, L$ formülüne L dilinin bir önermemantıksal biçimsel teoremi denir.

İkinci Yol: $\mathbf{\Delta}_{\mathrm{om}}$ önermemantıksal ilksavlarından yola çıkmak yerine işin daha kolayına kaçar ve *her* önermemantıksal $\varphi \in \mathrm{Fm}\, L$ hepdoğrusunu önermemantıksal ilksav olarak seçeriz. ▲

Not 3.4.5 $\varphi \in \mathrm{Fm}\, L$ ve $d \in D_L^{\mathrm{om}}$ olmak üzere $d(\varphi) = 1$ ise d değerlemesi φ formülünün bir *önermemantıksal modelidir* denir, bu durum $d \models_{\mathrm{om}} \varphi$ olarak da gösterilir. Eğer d her $\psi \in \Gamma$ formülünün önermemantıksal modeli ise d değerlemesi Γ'nin bir önermemantıksal modelidir denir. Bu tanımlarla $\Gamma \Vdash_{\mathrm{om}} \varphi$ tam da Γ'nin her önermemantıksal modelinin aynı zamanda φ'nin de bir önermemantıksal modeli olması demektir. ▲

3.5 L-Yapıları ve Yorumlar

L-dili imlerine hiçbir anlam yüklenmemiş, terim ve formüllerini mekanik bir biçimde oluşturduğumuz bir alandır. L-yapıları özetle bu dilin imlerine gerçekten sabitler, fonksiyonlar ve bağıntıların karşılık getirildiği yapılardır. Bu dilin her φ formülüne bu dilin her $\mathfrak{A}$ yapısında bir $\varphi^{\mathfrak{A}}$ formülü karşılık getireceğiz. $\mathrm{Fm}\, L$ biçimsel formüllerimiz için açıklayacağımız kavramlarda bizi $\mathfrak{A}$ yapılarındaki $\varphi^{\mathfrak{A}}$ formülleri yönlendirecektir. Doğrudan $\mathfrak{A}$ yapılarını ve $\varphi^{\mathfrak{A}}$ formüllerini kullanarak açıklanan kavramlar L dilinin **anlamsal** (veya **semantik**) kavramları olacaktır.

3.5.1 L-Yapıları

Tanım 3.5.1 *Aşağıdaki koşullar sağlandığında* $\mathfrak{A} = (A, \mathcal{F}^{\mathfrak{A}}, \mathcal{R}^{\mathfrak{A}}, \mathcal{C}^{\mathfrak{A}})$ *dörtlüsüne veya* $L^{\mathfrak{A}} := \mathcal{R}^{\mathfrak{A}} \sqcup \mathcal{F}^{\mathfrak{A}} \sqcup \mathcal{C}^{\mathfrak{A}}$ *olmak üzere kısaca* $\mathfrak{A} = (A, L^{\mathfrak{A}})$ *ikilisine bir* L-***yapısı,*** *veya* L *dilinin bir* ***modeli*** *denir:*

1. $\doteq$ *imine* $\mathfrak{A}$ *yapısında* $=$ *karşılık getirilmiştir.*

2. Her $n \in \mathbb{N}^*$ *için her* $R \in \mathcal{R}_n$ *bağıntı imine bir* $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ *bağıntısı karşılık getirilmiştir ve* $\mathcal{R}^{\mathfrak{A}} := \{R^{\mathfrak{A}} | R \in \mathcal{R}\}$.

3. Her $n \in \mathbb{N}^*$ *için her* $f \in \mathcal{F}_n$ *fonksiyon imine bir* $f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$ *fonksiyonu karşılık getirilmiştir ve* $\mathcal{F}^{\mathfrak{A}} := \{f^{\mathfrak{A}} | f \in \mathcal{F}\}$.

4. Her $c \in \mathcal{C}$ *sabit imine bir* $c^{\mathfrak{A}} \in A$ *sabit imi karşılık getirilmiştir ve* $\mathcal{C}^{\mathfrak{A}} := \{c^{\mathfrak{A}} \,|\, c \in \mathcal{C}\}$.

Özetle söylersek, $\doteq$ imine $=$ bağıntısı karşılık getirilecek, ayrıca her $l \in L$ imine ise bir $l^{\mathfrak{A}}$ karşılık getirilir öyle ki: $l \in \mathcal{R}_n$ ise $l^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$, $l \in \mathcal{F}_n$ ise $l^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$, $l \in \mathcal{C}$ ise $l^{\mathfrak{A}} \in A$, ve $L^{\mathfrak{A}} = \mathcal{R}^{\mathfrak{A}} \sqcup \mathcal{F}^{\mathfrak{A}} \sqcup \mathcal{C}^{\mathfrak{A}}$ olmak üzere $L^{\mathfrak{A}} = \left\{ l^{\mathfrak{A}} \,|\, l \in L \right\}$. $L^{\mathfrak{A}}$ dili L dilinin $\mathfrak{A}$ yapısındaki yorumudur. Tüm L-yapıları bir $\operatorname{Yap} L := \{\mathfrak{A} \,|\, \mathfrak{A} \text{ bir } L\text{-yapısı}\}$ sınıfı oluşturur.

Not 3.5.2 Aslında $\doteq$ imine $\mathfrak{A}$ yapısında mutlaka $=$ iminin karşılık getirilmesi gerekmez, Eşitlik İlksavları'nı sağlayan, A kümesinde herhangi bir E ikili bağlantısı karşılık getirilebilir. $\doteq$ iminin $=$ ile yorumlandığı modellere **normal modeller** denir. Aksi söylenmedikçe biz $\doteq$ imini $=$ ile yorumlayacağız, dd. modellerimiz normal modeller olacaklardır. Eğer L dili $\dot{\in}$ imini içeriyorsa, bunun $\dot{\in}^{\mathfrak{A}}$ yorumu gerçekten $\in$ öğesi olma ise $\mathfrak{A}$ modeline bir **standart model** denir. *Geleneksel matematikte biz standart normal modellerle ilgileniriz.* ▲

Örnek 3.5.3 Örneğin $\mathfrak{Z} = (\mathbb{Z}; \emptyset; +, 0)$, $(\mathbb{Q}^*; \emptyset; \cdot; 1)$ ve $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}; \emptyset; +; 0)$ birer L_g-yapılarıdırlar. $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}; +^{\mathfrak{R}}, \cdot^{\mathfrak{R}}; 0^{\mathfrak{R}}, 1^{\mathfrak{R}})$ ve $\mathfrak{Q} = (\mathbb{Q}; \emptyset; +^{\mathfrak{Q}}, \cdot^{\mathfrak{Q}}; 0^{\mathfrak{Q}}, 1^{\mathfrak{Q}})$ ise birer L_h-yapılarıdırlar. ▲

Örnek 3.5.4 Şimdi normal olmayan bir örnek verelim. Dilimiz $L_g = \{\bullet, \mathbf{e}\}$ olsun. $\mathbb{Z}$'de E ikili bağıntısı olarak

$$m \overset{7}{=} n :\Longleftrightarrow 7|(m-n)$$

ile tanımlanan $\overset{7}{=}$ bağıntısı alınsın. Burada $7|(m-n)$ gösterimi "7 sayısı $(m-n)$ sayısını böler" demektir. Şimdi L_g dilinin $\mathfrak{Z}_7' := (\mathbb{Z}, +, 0)$ yapısını tanımlayalım. Bu modelde $\bullet^{\mathfrak{Z}_7'} = +$ tam sayılardaki toplama işlemi, $\mathbf{e}^{\mathfrak{Z}_7'}$ ise 0 tam sayısı ve $\doteq$ ise $\overset{7}{=}$ olarak yorumlansın, dd. $\doteq^{\mathfrak{Z}_7'} = \overset{7}{=}$ olsun. $\mathfrak{Z}$ ve $\mathfrak{Z}_7'$ modelleri arasındaki tek fark $\doteq$ iminin yorumundadır. Bu yorumda Eşitlik İlksavları doğru önermelere dönüşürler, dd. her $m, n, k, m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ için

$(E1)$ $m \overset{7}{=} m$,
$(E2)$ $m \overset{7}{=} n \implies n \overset{7}{=} m$,
$(E3)$ $k \overset{7}{=} m$ *ve* $m \overset{7}{=} n \Longrightarrow k \overset{7}{=} n$,
$(E4)$ $(m_1 \overset{7}{=} n_1)$ *ve* $(m_2 \overset{7}{=} n_2) \Longrightarrow m_1 + n_1 \overset{7}{=} m_2 + n_2$.

$|\mathfrak{Z}| = |\mathfrak{Z}_7'| = \mathbb{Z}$, dd. her iki yapının evrenleri aynıdır, $\mathbb{Z}$'dir. $\mathfrak{Z}$ bir normal modelken $\mathfrak{Z}_7'$ değildir. $\psi := (7\mathbf{e} \doteq \mathbf{e}) \in \operatorname{Fm} L_g$ formülü $\mathfrak{Z}$ modelinde yanlış buna karşın $\mathfrak{Z}_7'$ modelinde doğrudur. Şimdi $\mathfrak{Z}_7'$ modelindeki bir sanal yaratık için durum nedir? Bu modeldeki tüm formüller, dd. özellikler $u \overset{7}{=} v$ tipindeki atomik formülden yola çıkılarak elde edilir. Ama şimdi $0 \overset{7}{=} 7$ olduğundan $\mathfrak{Z}_7'$ modelindeki sanal yaratığın kendi evrenindeki her $\varphi(x)$ özelliği

için $\varphi(0) \Longleftrightarrow \varphi(7)$ olur. Bu yaratığın bu iki nesneyi kendi evrenindeki özellikler[10] yardımıyla ayırt etme şansı yoktur, bu modelde biri için doğru olan diğeri için de doğrudur, bunlar bu evrende her özellikte birbirinin yerini alabilmektedir. 0 ve 7 nesneleri $\mathfrak{Z}_7'$ modelinde ayırt edilemezler veya benzeşiktirler. ▲

Şimdi L biçimsel diline ilişkin bir $\mathfrak{A}$ yapısı verilsin. Her ne kadar Kesim 3.2'de bir $\mathfrak{A}$ yapısının $L^{\mathfrak{A}}$ dilinin, $\operatorname{Tm} L^{\mathfrak{A}}$ terimler ve $\operatorname{Fm} L^{\mathfrak{A}}$ formüller kümesinin tanımlarını vermiş olsak da, Kesim 3.3'te biçimsel dillerin incelenmesi bize aslında yapılarda anlamsal terimler ve formüllerle çalışırken yeteri kadar titiz davranmadığımız öğretmiştir. Bu nedenle Kesim 3.2'de söylenenleri unutup, onları biçimsel dilimize koşut ele alalım.

$\operatorname{Tm} L^{\mathfrak{A}}$ ve $\operatorname{Fm} L^{\mathfrak{A}}$'nın Yeniden Tanımları

Yapılacak şey son derece basittir: Kesim 3.3'teki L dili yerine bu kez $L^{\mathfrak{A}}$ ve

$$W = X \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C} \cup \left\{\neg, \to, \dot{\forall}, \doteq\right\} \cup \{), (\}$$

abecesi yerine bu kez

$$W^{\mathfrak{A}} = X \cup \mathcal{R}^{\mathfrak{A}} \cup \mathcal{F}^{\mathfrak{A}} \cup \mathcal{C}^{\mathfrak{A}} \cup \{\neg, \Rightarrow, \forall, =\} \cup \{), (\}$$

abecesini alacağız. Bu kez tanımlanmış mantık imlerimiz $\wedge, \vee, \Leftrightarrow$ ve $\exists$ olacaktır ve okurun doğru sezdiği gibi

1. $(\neg\varphi \Rightarrow \psi)$ yerine $(\varphi \vee \psi)$,
2. $\neg(\varphi \Rightarrow \neg\psi)$ yerine $(\varphi \wedge \psi)$
3. $(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$, dd. $\neg((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \neg(\psi \to \varphi))$ yerine $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$

ve

4. $\neg\forall x\neg\varphi$ yerine $\exists x\varphi$ yazacağız.

Bu değişikliklerle Kesim 3.3'te verilen *tüm tanımlar ve teoremler* olduğu gibi $W^{\mathfrak{A}}$ abecesinin $\operatorname{Tm} L^{\mathfrak{A}}$ terimleri ve $\operatorname{Fm} L^{\mathfrak{A}}$ formülleri için de geçerlidir. Örneğin

(T1) $\mathcal{V} \subset \operatorname{Tm} L^{\mathfrak{A}}$.

(T2) $\mathcal{C}^{\mathfrak{A}} \subset \operatorname{Tm} L^{\mathfrak{A}}$.

(T3) $f^{\mathfrak{A}} \in \mathcal{F}_n^{\mathfrak{A}}$, $t_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{A}} \in \operatorname{Tm} L^{\mathfrak{A}}$ ise $f^{\mathfrak{A}} t_1^{\mathfrak{A}} \ldots t_n^{\mathfrak{A}} \in \operatorname{Tm} L^{\mathfrak{A}}$.

Tüm terimler bu şekilde elde edilenlerdir.

[10] Kümeler Kuramı'nda başlangıçta ortaya çıkan tartışmaların bir sonucu herhangi bir $\mathfrak{A}$ yapısının A evreninin öğelerine ilişkin *özellik* kavramının netleştirilmesi olmuştur; bunlar $\varphi^{\mathfrak{A}}$ formülleriyle dile getirilenlerdir.

$\operatorname{Fm} L^{\mathfrak{A}}$'nin tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

(F1) $s, t \in \operatorname{Fm} L^{\mathfrak{A}}$ ise $(s = t) \in \operatorname{Fm} L^{\mathfrak{A}}$.

(F2) $R^{\mathfrak{A}} \in \mathcal{R}_n^{\mathfrak{A}}$ ve $t_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{A}} \in \operatorname{Tm} L^{\mathfrak{A}}$ ise $R^{\mathfrak{A}} t_1^{\mathfrak{A}} \ldots t_n^{\mathfrak{A}} \in \operatorname{Fm} L^{\mathfrak{A}}$.

(F3) $\varphi^{\mathfrak{A}} \in \operatorname{Fm} L^{\mathfrak{A}}$ ise $\neg\varphi^{\mathfrak{A}} \in \operatorname{Fm} L^{\mathfrak{A}}$.

(F4) $\varphi^{\mathfrak{A}}, \psi^{\mathfrak{A}} \in \operatorname{Fm} L$ise $(\varphi^{\mathfrak{A}} \Rightarrow \psi^{\mathfrak{A}}) \in \operatorname{Fm} L^{\mathfrak{A}}$.

(F5) $\varphi^{\mathfrak{A}} \in \operatorname{Fm} L^{\mathfrak{A}}$ ve x bir değişkense $\forall x \varphi^{\mathfrak{A}} \in \operatorname{Fm} L^{\mathfrak{A}}$.

Tüm formüller bu işlemlerle elde edilenlerdir.

$f^{\mathfrak{A}} t_1^{\mathfrak{A}} \ldots t_n^{\mathfrak{A}}$ terimini çoğu zaman, alışkanlıklarımıza uygun olarak, $f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{A}})$ olarak, $R^{\mathfrak{A}} t_1^{\mathfrak{A}} \ldots t_n^{\mathfrak{A}}$ formülünü ise $R^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{A}})$ olarak göstereceğiz. Terimler üzerinden tümevarımla tanımlama ve kanıtlama $\operatorname{Tm} L^{\mathfrak{A}}$ için ve formüller üzerinden tümevarımla tanımlama ve kanıtlama da $\operatorname{Fm} L^{\mathfrak{A}}$ için aynen geçerlidir. Kesim 3.3'teki tüm diğer tanım ve teoremlerin $\operatorname{Tm} L^{\mathfrak{A}}$ ve $\operatorname{Fm} L^{\mathfrak{A}}$ için dillendirilmesini okura bırakıyoruz.

Not 3.5.5 $I^{\mathfrak{A}} : W \to W^{\mathfrak{A}}$ dönüşümü, her $x \in \mathcal{V}$, $f \in \mathcal{F}$, $R \in \mathcal{R}$ ve her $c \in \mathcal{C}$ için

$$I^{\mathfrak{A}}(x) := x,\ I^{\mathfrak{A}}(f) := f^{\mathfrak{A}},\ I^{\mathfrak{A}}(R) := R^{\mathfrak{A}},\ I^{\mathfrak{A}}(c) := c^{\mathfrak{A}} \text{ ve}$$
$$I^{\mathfrak{A}}(\neg) := \neg,\ I^{\mathfrak{A}}(\to) := \Longrightarrow,\ I^{\mathfrak{A}}(\dot{\forall}) := \forall, I^{\mathfrak{A}}((\ ) := (\ , I^{\mathfrak{A}}(\ )) :=)$$

olarak açıklansın. Bu dönüşüm, harfsel yazılımdaki her $s = s_0 \cdots s_n \in \operatorname{Sz} W$ sözcüğü için

$$I^{\mathfrak{A}}(s_0 \cdots s_n) := I^{\mathfrak{A}}(s_0) \cdots I^{\mathfrak{A}}(s_n)$$

olarak tüm $\operatorname{Sz} W$'ye genişletilebilir. Harfsel yazılımın tekliğinden dolayı bu tanım kusursuzdur. $I^{\mathfrak{A}} : \operatorname{Sz} W \to \operatorname{Sz} W^{\mathfrak{A}}$ bir tameşlemedir ve $\operatorname{Tm} L^{\mathfrak{A}} = \operatorname{Im} I^{\mathfrak{A}} = I^{\mathfrak{A}}(\operatorname{Tm} L)$ ve $\operatorname{Fm} L^{\mathfrak{A}} = \operatorname{Im} I^{\mathfrak{A}} = I^{\mathfrak{A}}(\operatorname{Fm} L)$. Bunların kanıtını okura bırakıyoruz. ▲

3.5.2 Yorumların Anlamsal Özü

Bu kesimde ileride vereceğimiz biçimsel tanımların altında yatan anlamsal arka planı vereceğiz. *Her* $t \in \operatorname{Tm} L$ terimine, onun $\mathfrak{A}$ yapısındaki yorumu diyeceğimiz *tek* olarak belirli bir $t^{\mathfrak{A}}$ terimini ve *her* $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ formülüne karşılık, onun $\mathfrak{A}$ yapısındaki yorumu diyeceğimiz *tek* olarak belirli bir $\varphi^{\mathfrak{A}}$ formülünü *doğal* biçimde karşılık getireceğiz.

Tanım 3.5.6 (geçici anlamsal tanım) *$\mathfrak{A}$ bir L yapısı olsun.*

1. *Herhangi bir $t \in \operatorname{Tm} L$ teriminde geçen her $c \in \mathcal{C}$ sabit imi yerine onun $\mathfrak{A}$ yapısındaki yorumu olan $c^{\mathfrak{A}}$ ve her $f \in \mathcal{F}$ fonksiyon imi yerine onun $\mathfrak{A}$ yapısındaki yorumu olan $f^{\mathfrak{A}}$ yazarak elde edilen $t^{\mathfrak{A}} \in \operatorname{Tm} L^{\mathfrak{A}}$*

terimine t ***teriminin*** $\mathfrak{A}$ ***yapısındaki yorumu*** *denir. Bu tam da, (3.5.5)'teki* $I^{\mathfrak{A}}$ *ile* $t^{\mathfrak{A}} = I^{\mathfrak{A}}(t)$ *demektir.*

2. *Herhangi bir* $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ *formülündeki her* f, R, c *imleri yerine* $\mathfrak{A}$*'daki yorumları olan* $f^{\mathfrak{A}}, R^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}}$ *imlerini,* $\neg, \to, \dot{\forall}, \doteq$ *biçimsel imleri yerine ise* $\neg, \Rightarrow, \forall, =$ *içeriksel imlerini yazar ve tüm değişkenlerin evrenini* A *olarak alırsak bir içeriksel* $\varphi^{\mathfrak{A}} \in \operatorname{Fm} L^{\mathfrak{A}}$ *formülü elde ederiz.* $\varphi^{\mathfrak{A}}$ *formülüne* φ ***formülünün*** $\mathfrak{A}$ ***yapısındaki yorumu*** *denir.* $\varphi^{\mathfrak{A}} = I^{\mathfrak{A}}(\varphi)$ *olduğu apaçıktır.*

Tanımın doğrudan sonucu aşağıdaki özelliklerdir:

1. $\varphi = (t_1 \doteq t_2)$ *ise* $\varphi^{\mathfrak{A}} = \left(t_1^{\mathfrak{A}} = t_2^{\mathfrak{A}}\right)$.
2. $\varphi = R(t_1, \ldots, t_n)$ *ise* $\varphi^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{A}})$.
3. $\varphi = \neg\psi$ *ise* $\varphi^{\mathfrak{A}} = \neg\psi^{\mathfrak{A}}$.
4. $\varphi = (\psi \to \eta)$ *ise* $\varphi^{\mathfrak{A}} = \left(\psi^{\mathfrak{A}} \Rightarrow \eta^{\mathfrak{A}}\right)$.
5. $\varphi = \dot{\forall} x\psi$ *ise* $\varphi^{\mathfrak{A}} = \forall x\psi^{\mathfrak{A}}$.

Örnek 3.5.7 Örneğin $\varphi \in \operatorname{Sav} L_g$ ve $\psi \in \operatorname{Sav} L_h$ savları aşağıdaki gibi olsunlar ve $\bullet^{\mathfrak{A}}$ ve $\bullet^{\mathfrak{B}}$ sırasıyla $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$'deki toplam işlemleri $\mathbf{e}^{\mathfrak{A}} = \mathbf{e}^{\mathfrak{B}} = 0$ ve $\bullet$ ve $\dot{+}$ imleri ise $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$'deki bildik işlemler $\mathbf{1}^{\mathfrak{Q}} = \mathbf{e}^{\mathfrak{R}} = 1$ ve $\mathbf{0}^{\mathfrak{Q}} = \mathbf{0}^{\mathfrak{R}} = 0$ olsun. $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, +, 0)$ ve $\mathfrak{B} = (\mathbb{Z}, +, 0)$ birer L_g-yapıları iken $\mathfrak{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ ve $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \bullet, 0, 1)$ birer L_h- yapısıdırlar.

$$\begin{aligned}
\varphi &:= \dot{\forall} x \dot{\exists} y \ (x \bullet y \doteq \mathbf{e} \curlywedge y \bullet x \doteq \mathbf{e}) \text{ ise} \\
\varphi^{\mathfrak{A}} &= \forall x \exists y \ (x + y = 0 \wedge y + x = 0)\,, \\
\varphi^{\mathfrak{B}} &= \forall x \exists y \ (x + y = 0 \wedge y + x = 0)\,, \text{ ve} \\
\psi &:= \dot{\exists} x (x \bullet x \doteq \mathbf{1} \dot{+} \mathbf{1}) \text{ ise} \\
\psi^{\mathfrak{R}} &= \exists x (x \cdot x = 1 + 1),\ \psi^{\mathfrak{Q}} = \exists x (x \cdot x = 1 + 1)
\end{aligned}$$

elde edilir. φ savının $\mathfrak{Z}$ yapısındaki $\varphi^{\mathfrak{Z}}$ yorumu doğru iken, $\mathfrak{N}$ yapısındaki $\varphi^{\mathfrak{N}}$ yorumu yanlıştır. Benzer biçimde ψ savının $\psi^{\mathfrak{R}}$ yorumu doğrudur, $\psi^{\mathfrak{Q}}$ yorumu yanlıştır. L herhangi bir dil olmak üzere

$$\xi := \dot{\exists} x \neg (x \doteq x) \text{ ve } \eta := \dot{\forall} x \, (x \doteq x)$$

bu dilin savlarıdır. ξ ve η savlarının herhangi bir L yapısındaki yorumları sırasıyla

$$\exists x \neg \, (x = x) \text{ ve } \forall x \, (x = x)$$

olur. ξ savının her L-yapısındaki yorumu yanlış, buna karşın η savının her L-yapısındaki yorumu doğrudur. Böylece olası tüm durumu örneklemiş olduk:

Herhangi bir $\varphi \in \operatorname{Sav} L$ savının yorumları her L-yapısında doğru veya her L-yapısında yanlış veya bazı yapılarda doğru iken bazılarında yanlış olabilir. $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ bir *sav* ise $\varphi^{\mathfrak{A}}$ yorumu, $\mathfrak{A}$ yapısında ya doğrudur, ya da yanlıştır. ▲

Şimdi $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ verilsin ve φ bir sav olmasın, dd. $\operatorname{Sb}\varphi \neq \emptyset$. $\mathfrak{A}$ bir L-yapısı olmak üzere, $\operatorname{Sb}\varphi^{\mathfrak{A}} = \operatorname{Sb}\varphi$ olduğundan $\varphi^{\mathfrak{A}}$ da bir sav değildir. $\varphi^{\mathfrak{A}}$ formülünün bir sava dönüşmesi için her $x \in \operatorname{Sb}\varphi^{\mathfrak{A}}$ değişkenin yerine, serbest bulunduğu her yerde bir $\beta(x) \in A$ değerini koymamız gerekir. Böylece elde ettiğimiz anlamsal savı $\varphi^{\mathfrak{A}}[\beta]$ ile göstereceğiz. Dolayısıyla her $\beta : \operatorname{Sb}\varphi \to A$ dönüşümü bize bir $\varphi^{\mathfrak{A}}[\beta]$ önermesi verir. β dönüşümünü *herhangi* bir biçimde bir $\beta' : \mathcal{V} \to A$ dönüşümüne genişletelim. Şimdi $\varphi^{\mathfrak{A}}$ formülünde, her x değişkeni için serbest bulunduğu her yerde $\beta'(x)$ yazarak elde ettiğimiz savı $\varphi^{\mathfrak{A}}[\beta']$ ile gösterirsek, genişletmeden bağımsız olarak

$$\varphi^{\mathfrak{A}}[\beta'] = \varphi^{\mathfrak{A}}[\beta]$$

olacağı apaçıktır. Bu nedenle $\beta : \operatorname{Sb}\varphi \to A$ dönüşümleri yerine $\beta' : \mathcal{V} \to A$ dönüşümleri ile çalışmak teknik açıdan bir kolaylık sağlayacaktır.

Tanım 3.5.8 *$\mathfrak{A}$ bir L-yapısı olmak üzere herhangi bir $\beta : \mathcal{V} \to A$ dönüşümüne $\mathfrak{A}$ yapısında bir* ***nesneleme*** *veya* ***yerine koyma*** *diyeceğiz. $\mathfrak{A}$ yapısındaki nesnelemelerin kümesini $N^{\mathfrak{A}}$ ile gösterelim.*

Tanım 3.5.9 (Geçici anlamsal tanım) *$\mathfrak{A}$ bir L-yapısı, $\beta : \mathcal{V} \to A$ bir nesneleme $t \in \operatorname{Tm} L$ ve $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ olsun.*

1. $\mathfrak{A}$ yapısının $t^{\mathfrak{A}}$ teriminde her $x \in \mathcal{V}$ değişkeni yerine, geçtiği her yerde $\beta(x)$ yazarak elde edilen, A kümesinin öğesi $t^{\mathfrak{A}}[\beta]$ ile gösterilir. $t^{\mathfrak{A}}[\beta]$ öğesine t ***teriminin*** *$\mathfrak{A}$* ***yapısında*** *β* ***nesnelemesine göre yorumu*** *denir.*

2. $\mathfrak{A}$ yapısının $\varphi^{\mathfrak{A}}$ formülünde her $x \in \mathcal{V}$ değişkeni yerine, serbest bulunduğu her yerde $\beta(x)$ yazarak elde edilen sav $\varphi^{\mathfrak{A}}[\beta]$ ile gösterilir ve buna φ ***formülünün*** *$\mathfrak{A}$* ***yapısında*** *β* ***nesnelemesine göre yorumu*** *denir.*

3. $\varphi^{\mathfrak{A}}[\beta]$ savı doğru ise bu

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \text{ veya } (\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi \text{ veya } \models_{\mathfrak{A}} \varphi[\beta]$$

ile $\varphi^{\mathfrak{A}}[\beta]$ savı yanlış ise bu

$$\mathfrak{A} \not\models \varphi[\beta] \text{ veya } (\mathfrak{A}, \beta) \not\models \varphi \text{ veya } \not\models_{\mathfrak{A}} \varphi[\beta]$$

ile gösterilir.

Yine $\models, \not\models \notin W$ varsayacağız ve böylece $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$, $\mathfrak{A} \not\models \varphi[\beta]$ gösterimleri W abecesinin sözcükleri, özellikle L dilinin formülleri değildirler. $\models$ ve $\not\models$ için burada verilen tanımlar geçici anlamsal tanımlardır.

Örnek 3.5.10 Örneğin $\varphi \in L_h$ formülü

$$\mathbf{0} \prec x \to \dot{\forall} x(x \bullet y \doteq \mathbf{1})$$

ise $\varphi^{\mathfrak{R}}$ formülü

$$0 < x \to \forall x(xy = 1)$$

olur. $\beta, \gamma : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ iki nesneleme ve $\beta(x) = 1$, $\beta(y) = 0$, $\gamma(x) = -1$ ve $\gamma(y) = 0$ olsun. Bu durumda

$$\varphi^{\mathfrak{R}}[\beta] = (0 < 1 \Rightarrow \forall x\,(x0 = 1))\,.$$
$$\varphi^{\mathfrak{R}}[\gamma] = (0 < -1 \Rightarrow \forall x\,(x0 = 1))\,.$$

Dolayısıyla $\mathfrak{R} \not\models \varphi[\beta]$ ve öncül yanlış olduğundan $\mathfrak{R} \models \varphi[\gamma]$. ▲

Bizi önünde sonunda ilgilendirenler $t^{\mathfrak{A}}[\beta]$ ve $\varphi^{\mathfrak{A}}[\beta]$ olacaktır. Yukarıda verdiğimiz geçici anlamsal tanımlar, (TTT) ve FTT ile verilerek, titiz okurlar için daha matematiksel kılığa sokulabilirler.

Tanım 3.5.11

1. $t = c \in \mathcal{C}$ *ise* $t^{\mathfrak{A}}[\beta] := c^{\mathfrak{A}}$.
2. $t = x \in \mathcal{V}$ *ise* $t^{\mathfrak{A}}[\beta] := \beta(x)$.
3. $t = ft_1 \cdots t_n$ *ise* $t^{\mathfrak{A}}[\beta] := f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\beta], \ldots, , t_n^{\mathfrak{A}}[\beta])$.

Not 3.5.12 Kimi yazar $(\mathfrak{A}, \beta)$ ikilisine ($\operatorname{Fm} L$'nin) bir **yorumu** der. $\mathfrak{y} = (\mathfrak{A}, \beta)$ bir yorum olduğunda her $t \in \operatorname{Tm} L$ için $t^{\mathfrak{A}}\,[\beta]$ yerine kısaca $t^{\mathfrak{y}}$ yazarsak her $\mathfrak{y}$ yorumu bize bir $\operatorname{Tm} L \to A$ $(t \rightsquigarrow t^{\mathfrak{y}})$ dönüşümü verir. ▲

Her şeyden önce $t^{\mathfrak{A}}[\beta] \in A = |\mathfrak{A}|$ olduğu apaçıktır. Diğer yandan $t^{\mathfrak{A}}[\beta]$ değerini belirlerken tüm β yerine salt $\beta|\deg t$'yi bilmek yeterlidir. Okur bunu, dd. aşağıdaki **çakışma önermesini** (TTK) ile kolayca kanıtlayabilir.

Önerme 3.5.13 (Çakışma Önermesi) $\beta, \gamma : \mathcal{V} \to A$ *iki nesneleme ve* $t \in \operatorname{Tm} L$ *olsun.* $\beta|\deg t = \gamma|\deg t$ *ise* $t^{\mathfrak{A}}[\beta] = t^{\mathfrak{A}}[\gamma]$.

Bu önermenin bir sonucu olarak aşağıdaki tanım kusursuzdur: $t \in \operatorname{Tm} L$, $\deg t \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ ve $\beta : \mathcal{V} \to A$ ise $\beta(x_i) = a_i$, $i = 1, \ldots n$ koşulunu sağlayan *herhangi* bir nesneleme olmak üzere

$$t^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_n] := t^{\mathfrak{A}}[\beta]$$

Özellikle $t \in \operatorname{Tmc} L$ bir sabit terim ise her $\alpha, \beta : \mathcal{V} \to A$ nesnelemeleri için $t^{\mathfrak{A}}\,[\alpha] = t^{\mathfrak{A}}\,[\beta]$ olacağından bu durumda bu ortak değeri yine yalın olarak $t^{\mathfrak{A}}$ ile göstereceğiz. Dolayısı $t \in \operatorname{Tmc} L$ ise $t^{\mathfrak{A}} \in A$.

Bir $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ yapısının iki farklı biçimde büyütülmesiyle ilgileneceğiz. Birincisinde $A = |\mathfrak{A}|$ evreni aynı kalır, L dili, bu dilin imlerinin $\mathfrak{A}$'daki yorumları aynı kalmak üzere, yeni imlerle zenginleştirilir. İkincisinde L dili korunur, A evreni büyütülür. Bir $\mathfrak{A}$ yapısını zemini A olan bir bina gibi düşünürsek şimdi tartışacağımız dil büyütme binaya kat eklemek, yani binayı yükseltmek gibi algılanabilir.

Tanım 3.5.14 *L ve L' iki biçimsel dil, $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ ve $\mathfrak{A}' \in \operatorname{Yap} L'$ olsunlar. $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{A}'|$, $L \subseteq L'$ ve her $l \in L$ için $l^{\mathfrak{A}'} = l^{\mathfrak{A}}$ ise ve ancak bu durumda $\mathfrak{A}'$ yapısı $\mathfrak{A}$ yapısının bir **dil eklenmişi** (veya bir **yükseltmesi**), buna karşın $\mathfrak{A}$ yapısına ise $\mathfrak{A}'$ yapısının bir **dil eksilmişi** (veya bir **kısaltması**[11]) diyelim. Bu durum $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \restriction L$ ile gösterilir.*

$\mathfrak{A}'$ yapısı $\mathfrak{A}$ yapısının bir dil eklenmişi ise açıkça

$$\operatorname{Tm} L \subseteq \operatorname{Tm} L',\ \operatorname{Fm} L \subseteq \operatorname{Fm} L'.$$

ve her $t \in \operatorname{Tm} L$ ve her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ için

$$t^{\mathfrak{A}} = t^{\mathfrak{A}'},\ \varphi^{\mathfrak{A}} = \varphi^{\mathfrak{A}'}.$$

$\mathfrak{A}'$ yapısını $\mathfrak{A}$ yapısına kısaltmak bu yapının L' dilinin $L' \backslash L$ kısmını unutmak demektir.

Dilsel eklemelerden bir tanesi şu an için işimize yarayacaktır. Her $B \subseteq A$ kümesi için $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ yapısını doğal bir biçimde bir $\mathfrak{A}_B$ yapısına yükselteceğiz. L dilini yeni sabit imleriyle genişleteceğiz. $B \subseteq A$ olsun. Her $b \in B$ için, bu öğenin **adı** diyeceğimiz, W abecemizde olmayan bir $\mathbf{b}$ sabit imini dilimize katacağız ve $a, b \in B$ ve $a \neq b$ ise $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ olmasını isteyeceğiz. $\mathbf{B} := \{\mathbf{b} \mid b \in B\}$ olmak üzere $L_B := L \sqcup \mathbf{B}$ olsun. $\mathfrak{A}_B$ yapısının dili L_B olacak, her $l \in L$'nin $\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{A}_B$'daki yorumları aynı olurken her yeni $\mathbf{b}$ sabit iminin $\mathfrak{A}_B$ yapısındaki yorumu ise b olacaktır, dd.

$$\mathbf{b}^{\mathfrak{A}_B} := b.$$

Bu durumda her $t = t(x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{Tm} L$ ve her $b_1, \ldots, b_n \in B$ için

$$t^{\mathfrak{A}}[b_1, \ldots, b_n] = t(x_1|\mathbf{b}_1, \ldots, x_n|\mathbf{b}_n)^{\mathfrak{A}_B}$$

olduğu kolayca görülebilir.

Biz genelde $B = A$ durumu ile ilgileneceğiz. Bu durumda $t = t(\overline{x_n}) \in \operatorname{Tm} L$ ve her $a_1, \ldots, a_n \in A$ için

$$t^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_n] = t(x_1|\mathbf{a}_1, \ldots, x_n|\mathbf{a}_n)^{\mathfrak{A}_A} = t(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)^{\mathfrak{A}_A}$$

[11] "Yükseltme" ve "kısaltma" kullanılan kavramlar değildirler. Ancak biz onları, olayı iyi yansıttıkları için seçtik.

t teriminde x_i yerine A kümesinin a_i öğeleri konamaz. $\mathbf{a}_i$ sabit imleri, bir anlamda bunu gerçekleştirebilmek için alınmıştır ve bir anlamda $\mathbf{A}$ ile A evrenini biçimselleştirdiğimizi düşünebiliriz.

Not 3.5.15 $\varphi = \dot{\forall} x\psi$ **formülünün anlamsal özü:** $\varphi^{\mathfrak{A}} = \forall x\psi^{\mathfrak{A}}$ olduğundan $\varphi^{\mathfrak{A}}[\beta] = (\forall x\psi^{\mathfrak{A}})[\beta]$. $\varphi^{\mathfrak{A}}$ formülünde x değişkeni hiçbir yerde serbest bulunamayacağından $\varphi^{\mathfrak{A}}[\beta]$ formülünü elde ederken x yerine $\beta(x)$ yazamayız.

$\psi^{\mathfrak{A}}$ formülünde, x dışındaki her $y \in \mathcal{V}\setminus\{x\}$ değişkeni için serbest bulunduğu her yerde y yerine $\beta(y)$ koyarak elde edilen formülü $\psi^{\mathfrak{A}}[\beta^x_x]$ ile gösterelim. Örneğin $\operatorname{Sb}\psi \subseteq \{x, y_1, \ldots, y_n\}$ ve $\psi^{\mathfrak{A}} = \psi^{\mathfrak{A}}(x, y_1, \ldots, y_n)$ ise $\beta(y_1) = a_1$, ..., $\beta(y_n) = a_n$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\psi^{\mathfrak{A}}[\beta^x_x] &= \psi^{\mathfrak{A}}(x, y_1|a_1, \ldots, y_n|a_n) = \psi^{\mathfrak{A}}(x, a_1, \ldots, a_n)\\ &= (\psi(x, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n))^{\mathfrak{A}_A}\end{aligned}$$

Bu durumda $\eta^{\mathfrak{A}}(x) := \psi^{\mathfrak{A}}[\beta^x_x]$ en fazla x değişkeninin serbest bulunabileceği bir formüldür ve $\mathfrak{A}$ yapısında

$$\begin{aligned}\forall x\psi^{\mathfrak{A}}[\beta] \text{ doğrudur } &\iff \forall x\eta^{\mathfrak{A}}(x) \text{ doğrudur.}\\ &\iff \forall x\ \psi^{\mathfrak{A}}(x, a_1, \ldots, a_n) \text{ doğrudur.}\\ &\iff \text{Her } a \in A \text{ için } \psi^{\mathfrak{A}}(a, a_1, \ldots, a_n) \text{ doğrudur.}\\ &\iff \text{Her } \mathbf{a} \in \mathbf{A} \text{ için } (\psi(\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n))^{\mathfrak{A}_A} \text{ doğrudur.}\end{aligned}$$

Dolayısıyla $\varphi^{\mathfrak{A}} = \forall x\psi^{\mathfrak{A}}$ formülünün β nesnelemesinde doğru olması tam da her $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ için $\psi(\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \in \operatorname{Sav} L_A$ savının $\mathfrak{A}_A$ yapısında doğru olmasıdır, ki bu tam da $\psi^{\mathfrak{A}}(a, a_1, \ldots, a_n)$ önermesinin doğru olması demektir. ▲

Bir tanım verdikten sonra bu durumu çok daha yalın dile getirebiliriz. $\beta : \mathcal{V} \to A$ bir nesneleme ve $a \in A$ olmak üzere $\beta^a_x : \mathcal{V} \to A$ nesnelemesi $\mathcal{V}\setminus\{x\}$ kümesinde β ile örtüşüp $\beta^a_x(x) = a$ koşulunu sağlayan nesneleme olsun, dd.

$$\beta^a_x(y) := \begin{cases} \beta(y) & ,\ y \neq x\\ a & ,\ y = x\end{cases}$$

Bu tanımla

$$\forall x\psi^{\mathfrak{A}}[\beta] \text{ doğrudur } \iff \text{Her } a \in A \text{ için } \psi^{\mathfrak{A}}[\beta^a_x] \text{ doğrudur.}$$

Tüm bu anlamsal arka plan hazırlıklarından sonra, her $\beta \in N^{\mathfrak{A}}$ nesnelemesi için bir $d^{\mathfrak{A}}_\beta : \operatorname{Fm} L \to \{0, 1\}$ değerlemesi tanımlayacağız.

Tanım 3.5.16 *$\mathfrak{A}$ bir L yapısı ve $\beta : \mathcal{V} \to A$ bir nesneleme olsun. Bir $d^{\mathfrak{A}}_{\beta} : \operatorname{Fm} L \to \{0,1\}$ değerlemesi her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ için $\varphi^{\mathfrak{A}}[\beta]$ savı doğru ise $d^{\mathfrak{A}}_{\beta}(\varphi) = 1$, $\varphi^{\mathfrak{A}}[\beta]$ savı yanlış ise $d^{\mathfrak{A}}_{\beta}(\varphi) = 0$ olarak açıklansın. Açık yazılımla her $\varphi, \psi, \eta \in \operatorname{Fm} L$ için, $s, t, t_1, \ldots, t_n \in \operatorname{Tm} L$, $R \in \mathcal{R}_n$, ve $x \in \mathcal{V}$ olmak üzere*

$$
\begin{array}{lll}
1.\ \varphi = s \dot{=} t \text{ ise} & d^{\mathfrak{A}}_{\beta}(\varphi) = 1 :\Longleftrightarrow\ s^{\mathfrak{A}}[\beta] = t^{\mathfrak{A}}[\beta]. & \\
2.\ \varphi = Rt_1 \cdots t_n \text{ ise} & d^{\mathfrak{A}}_{\beta}(\varphi) = 1 :\Longleftrightarrow\ \left(t_1^{\mathfrak{A}}[\beta], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[\beta]\right) \in R^{\mathfrak{A}} & \\
3.\ \varphi = \neg\psi \text{ ise} & d^{\mathfrak{A}}_{\beta}(\varphi) = d^{\mathfrak{A}}_{\beta}(\neg\psi) = 1 :\Longleftrightarrow\ d^{\mathfrak{A}}_{\beta}(\psi) = 0. & (3.6) \\
4.\ \varphi = \psi \to \eta \text{ ise} & d^{\mathfrak{A}}_{\beta}(\varphi) = \max\{d^{\mathfrak{A}}_{\beta}(\neg\psi), d^{\mathfrak{A}}_{\beta}(\eta)\}. & \\
5.\ \varphi = \dot{\forall} x\psi \text{ ise} & d^{\mathfrak{A}}_{\beta}(\varphi) = 1 :\Longleftrightarrow\ \forall a \in A\ d^{\mathfrak{A}}_{\beta^a_x}(\psi) = 1. &
\end{array}
$$

olarak açıklansın. Ayrıca

$$D^{\mathfrak{A}} := \left\{ d^{\mathfrak{A}}_{\beta} \mid \beta \in N^{\mathfrak{A}} \right\} \text{ ve } D_L := \bigcup_{\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L} D^{\mathfrak{A}}$$

olsun.

Not 3.5.17 $\mathfrak{y} = (\mathfrak{A}, \beta)$ yorumu için $d_{\mathfrak{y}} := d^{\mathfrak{A}}_{\beta}$ ve $d_{\mathfrak{y}^a_x} := d^{\mathfrak{A}}_{\beta^a_x}$ yazarsak (3.6) aşağıdaki şekli alır:

1. $d_{\mathfrak{y}}(s \dot{=} t) = 1 \iff s^{\mathfrak{y}} = t^{\mathfrak{y}}$.
2. $d_{\mathfrak{y}}(Rt_1 \cdots t_n) = 1 \iff \left(t_1^{\mathfrak{y}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{y}}\right) \in R^{\mathfrak{A}}$.
3. $d_{\mathfrak{y}}(\neg\psi) = 1 \iff d_{\mathfrak{y}}(\psi) = 0$.
4. $d_{\mathfrak{y}}(\dot{\forall} x\psi) = 1 \iff$ Her $a \in A$ için: $d_{\mathfrak{y}^a_x}(\psi) = 1$.

▲

Not 3.5.18 önermeler mantığında bir $p_0 \in P$ ile $\top := p_0 \curlyvee \neg p_0$ ve $\bot := p_0 \curlywedge \neg p_0 = \neg\top$ olarak açıklamıştık. $\top$ ve $\bot$ mutlaka gereksinim duyduğumuz kavramlar değildirler. Ancak okur bunlarla bazı mantık kitaplarında karşılaşır. Bağlantıyı kurabilmesi açısından ele aldık. Yüklem mantığına geçtiğimizde ise θ herhangi bir sav, örneğin $v_0 \in \mathcal{V}$ ile $\theta := \dot{\forall} v_0\, (v_0 \dot{=} v_0)$ olmak üzere

$$\top := \theta \to \theta = \neg\theta \curlyvee \theta \text{ ve } \bot := \neg\top = \theta \curlywedge \neg\theta$$

olarak açıklayacağız. $\top$ bir önerme mantıksal hepdoğru iken $\bot$ bir önerme mantıksal hepyanlıştır. θ parçalanamaz formülünün bir dosdoğru olması söz konusu olamaz; diğer yandan yine de her $d \in D_L$ için $d(\theta) = 1$! Dolayısıyla eğer $\operatorname{Fm} L$'nin önermemantıksal yapısı bizi ilgilendirmiyorsa, dd. salt D_L değerlemeleriyle çalışıyorsak $\top$ ve $\bot$ olarak θ ve $\neg\theta$ alınabilir. Bu nedenle çoğu mantık kitaplarında $\top$ ve $\bot$ olarak θ ve $\neg\theta$ alınır. ▲

Not 3.5.19 (3.5.16) tanımına göre

$$d_\beta^{\mathfrak{A}}(\varphi) = 1 \iff \varphi^{\mathfrak{A}}\,[\beta] \text{ doğrudur.}$$

$d_\beta^{\mathfrak{A}}$ değerlemeleri *özel* değerlemelerdir, bunlar φ formüllerinin yapısını ve $\mathfrak{A}$ yapısını gözeten değerlemelerdir. Örneğin φ asal formülü $x \doteq x$ ve $x, y \in \mathcal{V}$ iki farklı değişken olmak üzere ψ asal formülü ise $\dot\forall x\,(x \doteq y)$ olsun. Her $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ ve her $d_\beta^{\mathfrak{A}} \in D^{\mathfrak{A}}$ için $d_\beta^{\mathfrak{A}}(\varphi) = 1$ olduğu apaçıktır. Buna karşın bir $d \in D_L^{\mathrm{om}}$ değerlemesi için $d(\varphi) = 0$ olabilir. Bunu engelleyen hiç bir şey yoktur; önerme mantığı açısından φ formülü, yapısı gözardı edilen bir birimdir. Bu nedenle D_L kümesi D_L^{om} kümesinin bir öz altkümesidir, dolayısıyla

$$D_L \subsetneqq D_L^{\mathrm{om}}$$

Diğer yandan A desteği tek öğeli ise her $\beta \in D^{\mathfrak{A}}$ için $d_\beta^{\mathfrak{A}}(\psi) = 1$ olduğu açıktır. Şimdi A en az iki öğe içersin. η formülü $x \doteq y$ olmak üzere $\psi = \dot\forall x\eta$'dır. $\beta \in N^{\mathfrak{A}}$ keyfi verilsin. $a \in A$ öğesi $a \neq \beta(y)$ olarak seçilirse $\beta_x^a(x) = a \neq \beta(y) = \beta_x^a(y)$ olacağından $d_{\beta_x^a}^{\mathfrak{A}}(\eta) = 0$, dolayısıyla tanım gereği $d_\beta^{\mathfrak{A}}(\psi) = 0$ olur. ▲

Bilindiği gibi her $d : P_L \to \mathbf{2}$ fonksiyonu $\operatorname{Omf} P_L = \operatorname{Fm} L$ kümesine her $\varphi, \psi \in \operatorname{Fm} L$ için

$$d(\neg\varphi) = 1 - d(\varphi) \text{ ve } d(\varphi \to \psi) = \max\{d(\neg\varphi), d(\psi)\}$$

olacak biçimde *tek* türlü genişletilebilir. Bu nedenle aslında $d_\beta^{\mathfrak{A}}$ değerlemesini P_L kümesinde (3.5.16)(1), (2) ve (5) ile tanımlamak yeterlidir; bu tüm $\operatorname{Fm} L$ kümesine (3.5.16)(3) ve (4) sağlanacak biçimde tek türlü genişletilir. $\operatorname{Omf} P_L = \operatorname{Fm} L$ olduğundan genişletilmiş $d_\beta^{\mathfrak{A}}$ dönüşümünün tanım kümesi olarak $\operatorname{Fm} L$ yazabiliriz. Tanımlanmış $\curlywedge$, $\curlyvee$ ve $\leftrightarrow$ için bilinen özellikler geçerlidir: Her $\varphi, \psi \in \operatorname{Fm} L$ için

$$d_\beta^{\mathfrak{A}}(\varphi \curlywedge \psi) = d_\beta^{\mathfrak{A}}(\varphi) \wedge d_\beta^{\mathfrak{A}}(\psi),\ d_\beta^{\mathfrak{A}}(\varphi \curlyvee \psi) = d_\beta^{\mathfrak{A}}(\varphi) \vee d_\beta^{\mathfrak{A}}(\psi)$$
$$d_\beta^{\mathfrak{A}}(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 \iff d_\beta^{\mathfrak{A}}(\varphi) = d_\beta^{\mathfrak{A}}(\psi).$$

Tanım 3.5.20 *Her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ ve her $\beta \in N^{\mathfrak{A}}$ için*

$$\mathfrak{A} \models \varphi\,[\beta] :\iff d_\beta^{\mathfrak{A}}(\varphi) = 1.$$
$$\mathfrak{A} \not\models \varphi\,[\beta] :\iff d_\beta^{\mathfrak{A}}(\varphi) = 0.$$

$\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ yerine $(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi$ veya $\models_{\mathfrak{A}} \varphi[\beta]$ da yazılır. Aşağıdaki önerme doğrudan tanımların bir sonucudur ve genelde $\mathfrak{A} \models \varphi\,[\beta]$'nın FTT ile tanımı olarak alınır. Okurun bileceği gibi $\models, \not\models \notin W$ varsayacağız. Basit bir uyarı:

$\models$ iminin sağında daima bir bütün olarak bir η formülü olacaktır. Örneğin $\models \varphi \to \psi$'den $\models (\varphi \to \psi)$ anlaşılacaktır. $\models \varphi \to \psi$'den asla $(\models \varphi) \to \psi$ gibi anlamsız bir şey anlaşılmayacaktır! İzleyen önerme genelde $\mathfrak{A} \models \varphi$ bağıntısının tanımı olarak seçilir.

Önerme 3.5.21 *$\mathfrak{A}$ bir L yapısı ve $\beta : \mathcal{V} \to A$ bir nesneleme olsun. $s, t \in \operatorname{Tm} L$ ve $Rt_1 \cdots t_n$, φ, $\psi \in \operatorname{Fm} L$ olmak üzere*

$$\begin{array}{lrcl}
1. & \mathfrak{A} \models s \doteq t[\beta] & \iff & s^{\mathfrak{A}}[\beta] = t^{\mathfrak{A}}[\beta]. \\
2. & \mathfrak{A} \models Rt_1 \cdots t_n[\beta] & \iff & \left(t_1^{\mathfrak{A}}[\beta], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[\beta]\right) \in R^{\mathfrak{A}}. \\
3. & \mathfrak{A} \models \neg\varphi[\beta] & \iff & \mathfrak{A} \not\models \varphi[\beta] \\
4. & \mathfrak{A} \models (\varphi \to \psi)\,[\beta] & \iff & \mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \textit{ ise } \mathfrak{A} \models \psi[\beta]. \\
 & & \iff & \mathfrak{A} \not\models \varphi[\beta] \textit{ veya } \mathfrak{A} \models \psi[\beta]. \\
5. & \mathfrak{A} \models \dot{\forall} x\psi[\beta] & \iff & \forall a \in A\ \mathfrak{A} \models \psi[\beta^a_x].
\end{array}$$

Tanımlanmış mantık imleri için

$$\begin{array}{lrcl}
1. & \mathfrak{A} \models (\varphi \curlyvee \psi)\,[\beta] & \iff & \mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \text{ veya } \mathfrak{A} \models \psi[\beta] \\
2. & \mathfrak{A} \models (\varphi \curlywedge \psi)\,[\beta] & \iff & \mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \text{ ve } \mathfrak{A} \models \psi[\beta] \\
3. & \mathfrak{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)\,[\beta] & \iff & \mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \text{ ava } \mathfrak{A} \models \psi[\beta] \\
4. & \mathfrak{A} \models \dot{\exists} x\varphi[\beta] & \iff & \text{En az bir } a \in A \text{ için } \mathfrak{A} \models \varphi[\beta^a_x].
\end{array} \tag{3.7}$$

$\odot \in \{\curlyvee, \curlywedge, \leftrightarrow\}$ ve $\circledast \in \{\vee, \wedge, \Leftrightarrow\}$ onun anlamsal karşılığı olmak üzere (3.7)(1)-(3) kısaca

$$\mathfrak{A} \models (\varphi \odot \psi)\,[\beta] \iff \mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \circledast \mathfrak{A} \models \psi[\beta]$$

olarak özetlenebilir.

Örnek oluşturmak üzere (3.7)(4)'ü kanıtlayalım.

$$\begin{array}{rcl}
\mathfrak{A} \models \dot{\exists} x\varphi[\beta] \overset{def}{\iff} \mathfrak{A} \models \neg\dot{\forall} x\neg\varphi[\beta] & \iff & \mathfrak{A} \not\models \dot{\forall} x\neg\varphi[\beta] \\
\iff & \text{En az bir } a \in A \text{ için } & \mathfrak{A} \not\models \neg\varphi[\beta^a_x] \\
\iff & \text{En az bir } a \in A \text{ için } & \mathfrak{A} \models \varphi[\beta^a_x]
\end{array}$$

Not 3.5.22 Her $\beta \in N^{\mathfrak{A}}$ nesnelemesine $\beta(x) = a$ ise $\boldsymbol{\beta}(x) := \boldsymbol{a}$ olarak açıklayarak, bir anlamda bir $\boldsymbol{\beta} : \mathcal{V} \to$ **A biçimsel nesnelemesi** karşılık getirebiliriz. Her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ için, $\operatorname{Sb} \varphi = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ise

$$\varphi_{\boldsymbol{\beta}} := \varphi(x_1|\boldsymbol{\beta}(x_1), \ldots, x_n|\boldsymbol{\beta}(x_n))$$

olarak açıklansın. Başka sözlerle, φ formülünde serbest bulunan *her* x değişkeninin yerine serbest bulunduğu *her* yerde $\boldsymbol{\beta}(x)$ yazarak elde edilen formüle

$\varphi_{\boldsymbol{\beta}}$ diyelim. $\operatorname{Sb}\varphi_{\boldsymbol{\beta}} = \emptyset$ olduğundan $\varphi_{\boldsymbol{\beta}} \in \operatorname{Sav} L_A$. Aşağıdaki yalın gerçekleri kanıtlamayı alıştırma olarak bırakıyoruz: $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$, $\beta \in N^{\mathfrak{A}}$ ve φ, ψ formülleri $\operatorname{Fm} L$'de olmak üzere

1. $\varphi_{\boldsymbol{\beta}}^{\mathfrak{A}_A} = \varphi^{\mathfrak{A}}[\beta]$
2. $(\neg\varphi_{\boldsymbol{\beta}})^{\mathfrak{A}_A} = \neg\varphi_{\boldsymbol{\beta}}^{\mathfrak{A}_A}$
3. $(\varphi \to \psi)_{\boldsymbol{\beta}}^{\mathfrak{A}_A} = \left(\varphi_{\boldsymbol{\beta}}^{\mathfrak{A}_A} \Rightarrow \psi_{\boldsymbol{\beta}}^{\mathfrak{A}_A}\right)$
4. $\left(\dot{\forall} x\psi\right)_{\boldsymbol{\beta}}^{\mathfrak{A}_A} = \forall x \psi_{\boldsymbol{\beta}^{\bullet}_x}^{\mathfrak{A}_A}$.

Burada $\psi_{\boldsymbol{\beta}^{\bullet}_x}$ formülü, ψ formülünde *her* $y \in \operatorname{Sb}\psi \setminus \{x\}$ için serbest bulunduğu *her* yerde $\boldsymbol{\beta}(y)$ yazarak elde edilen formüldür. ▲

Terimler için Çakışma Teoremi'nin bir benzeri formüller için de geçerlidir.

Önerme 3.5.23 (Çakışma Teoremi) *$\beta, \gamma : \mathcal{V} \to A$ iki nesneleme ve $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ için $\beta|\operatorname{Sb}\varphi = \gamma|\operatorname{Sb}\varphi$ ise*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$$

Sonuç 3.5.24 *$\varphi \in \operatorname{Sav} L$ ise* her *β, γ nesnelemeleri için*

$$d_{\beta}^{\mathfrak{A}}(\varphi) = d_{\gamma}^{\mathfrak{A}}(\varphi), \text{ dd. } \mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$$

Kanıt. (FTK) ile kanıtlayacağız. Eğer φ bir atomik formülse sav doğrudan (3.5.13)'ün bir sonucudur. Diğer durumlar ise doğrudan (3.5.16)'dan çıkar. Sadece bir durumu örnekleyelim. $\varphi = \dot{\forall} x\psi$ ve sav ψ için kanıtlanmış ve $\beta|\operatorname{Sb}\varphi = \gamma|\operatorname{Sb}\varphi$ olsun. $\operatorname{Sb}\varphi = \operatorname{Sb}\psi\setminus\{x\}$, dolayısıyla her $a \in A$ için $\beta_x^a|\operatorname{Sb}\psi = \gamma_x^a|\psi$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \varphi[\beta] &\Longleftrightarrow \text{ Her } a \in A \text{ için } \mathfrak{A} \models \psi[\beta_x^a] \\ &\overset{tvk}{\Longleftrightarrow} \text{ Her } a \in A \text{ için } \mathfrak{A} \models \psi[\gamma_x^a] \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma] \end{aligned}$$

elde edilir ■

Çakışma Teoremi'nin bir sonucu, terimlerde olduğu gibi, kusursuz olan şu tanımdır: $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, $\beta : \mathcal{V} \to A$ ve $\beta(x_i) = a_i$, $i = 1, \ldots, n$ ise

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] :\Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\beta].$$

Not 3.5.25 (3.5.24)'ün sonucu olarak her $\beta, \lambda \in N^{\mathfrak{A}}$ için $d_{\beta}^{\mathfrak{A}}|\operatorname{Sav} L = d_{\lambda}^{\mathfrak{A}}|\operatorname{Sav} L$, dd.

$$\text{Her } \varphi \in \operatorname{Sav} L \text{ için: } \mathfrak{A} \models \varphi\,[\beta] \iff \mathfrak{A} \models \varphi\,[\lambda]\,.$$

Bu nedenle $\varphi \in \operatorname{Sav} L$ ve herhangi bir $\beta \in N^{\mathfrak{A}}$ için $\mathfrak{A} \models \varphi\,[\beta]$ ise bunu yalın olarak

$$\mathfrak{A} \models \varphi$$

ile göstereceğiz. Herhangi bir $\beta \in N^{\mathfrak{A}}$ ile açıklanan $d^{\mathfrak{A}} := d^{\mathfrak{A}}_{\beta} | \operatorname{Sav} L$ tanımı kusursuzdur. Elbette $d^{\mathfrak{A}} : \operatorname{Sav} L \to \{0,1\}$ dönüşümüne $\operatorname{Sav} L$ kümesinin bir değerlemesi olarak bakabiliriz. Demek ki her $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ yapısında $\operatorname{Sav} L$'de yüklem mantığından kaynaklanan bir tek $d^{\mathfrak{A}}$ değerlemesi vardır, dd.

$$D^s_L := D_L | \operatorname{Sav} L = \left\{ d^{\mathfrak{A}} \,|\, \mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L \right\}$$

Böylece $\varphi \in \operatorname{Sav} L$ ve $\beta \in N^{\mathfrak{A}}$ ise

$$\mathfrak{A} \models \varphi\,[\beta] \iff \mathfrak{A} \models \varphi \iff d^{\mathfrak{A}}(\varphi) = 1.$$

▲

Örnek 3.5.26 $L_{sc} = \{\prec; \dot{+}, \bullet; \mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ dilinin $\mathfrak{R}_<$ yapısını alalım.

$$\begin{aligned} \varphi &= \dot{\forall} x\ \neg(x \doteq \mathbf{0}) \curlywedge (y \prec z) \to y \bullet (x \bullet x) \prec z \bullet (x \bullet x) \\ \varphi &= \dot{\forall} x \psi,\ \psi = \neg(x \doteq \mathbf{0}) \curlywedge (y \prec z) \to y \bullet (x \bullet x) \prec z \bullet (x \bullet x) \\ \varphi^{\mathfrak{R}_<} &= \forall x \neg(x = 0) \wedge y < z \Rightarrow yx^2 < zx^2) \end{aligned}$$

olur. $\beta : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ herhangi bir nesneleme olmak üzere her $a \in \mathbb{R}$ için

$$\psi^{\mathfrak{R}_<}[\beta^a_x] = \neg(a = 0) \wedge \beta(y) < \beta(z) \Rightarrow \beta(y)a^2 < \beta(z)a^2$$

önermesi doğrudur. Gerçekten önümüzde $p \Rightarrow q$ tipinde bir önerme var. $a = 0$ veya $\beta(y) \geq \beta(z)$ ise p öncülü yanlış olacağından sav doğrudur. Şimdi $a \neq 0$ ve $\beta(y) < \beta(z)$ doğru ise, $a^2 > 0$ olacağından $\beta(y)a^2 < \beta(z)a^2$ de doğrudur, dolayısıyla $\psi^{\mathfrak{R}_<}[\beta^a_x]$ savı doğrudur. Sonuçta $\mathbb{R}$'deki her β nesnelemesi için $\mathfrak{R}_< \models \varphi[\beta]$. ▲

Tanım 3.5.27 *$\mathfrak{A}$ bir L yapısı ve $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ ve $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ olsun.*

1. En az bir $\beta \in N^{\mathfrak{A}}$ için $\mathfrak{A} \models \varphi\,[\beta]$ ise φ formülü $\mathfrak{A}$ ***yapısında sağlanabilir*** *denir. Bir $\beta \in N^{\mathfrak{A}}$ nesnelemesi her $\varphi \in \Gamma$ için $\mathfrak{A} \models \varphi\,[\beta]$ olacak biçimde bulunabiliyorsa Γ formül kümesi $\mathfrak{A}$**'da sağlanabilir*** *denir.*

2. Her *$d \in D^{\mathfrak{A}}$ için $d(\varphi) = 1$ ise, dd.* her *$\beta \in N^{\mathfrak{A}}$ nesnelemesi için $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ ise bunu kısaca $\mathfrak{A} \models \varphi$ olarak göstereceğiz ve bunu "φ formülü $\mathfrak{A}$**'da doğrudur**" veya "$\mathfrak{A}, \varphi$**'nin bir modelidir**" veya "φ formülü $\mathfrak{A}$**'da***

***geçerlidir**" diye okuyacağız. $\neg\varphi$ formülü $\mathfrak{A}$'da doğru ise φ formülü $\mathfrak{A}$**'da yanlıştır**" diyeceğiz.*

$$\begin{aligned}\operatorname{Mod}\varphi &:= \{\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L \mid \mathfrak{A} \models \varphi\},\\ \operatorname{Dog}\mathfrak{A} &:= \{\varphi \in \operatorname{Fm} L \mid \mathfrak{A} \models \varphi\},\\ \operatorname{Th}\mathfrak{A} &:= \{\sigma \in \operatorname{Sav} L \mid \mathfrak{A} \models \sigma\},\end{aligned}$$

olmak üzere $\operatorname{Mod}\varphi$ *sınıfına* φ *formülünün* ***modeller sınıfı*** *ve* $\operatorname{Dog}\mathfrak{A}$ *kümesine ise* $\mathfrak{A}$ ***yapısının doğruları*** *ve* $\operatorname{Th}\mathfrak{A}$ *kümesine ise* $\mathfrak{A}$ ***yapısının teoremleri*** *veya* $\mathfrak{A}$ ***yapısının kuramı (teorisi)*** *diyeceğiz.*[12]

3. $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ *ve* $\Gamma \subseteq \operatorname{Dog}\mathfrak{A}$ *ise, dd.* her $\varphi \in \Gamma$ *formülü* $\mathfrak{A}$ *yapısında doğru ise,* $\mathfrak{A}$ *yapısı* Γ***'nın bir modelidir*** *veya* Γ, $\mathfrak{A}$***'da doğrudur**" denir ve bu* $\mathfrak{A} \models \Gamma$ *ile gösterilir.* $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ *sonlu bir küme ise* $\mathfrak{A} \models \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ *yerine* $\mathfrak{A} \models \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *yazacağız.*

$$\operatorname{Mod}\Gamma := \{\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L \mid \mathfrak{A} \models \Gamma\}$$

sınıfına Γ*'nın* ***modeller sınıfı*** *denir. Elbette* $\operatorname{Mod}\emptyset = \operatorname{Yap} L$ *ve* $\operatorname{Mod}\varphi = \operatorname{Mod}\{\varphi\}$.

4. $\operatorname{Mod}\varphi = \operatorname{Yap} L$ *ise, dd.* her $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ *için* $\mathfrak{A} \models \varphi$ *ise* φ ***(hep)doğrudur*** *(veya* ***(genel)geçerlidir****) denir ve bu* $\models_L \varphi$*, veya yanlış anlaşılmayacağı umulduğunda kısaca* $\models \varphi$ *ile gösterilir; demek ki*

$$\models \varphi : \Longleftrightarrow\ \forall \mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L\ (\mathfrak{A} \models \varphi)\ \Longleftrightarrow\ \forall d \in D_L (d(\varphi) = 1).$$

Biz bu adlandırmalardan yalnızca birini kullanacağız ve her $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ *için* $\mathfrak{A} \models \varphi$ *ise* φ ***doğrudur*** *diyeceğiz.* L *dilinin doğru formüllerinin kümesini kısaca* $\operatorname{Dog} L$ *ile göstereceğiz, dd.*

$$\operatorname{Dog} L := \{\varphi \in \operatorname{Fm} L \mid \models_L \varphi\} = \bigcap_{\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L} \operatorname{Dog}\mathfrak{A}.$$

$\neg\varphi$ *doğru ise* φ ***(hep)yanlıştır*** *denir.*

Not 3.5.28 (3.5.27)'de verilen tüm kavramlar, yapılar ve yorumlar kullandıkları için hep *anlamsal* kavramlardır. Burada $\operatorname{Fm} L$ için açıklanan $\mathfrak{A}$'da *sağlanabilir,* $\mathfrak{A}$*'da doğru,* $\mathfrak{A}$*'da yanlış* veya *doğru, yanlış* gibi kavramların tanımlarında kullanılan değerlemeler $D^{\mathfrak{A}}$ ve D_L değerlemeler kümeleridir.

[12] Geleneksel matematikte biz genellikle savlarla çalışırız; bu nedenle gerçekte $\mathfrak{A}$ yapısının teoremlerinden anladığımız $\operatorname{Th}\mathfrak{A}$'dır.

Gerçekten de

$$\begin{aligned}
\varphi,\ \mathfrak{A}\text{'da sağlanabilir.} &\iff \exists d \in D^{\mathfrak{A}}\ d(\varphi) = 1.\\
\Gamma,\ \mathfrak{A}\text{'da sağlanabilir.} &\iff \exists d \in D^{\mathfrak{A}}\ \forall \varphi \in \Gamma\ d(\varphi) = 1.\\
\varphi,\ \mathfrak{A}\text{'da doğrudur.} &\iff \forall d \in D^{\mathfrak{A}}\ d(\varphi) = 1.\\
\varphi,\ \mathfrak{A}\text{'da yanlıştır.} &\iff \forall d \in D^{\mathfrak{A}}\ d(\varphi) = 0.\\
\varphi \text{ doğrudur.} &\iff \forall d \in D_L\ d(\varphi) = 1.\\
\varphi \text{ yanlıştır.} &\iff \forall d \in D_L\ d(\varphi) = 0.
\end{aligned}$$

Buna karşın $\operatorname{Fm} L$ kümesine $\operatorname{Omf} P_L$ olarak bakarsak, aynı kavramlar önermemantıksal olarak açıklandığında bu kez D_L^{om} değerlemeler kümesini kullanırız ve $D_L \subset D_L^{\mathrm{om}}$ olduğundan bu kavramlar örtüşmez. Örneğin

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ önermemantıksal sağlanabilir.} &\iff \exists d \in D_L^{\mathrm{om}} d(\varphi) = 1.\\
\varphi \text{ dosdoğrudur.} &\iff \forall d \in D_L^{\mathrm{om}}\ d(\varphi) = 1.\\
\Gamma \text{ önermemantıksal sağlanabilir.} &\iff \exists d \in D_L^{\mathrm{om}} \forall \varphi \in \Gamma d(\varphi) = 1.
\end{aligned}$$

Örneğin $\psi = \neg\varphi$ ve $\varphi = (x \doteq x)$ olsun. φ bir asal formül olduğundan $d(\varphi) = 0$ olan her $d \in D_L^{\mathrm{om}}$ değerlemesinde $d(\psi) = 1$ olacağından ψ formülü önermemantıksal sağlanabilir. Ancak her $d_\beta^{\mathfrak{A}} \in D^{\mathfrak{A}}$ için $d_\beta^{\mathfrak{A}}(\psi) = 0$ olacağından ψ formülü hiçbir $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ yapısında sağlanamaz. Diğer yandan açıkça φ doğrudur, ancak bir dosdoğru değildir; çünkü yukarıda da belirttiğimiz gibi bir $d \in D_L^{\mathrm{om}}$ için $d(\varphi) = 0$ açıklamamızı engelleyen hiçbir şey yoktur. ▲

φ formülünün $\mathfrak{A}$ yapısında doğru olmadığını $\mathfrak{A} \not\models \varphi$ ve doğru olmadığını ise $\not\models \varphi$ ile göstereceğiz. Her $\emptyset \neq \Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ için

$$\operatorname{Mod}\Gamma = \bigcap_{\varphi\in\Gamma} \operatorname{Mod}\varphi,\ \operatorname{Mod}\emptyset = \operatorname{Yap} L$$

olduğu apaçıktır. $\operatorname{Sb}\varphi = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ise

$$\varphi^{\dot\forall} := \dot\forall x_1 \dot\forall x_2 \cdots \dot\forall x_n \varphi \text{ ve } \varphi^{\dot\exists} := \dot\exists x_1 \dot\exists x_2 \cdots \dot\exists x_n \varphi,$$

formüllerine sırasıyla φ formülünün $\dot\forall$**-kapanışı** ve $\dot\exists$**-kapanışı** denir.

Önerme 3.5.29 *$\varphi, \psi \in \operatorname{Fm} L$, $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ ve $x \in \mathcal{V}$ ise*

Genelleştirme $\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{A} \models \dot\forall x\varphi$.
Ayırma (MP) $\mathfrak{A} \models \varphi$ *ve* $\mathfrak{A} \models (\varphi \to \psi)$ *ise* $\mathfrak{A} \models \psi$.

Sonuç 3.5.30 *$\varphi \in \operatorname{Fm} L$, ve $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{V}$ ise*

$$\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{A} \models \dot\forall x_1 \dot\forall x_2 \cdots \dot\forall x_n \varphi \text{ ve } \mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{A} \models \varphi^{\dot\forall}$$

Kanıt. Önce genelleştirmeyi kanıtlayalım.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \varphi &\iff \text{Her } \beta \in N^{\mathfrak{A}} \text{ için } \mathfrak{A} \models \varphi[\beta].\\
&\iff \text{Her } \beta \in N^{\mathfrak{A}} \text{ ve her } a \in A \text{ için } \mathfrak{A} \models \varphi[\beta^a_x].\\
&\iff \text{Her } \beta \in N^{\mathfrak{A}} \text{ için } \mathfrak{A} \models \dot{\forall} x\varphi[\beta].\\
&\iff \mathfrak{A} \models \dot{\forall} x\varphi.
\end{aligned}$$

Şimdi ayırmayı kanıtlayalım. $d \in D^{\mathfrak{A}}$ keyfi verilsin. Varsayımlarımızdan dolayı $d(\varphi) = 1$ ve $d(\varphi \to \psi) = 1$, dolayısıyla $d(\psi) = 1$ ve bkb.

Sonuç genelleştirmeden sonlu adımda çıkar. ■

Bu önerme ve sonucu bize doğrudan aşağıdaki teoremi verirler.

Teorem 3.5.31 *$\varphi, \psi \in \operatorname{Fm} L$, $x, x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{V}$ ise*

Genelleştirme $\models \varphi \iff \models \dot{\forall} x\varphi$.
Ayırma (MP) $\models \varphi$ *ve* $\models (\varphi \to \psi)$ *ise* $\models \psi$.
$\models \varphi \iff \models \dot{\forall} x_1 \dot{\forall} x_2 \cdots \dot{\forall} x_n \varphi$ *ve* $\models \varphi \iff \models \varphi^{\dot{\forall}}$

Not 3.5.32 Bazı Notlar

1. Her φ ve her $\beta \in N^{\mathfrak{A}}$ için ya $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ ya da $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[\beta]$. φ'nin $\mathfrak{A}$'da yanlış olması φ'nin $\mathfrak{A}$'da sağlanamaz olmasına denktir. φ'nin $\mathfrak{A}$'da doğru olması için gerek ve yeter koşul $\neg\varphi$'nin $\mathfrak{A}$'da yanlış olmasıdır. φ'nin $\mathfrak{A}$'da yanlış olması tam da her $\beta \in N^{\mathfrak{A}}$ için $\varphi^{\mathfrak{A}}[\beta]$ savının yanlış olması demektir.

   (!!) : Başta yadırgasak da "φ formülü $\mathfrak{A}$'da doğru değildir" önermesi, tanımların bir sonucu olarak, *asla* "φ formülü $\mathfrak{A}$'da yanlıştır" anlamına gelmez(bkz(3.5.32)(4) veya (3.5.33))! Ancak eğer $\varphi \in \operatorname{Sav} L$ ise o zaman φ doğru değilse yanlıştır.

2. (3.5.29) ve ekinin kanıtından da anlaşılabileceği gibi $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ herhangi bir permütasyon olmak üzere

$$\models \dot{\forall} x_1 \cdots \dot{\forall} x_n \varphi \iff \models \varphi \iff \models \dot{\forall} x_{\sigma(1)} \cdots \dot{\forall} x_{\sigma(n)} \varphi.$$

3. $\varphi \in \operatorname{Sav} L$ ise φ savının bir $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ yapısında doğru olması tam da herhangi bir $d \in D^{\mathfrak{A}}$ için $d(\varphi) = 1$, yanlış olması ise tam da $d(\varphi) = 0$ olması demektir. Dolayısıyla $\mathfrak{A}$ yapısında φ *savı* ya doğrudur ya da yanlıştır. φ ve $\neg\varphi$ savları $\mathfrak{A}$ yapısında aynı anda doğru olamazlar.

4. $\varphi \in \operatorname{Fm} L \setminus \operatorname{Sav} L$ ise herhangi bir $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ yapısında φ ve $\neg\varphi$ formüllerinin her ikisi de doğru olmayabilir. Bu durum β, γ nesnelemeleri,

$\varphi^{\mathfrak{A}}[\beta]$ doğru, $\varphi^{\mathfrak{A}}[\gamma]$ yanlış olabilecek biçimde bulunabildiğinde söz konusudur. Örneğin L_g grup dilinin $\varphi = (x \bullet y \doteq y \bullet x)$ formülünü alalım. $\mathfrak{G} = (G, *, e')$ değişmeli grup olmasın. $a, b \in G$ öğeleri $a * b \neq b * a$ olacak biçimde seçilsinler. $\beta, \gamma : X \to G$ nesnelemeleri $\beta(x) = a$, $\beta(y) = b$ ve $\gamma(x) = a$, $\gamma(y) = e'$ olarak seçilirsin. $\bullet^{\mathfrak{G}} = *$ ve $\mathbf{e}^{\mathfrak{G}} = e'$ olmak üzere $\varphi^{\mathfrak{G}} = (x * y = y * x)$ olacağından $d_\beta^{\mathfrak{G}}(\varphi) = 0$, dolayısıyla φ formülü $\mathfrak{G}$'de doğru değildir ve $d_\gamma^{\mathfrak{G}}(\varphi) = 1$, dolayısıyla φ formülü $\mathfrak{G}$'de yanlış da değildir. Biz herhangi bir yapıda onun *doğruları(=teoremleri)* ile ilgileniriz. φ formülünün $\mathfrak{A}$ yapısında doğru olması bizi $\mathfrak{A}$ yapısında sağlanabilir olmasından daha çok ilgilendirir.

(!!) : $\mathfrak{A} \models \varphi$ veya $\mathfrak{A} \models \psi$ ise $\mathfrak{A} \models \varphi \curlyvee \psi$ olduğu apaçıktır. Buna karşın $\mathfrak{A} \models \varphi \curlyvee \psi$ ise $\mathfrak{A} \models \varphi$ veya $\mathfrak{A} \models \psi$ olması gerekmez: $\mathfrak{A}$ yapısında φ ve ψ formüllerinden herhangi biri doğru olmadan da $\varphi \curlyvee \psi$ doğru olabilir. Örneğin aritmetik dilinde $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ formülleri, $\mathfrak{N}$'deki yorumları sırasıyla, anlamsal olarak "x çifttir" ve "x tektir" olarak seçilsin. φ ve ψ formülleri $\mathfrak{N}$ yapısında doğru değillerdir, ancak $\varphi \curlyvee \psi$ formülü $\mathfrak{N}$ yapısında doğrudur. φ ve ψ formüllerini yazmayı okura bırakıyoruz. Bu formüller aynı zamanda ne doğru ne de yanlış olmayan formüldürler. Demek ki

$$\mathfrak{A} \models (\varphi \curlyvee \psi) \overset{?}{\iff} \mathfrak{A} \models \varphi \text{ veya } \mathfrak{A} \models \varphi$$

denkliğinin $\Longrightarrow$ yönü genelde doğru değildir; ancak $\Longleftarrow$ yönü her zaman doğrudur.

5. φ formülü $\mathfrak{A}$ yapısında yanlıştır $\iff$ Her $\beta \in N^{\mathfrak{A}}$ nesnelemesi için $\varphi^{\mathfrak{A}}[\beta] \in \operatorname{Sav} L^{\mathfrak{A}}$ savı yanlıştır.

6. $(\varphi \to \psi) \in \operatorname{Fm} L$ ve $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ olsun. *$\varphi \to \psi$'nin $\mathfrak{A}$'da yanlış olması için gerek ve yeter koşul φ'nin $\mathfrak{A}$'da doğru, ψ'nin ise $\mathfrak{A}$'da yanlış olmasıdır, dd.*

$$\mathfrak{A} \models \neg(\varphi \to \psi) \iff \mathfrak{A} \models \varphi \text{ ve } \mathfrak{A} \models \neg\psi. \tag{3.8}$$

Gerçekten de $\varphi \to \psi$ formülünün $\mathfrak{A}$ yapısında yanlış olması *her* $\beta \in N^{\mathfrak{A}}$ nesnelemesi için $(\varphi \to \psi)^{\mathfrak{A}}[\beta]$ savının, dd. $\varphi^{\mathfrak{A}}[\beta] \Rightarrow \psi^{\mathfrak{A}}[\beta]$ savının yanlış olması demektir. Bu ise tam da her β için $\varphi^{\mathfrak{A}}[\beta]$'nın doğru, $\psi^{\mathfrak{A}}[\beta]$'nın ise yanlış olması demektir. Bu da $\mathfrak{A}$ yapısında φ'nin doğru, ψ'nin ise yanlış olması demektir.

(!!) : Benzeri bir önermeyi $\varphi \to \psi$ formülünün $\mathfrak{A}$ yapısında doğru olması için ileri sürebilir miyiz? Daha açık olarak $\varphi \to \psi$ formülünün $\mathfrak{A}$ yapısında doğru olması "$\mathfrak{A}$'da φ'nin yanlış veya $\mathfrak{A}$'da ψ'nin doğru"

olmasına denk midir, imlerle

$$\mathfrak{A} \models (\varphi \to \psi) \iff \mathfrak{A} \models \neg\varphi \text{ veya } \mathfrak{A} \models \psi?$$

Bu denkliğin sağdan sola olan yönü doğrudur ancak soldan sağa olan yön doğru değildir. Örneğin L_{sc} sıralanmış cisim dilinde $\varphi := (\mathbf{0} \prec x) \curlywedge (\mathbf{0} \prec y) \curlywedge (x \prec y)$ ve $\psi := (x \bullet x \prec y \bullet y)$ formüllerini alır ve $\mathfrak{A}$ yerine $\mathfrak{R}_<$ yapısını alırsak *bu yapıda* $\varphi \to \psi$ doğrudur, ancak φ ve ψ formülleri doğru da değil yanlış da değillerdir.

Tanım gereği $(\varphi \curlywedge \psi) = \neg(\varphi \to \neg\psi)$ ve okurun kolayca göreceği gibi $\mathfrak{A} \models \psi \iff \mathfrak{A} \models \neg\neg\psi$ olduğundan (3.8)'den

$$\mathfrak{A} \models (\varphi \curlywedge \psi) \iff \mathfrak{A} \models \varphi \text{ ve } \mathfrak{A} \models \psi$$

elde edilir.

$\mathfrak{A} \models \varphi$ bağıntısı beklentilere ancak savlar için tam olarak uyar: σ, τ formülleri L dilinin *savları* ise o zaman:

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{A} \models \sigma \curlywedge \tau & \iff & \mathfrak{A} \models \sigma \text{ ve } \mathfrak{A} \models \tau \\
\mathfrak{A} \models \sigma \curlyvee \tau & \iff & \mathfrak{A} \models \sigma \text{ veya } \mathfrak{A} \models \tau \\
\mathfrak{A} \models \sigma \to \tau & \iff & \mathfrak{A} \models \sigma \text{ ise } \mathfrak{A} \models \tau \\
\mathfrak{A} \models \sigma \leftrightarrow \tau & \iff & \mathfrak{A} \models \sigma \text{ ava } \mathfrak{A} \models \tau.
\end{array}$$

Biz geleneksel matematikte $\operatorname{Fm} L$ ve $\operatorname{Dog}\mathfrak{A}$ ile çalışmak yerine $\operatorname{Sav} L$ ve $\operatorname{Th}\mathfrak{A}$ ile çalışırız. Yukarıdaki tablo $\operatorname{Th}\mathfrak{A}$ ile gösterildiğinde her $\sigma, \tau \in \operatorname{Sav} L$ için

$$\begin{array}{lll}
\sigma \curlywedge \tau \in \operatorname{Th}\mathfrak{A} & \iff & \sigma \in \operatorname{Th}\mathfrak{A} \text{ ve } \tau \in \operatorname{Th}\mathfrak{A} \\
\sigma \curlyvee \tau \in \operatorname{Th}\mathfrak{A} & \iff & \sigma \in \operatorname{Th}\mathfrak{A} \text{ veya } \tau \in \operatorname{Th}\mathfrak{A} \\
\sigma \to \tau \in \operatorname{Th}\mathfrak{A} & \iff & \sigma \in \operatorname{Th}\mathfrak{A} \text{ ise } \tau \in \operatorname{Th}\mathfrak{A} \\
\sigma \leftrightarrow \tau \in \operatorname{Th}\mathfrak{A} & \iff & \sigma \in \operatorname{Th}\mathfrak{A} \text{ ava } \quad \in \operatorname{Th}\mathfrak{A}.
\end{array}$$

şeklini alır ki, bunlar alışık olduğumuz şeylerdir. Ayrıca her $\sigma \in \operatorname{Sav} L$ için ya $\sigma \in \operatorname{Th}\mathfrak{A}$ ya da $\neg\sigma \in \operatorname{Th}\mathfrak{A}$.

7. φ yanlıştır $\iff$ φ her $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ yapısında yanlıştır.
8. Γ, $\mathfrak{A}$'da sağlanabilir değilse Γ, **$\mathfrak{A}$'da sağlanamaz** denir. Benzer biçimde Γ sağlanabilir değilse Γ **sağlanamaz** denir.

▲

Örnek 3.5.33 L_s dilinin $\varphi := x \prec y \to \dot{\exists} z(x \prec z \prec y)$ formülünü alalım. $\prec$ bağıntısı $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{R}$'de yine $<$ ile göstereceğimiz doğal sıralamayla yorumlansın. φ formülü bir L_s yapısı olan $\mathfrak{R}_<$ yapısında doğrudur. $\beta, \gamma : \mathcal{V} \to \mathbb{N}$

değerlemeleri $\beta(x) = 1, \beta(y) = 2$ ve $\gamma(x) = 1, \gamma(y) = 3$ olarak seçilirse $\mathfrak{N} \models \varphi[\gamma]$ ancak $\mathfrak{N} \not\models \varphi[\beta]$! φ formülü $\mathfrak{N}$ yapısında doğru da değildir, yanlış da değildir. ▲

Yerine koyma

Örneğin L_h dilinin $t = x\dot{+}x\bullet(y\bullet y)$ terimi verilmiş olsun. $s_1 = s_1(x, y) = x\dot{+}y$ ve $s_2 = s_2(x, y) = x \bullet y$ olmak üzere

$$t(x|s_1, y|s_2) = x\dot{+}y + (x\dot{+}y) \bullet ((x \bullet y) \bullet (x \bullet y))$$

olur. L_h-yapısı olarak $\mathfrak{R}$ gerçel sayılar cismini seçersek

$$s_1^{\mathfrak{R}}[1, 2] = 3,\ s_2^{\mathfrak{R}}[1, 2] = 2,\ t(x|s_1, y|s_2)^{\mathfrak{R}}[1, 2] = 15$$

elde ederiz. Diğer yandan $t^{\mathfrak{R}}[3, 2] = 15$ olduğu da kolayca görülür. $\beta \in N^{\mathfrak{R}}$ nesnelemesi $\beta(x) = 1$, $\beta(y) = 2$ koşulunu sağlayan herhangi bir nesneleme ise

$$t(x|s_1, y|s_2)^{\mathfrak{R}}[1, 2] = t^{\mathfrak{R}}[s_1^{\mathfrak{R}}[1, 2], s_2^{\mathfrak{R}}[1, 2]]$$
$$t(x|s_1, y|s_2)^{\mathfrak{R}}[\beta] = t^{\mathfrak{R}}[\beta_{xy}^{s_1^{\mathfrak{R}}[\beta] s_2^{\mathfrak{R}}[\beta]}]$$

eşitliğini elde ederiz[13]. Bu eşitlik elbette salt seçtiğimiz terimlere ve nesnelemelere bağlı değildir. Analiz veya cebir derslerinde, kanıtlamaya bile gerek duymadan kullandığımız *yerine koyma* teoremini netleştirelim.

$\mathfrak{A}$ bir L yapısı ve $t = t(x_1, \ldots, x_n), s_1, \ldots, s_n \in \operatorname{Tm} L$ ve $\beta : \mathcal{V} \to A$ bir nesneleme olsun. $a_1, \ldots, a_n \in A$ için $\beta_{x_1 \cdots x_n}^{a_1 \cdots a_n} : \mathcal{V} \to A$ nesnelemesi

$$\beta_{x_1 \cdots x_n}^{a_1 \cdots a_n}(x) := \begin{cases} \beta(x) & x \neq x_i,\ 1 \leq i \leq n \\ a_i & x = x_i,\ 1 \leq i \leq n \end{cases} \tag{3.9}$$

olarak açıklansın.

Teorem 3.5.34 (Yerine Koyma Teoremi) *$\mathfrak{A}$ bir L yapısı, $s_1, \ldots s_n \in \operatorname{Tm} L$ olsun.*

1. $t \in \operatorname{Tm} L$ için

$$t(x_1|s_1, \ldots, x_n|s_n)^{\mathfrak{A}}[\beta] = t^{\mathfrak{A}}[\beta_{x_1 \cdots x_n}^{s_1^{\mathfrak{A}}[\beta] \cdots s_n^{\mathfrak{A}}[\beta]}].$$

Burada

$$t(x_1|s_1, \ldots, x_n|s_n)^{\mathfrak{A}}[\beta] := (t(x_1|s_1, \ldots, x_n|s_n))^{\mathfrak{A}}[\beta]$$

alınmıştır.

2. $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ ve her $i = 1, \ldots n$ için $\operatorname{Sb}(\varphi, x_i|s_i)$ ise

$$\mathfrak{A} \models \varphi((x_1|s_1, \ldots, x_n|s_n)[\beta] \iff \mathfrak{A} \models \varphi[\beta_{x_1 \cdots x_n}^{s_1^{\mathfrak{A}}[\beta] \cdots s_n^{\mathfrak{A}}[\beta]}]$$

[13] İkinci eşitlikteki bir gösterim biraz ileride (3.9)'da tanımlanacaktır.

Kanıt. Yalınlık açısından teoremin tek değişken için kanıtını vereceğiz, dd.

$$t(x|s)^{\mathfrak{A}}[\beta] = t^{\mathfrak{A}}[\beta_x^{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}] \tag{3.10}$$

ve

$$\mathfrak{A} \models \varphi(x|s)[\beta] \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\beta_x^{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}] \tag{3.11}$$

olduğunu kanıtlayacağız; gerisi bir tümevarım işidir.

1. (3.10)'un kanıtı: Kanıt (TTK) ile verilecektir. $t = c \in \mathcal{C}$ ise $t(x|s) = c$ olacağından, tanım gereği (*3.10*)'un her iki yanında da $c^{\mathfrak{A}}$ bulunur. $t = y \in \mathcal{V}\setminus\{x\}$ ise $t(x|s) = y$ olacağından bu kez eşitliğin iki yanında $\beta(y)$ bulunur. $t = x$ ise bu kez $t(x|s) = s$ olacağından eşitliğin iki yanında $s^{\mathfrak{A}}[\beta]$ bulunur. Şimdi $t = ft_1 \cdots t_n$ ve önerme $t_1, \ldots, t_n$ için kanıtlanmış olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} t(x|s)^{\mathfrak{A}}[\beta] &= (ft_1(x|s) \cdots t_n(x|s))^{\mathfrak{A}}[\beta] \\ &\overset{def}{=} f^{\mathfrak{A}}(t_1(x|s)^{\mathfrak{A}}[\beta], \cdots t_n(x|s)^{\mathfrak{A}}[\beta]) \\ &\overset{tvk}{=} f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\beta_x^{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[\beta_x^{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}]) \\ &\overset{def}{=} t^{\mathfrak{A}}[\beta_x^{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}]. \end{aligned}$$

2. (3.11)'in kanıtı: Şimdi $\mathrm{Sb}(\varphi, x|s)$ olsun. Her şeyden önce $x \notin \mathrm{Sb}\,\varphi$ ise $\varphi(x|s) = \varphi$ ve ayrıca β ve $\beta_x^{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}$ nesnelemeleri $\mathrm{Sb}\,\varphi$ de çakıştıklarından sav (3.5.23) Çakışma Teoremi'nden çıkar.

Şimdi $x \in \mathrm{Sb}\,\varphi$ olsun. Savı (FTK) ile kanıtlayacağız. φ bir atomik formülse sav doğrudan teoremimizin birinci kısmından çıkar. Sav ψ ve η için kanıtlanmış ve $\varphi = \neg\psi$ veya $\varphi = (\psi \to \eta)$ ise sav apaçıktır. Şimdi sav ψ için kanıtlanmış ve $\varphi = \dot{\forall} y\psi$ olsun. $x \in \mathrm{Sb}\,\varphi$ olduğundan $y \neq x$. Şimdi $b := s^{\mathfrak{A}}[\beta]$ olsun. $\mathrm{Sb}(\varphi, x|s)$ olduğundan $y \notin \deg s$ ve dolayısıyla her $a \in A$ için $b = s^{\mathfrak{A}}[\beta] = s^{\mathfrak{A}}[\beta_y^a]$. Böylece

$$\begin{aligned} [c]llll\mathfrak{A} \models \varphi(x|s)[\beta] &\Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \dot{\forall} y\psi(x|s)[\beta] \\ &\overset{def}{\Longleftrightarrow} \mathfrak{A} \models \psi(x|s)[\beta_y^a] \quad \text{her } a \in A \\ &\overset{tvk}{\Longleftrightarrow} \mathfrak{A} \models \psi[\beta_{yx}^{as^{\mathfrak{A}}[\beta_y^a]}] \quad \text{her } a \in A \\ &\Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi[\beta_{yx}^{ab}] \quad \text{her } a \in A \\ &\Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi[\beta_{xy}^{ba}] \quad \text{her } a \in A,\ x \neq y \\ &\Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \dot{\forall} y\psi[\beta_x^b] \\ &\Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\beta_x^{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}]. \end{aligned}$$

■

$\deg t, \deg \varphi \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\deg s_i \subseteq \{y_1, \ldots, y_k\}$ ise $a_j := \beta(y_j)$ ve $b_i := s_i^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_k]$ olmak üzere Yerine Koyma Teoremi'ni, yalın gösterimle, şöyle de dile getirebiliriz:

$$t(s_1, \ldots, s_n)^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_k] = t^{\mathfrak{A}}[b_1, \ldots, b_n]$$

ve her $i = 1, \ldots n$ için $\mathrm{Sb}(\varphi, x_i|s_i)$ ise

$$\mathfrak{A} \models \varphi(s_1, \ldots, s_n)[a_1, \ldots, a_k] \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[b_1, \ldots, b_n]$$

3.6 Temel Doğrular

L dilinin doğruları bizim için çok önemlidir; onlar L dilini kullanan, ileride tanımlayacağımız biçimsel L-kuramlarının ortak doğrularıdırlar. Ayrıca belirtmedikçe bu kesimde keyfi seçmiş olduğumuz bir L biçimsel dilinin doğrularıyla ilgileneceğiz ve $\models \varphi$, ayrıca belirtilmedikçe, her zaman $\models_L \varphi$'yi kastedecektir. Dolayısıyla bu kesimde vereceğimiz doğrular *tüm* biçimsel dillerin bazı doğrularının ortak kalıpları olacaklardır.

Önerme 3.6.1 *K ve L iki biçimsel dil, $L \subseteq K$ olsun. Her $\varphi \in \mathrm{Fm}\, L$ için*

$$\varphi \in \mathrm{Dog}\, L \iff \varphi \in \mathrm{Dog}\, K.$$

Kanıt. $\varphi \in \mathrm{Fm}\, L$ verilsin. Elbette $\varphi \in \mathrm{Fm}\, K$. φ formülü bir $\mathfrak{B} \in \mathrm{Yap}\, K$ yapısında doğru olmasın. $\mathfrak{A} := \mathfrak{B} \restriction L \in \mathrm{Yap}\, L$ olmak üzere $\varphi^{\mathfrak{B}}$ ve $\varphi^{\mathfrak{A}}$ anlamsal formülleri $|\mathfrak{B}|$ kümesinde aynı anlamsal formüller olduklarından φ formülü $\mathfrak{A}$ yapısında da doğru değildir. Dolayısıyla $\varphi \notin \mathrm{Dog}\ K$ ise $\varphi \notin \mathrm{Dog}\ L$.

Tersine, φ bir $\mathfrak{A} \in \mathrm{Yap}\, L$ yapısında doğru olmasın. $A = |\mathfrak{A}| \neq \emptyset$ olduğundan her $k \in K \backslash L$ imini, türüne uygun olarak, herhangi bir biçimde yorumlayarak bir $\mathfrak{C} \in \mathrm{Yap}\, K$ elde edelim. Elbette, $\varphi^{\mathfrak{A}}$ ve $\varphi^{\mathfrak{C}}$, A kümesinde aynı anlamsal formüller olduklarından, φ formülü $\mathfrak{C}$ yapısında da doğru değildir. Dolayısıyla $\varphi \notin \mathrm{Dog}\ L$ ise $\varphi \notin \mathrm{Dog}\ K$. ■

φ formülündeki, mantık imleri ve ayraçlar dışındaki harflerin sonlu kümesi H olsun. L_1 ve L_2 ise H'yi içeren iki dil olsun. $L := L_1 \cup L_2$ olmak üzere, φ formülü tüm H, L_1, L_2 ve L dillerinin formülü olduğundan, (3.6.1) ile

$$\varphi \in \mathrm{Dog}\, L_1 \iff \varphi \in \mathrm{Dog}(L_1 \cup L_2) \iff \varphi \in \mathrm{Dog}\, L_2.$$

Dolayısıyla aşağıdaki önerme geçerlidir.

Önerme 3.6.2 *φ formülü, onu yazabileceğimiz herhangi bir dilde doğru ise onu yazabileceğimiz her dilde de doğrudur, dd. L_1 ve L_2 herhangi iki biçimsel dil olmak üzere $\varphi \in \operatorname{Fm} L_1 \cap \operatorname{Fm} L_2$ ise*

$$\varphi \in \operatorname{Dog} L_1 \iff \varphi \in \operatorname{Dog} L_2.$$

$D_L \subset D_L^{\mathrm{om}}$ olduğundan aşağıdaki önerme geçerlidir:

Önerme 3.6.3 *Her dosdoğru doğrudur, dd. $\models_{\mathrm{om}} \varphi$ ise $\models \varphi$.*

Önerme 3.6.4 *$t_1, t_2 \in \operatorname{Tm} L$ keyfi verilsinler.*

1. Her $s \in \operatorname{Tm} L$ terimi için

$$\models t_1 \doteq t_2 \to s(x|t_1) \doteq s(x|t_2)$$

2. Her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ için $\operatorname{Sb}(\varphi, x|t_1)$ ve $\operatorname{Sb}(\varphi, x|t_2)$ ise

$$\models t_1 \doteq t_2 \to (\varphi(x|t_1) \leftrightarrow \varphi(x|t_2))$$

Kanıt. $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ ve $\beta \in N^{\mathfrak{A}}$ keyfi verilsin

$$\mathfrak{A} \models t_1 \doteq t_2[\beta] \iff t_1^{\mathfrak{A}}[\beta] = t_2^{\mathfrak{A}}[\beta]$$

olduğundan $\mathfrak{A} \models t_1 \doteq t_2[\beta]$ ise (3.5.34)(1) ile

$$s(x|t_1)^{\mathfrak{A}}[\beta] = s^{\mathfrak{A}}[\beta_x^{t_1^{\mathfrak{A}}[\beta]}] = s^{\mathfrak{A}}[\beta_x^{t_2^{\mathfrak{A}}[\beta]}] = s(x|t_2)^{\mathfrak{A}}[\beta]$$

dolayısıyla $\mathfrak{A} \models s(x|t_1) \doteq s(x|t_2)\,[\beta]$ olur; bu ilk önermeyi kanıtlar. Bu ve (3.5.34)(2)'den

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \varphi(x|t_1)[\beta] &\iff \mathfrak{A} \models \varphi[\beta_x^{t_1^{\mathfrak{A}}[\beta]}] \iff \mathfrak{A} \models \varphi[\beta_x^{t_2^{\mathfrak{A}}[\beta]}] \\ &\iff \mathfrak{A} \models \varphi(x|t_2)[\beta] \end{aligned}$$

denklikleri ikinci önermeyi kanıtlar. ■

Not 3.6.5 (3.6.4)(2)'de ilk bakışta $t_1 \doteq t_2$ ise, başka bir koşula gerek duymadan x yerine t_1 koyarak elde ettiğimiz formülle, x yerine t_2 yazarak elde ettiğimiz formülün aynı şeyi dile getirdiğini düşünmek son derece mantıklı gelebilir. Böyle olmadığını, $\operatorname{Sb}(\varphi, x|t_i), i = 1, 2$ koşullarından vazgeçilemeyeceğini örnekleyelim. $\varphi := \dot{\exists} y \dot{\neg}(x \doteq y)$ için $x \doteq y \to (\varphi(x|x) \leftrightarrow \varphi(x|y)$ formülü

$$x \doteq y \to (\dot{\exists} y \dot{\neg}(x \doteq y) \leftrightarrow \dot{\exists} y \dot{\neg}(y \doteq y)) \tag{3.12}$$

formülüdür. Bu ise desteği iki farklı öğe içeren yapılarda doğru değildir. Gerçekten de $\mathfrak{A}$ yapısının A desteği $a \neq b$ koşulunu sağlayan a, b öğelerini

içersin. $\beta \in N^{\mathfrak{A}}$ nesnelemesi $\beta(x) = a$ ve $\beta(y) = a$ koşulunu sağlasın. Bu durumda $\mathfrak{A} \models (x \doteq y)\,[\beta]$. Buna karşın $\dot{\exists} y \neg (y \doteq y)$ her yapıda, özellikle $\mathfrak{A}$ yapısında yanlış, ancak

$$(\dot{\exists} y \neg (x \doteq y))^{\mathfrak{A}}\,[\beta] = \exists y \neg (a = y)$$

önermesi doğrudur, çünkü $\neg\,(a = b)$ doğrudur. Sonuçta

$$\mathfrak{A} \models (x \doteq y)\,[\beta] \text{ ancak } \mathfrak{A} \not\models \dot{\exists} y \neg (x \doteq y) \leftrightarrow \dot{\exists} y \neg ((y \doteq y)$$

olduğundan (3.12) doğru değildir. ▲

Teorem 3.6.6 (Eşitlik İlksavları) *Her $L = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ dili için aşağıdaki L formülleri* doğrudurlar*: Her $f \in \mathcal{F}_n$ ve her $R \in \mathcal{R}_n$ için*

1. $\dot{\forall} x\,(x \doteq x)\,.$
2. $\dot{\forall} x, y\,(x \doteq y \to y \doteq x)\,.$
3. $\dot{\forall} x, y, z\,(x \doteq y \curlywedge y \doteq z \to x \doteq z)\,.$
4. $\dot{\forall} \overline{x_n}, \overline{y_n} (x_1 \doteq y_1 \curlywedge \cdots \curlywedge x_n \doteq y_n \to f x_1 \cdots x_n \doteq f y_1 \cdots y_n)$
5. $\dot{\forall} \overline{x_n}, \overline{y_n} (x_1 \doteq y_1 \curlywedge \cdots \curlywedge x_n \doteq y_n \to (R x_1 \cdots x_n \leftrightarrow R y_1 \cdots y_n))$

Kanıt. Tüm bu formüller herhangi bir yapıda $=$ eşitliğinin temel özelliklerinin ve (3.6.4)'ün doğrudan sonuçlarıdırlar. ■

(3.6.6)'daki formüllerin "doğru" olmasının aslında her bir formülün başına $\models$ imini koymakla eş anlamlı olduğunu son bir kez belirtelim.

Teorem 3.6.7 ($\dot{\forall}$-atma) *$\varphi \in \operatorname{Fm} L$ ve $\operatorname{Sb}(\varphi, x|t)$ ise*

$$\models \dot{\forall} x \varphi \to \varphi(x|t)$$

dd. $\dot{\forall} x \varphi \to \varphi(x|t)$ doğrudur. Özel olarak $t = x$ için $\models \dot{\forall} x \varphi \to \varphi$ ve $t = c$ için $\models \dot{\forall} x \varphi \to \varphi(x|c)$, yalın yazılımla $\models \dot{\forall} x \varphi \to \varphi(c)$.

Kanıt. (3.5.21)(4)'ten dolayı her $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ ve $\mathfrak{A}$'daki her β nesnelemesi için $\mathfrak{A} \models \dot{\forall} x \varphi[\beta]$ ise $\mathfrak{A} \models \varphi(x|t)[\beta]$ olduğunu kanıtlamalıyız. $\mathfrak{A} \models \dot{\forall} x \varphi[\beta]$ olsun. Bu her $a \in A$ için $\varphi^{\mathfrak{A}}[\beta^a_x]$'nın doğru olması demektir. Bu ve (3.5.34)(2)'den dolayı $\varphi(x|t)^{\mathfrak{A}}[\beta] = \varphi^{\mathfrak{A}}[\beta_x^{t^{\mathfrak{A}}[\beta]}]$ doğrudur, dolayısıyla $\mathfrak{A} \models \varphi(x|t)[\beta]$. ■

Teorem (3.6.7)'de $\operatorname{Sb}(\varphi, x|t)$ koşulundan vazgeçemeyeceğimizi örnekleyelim. Gerçi daha önce, eğer t terimi φ formülünde izinli değilse, $\varphi(x|t)$ de anlam değişikliği olacağını örneklemiş olsak da, her x için $\varphi(x)$ doğruysa her t terimi için $\varphi(x|t)$'nin de doğru olduğu düşünülebilir. φ formülü $\dot{\exists} y \neg\,(x \doteq y)$ ve $t = y$ olsun. x değişkeni φ'de t için serbest değildir ve

$$\dot{\forall} x \varphi \to \varphi(x|t) \text{ formülü } \dot{\forall} x \dot{\exists} y \neg\,(x \doteq y) \to \dot{\exists} y \neg\,(y \doteq y)$$

formülüdür ki bu A evreni en az iki öğe içeren $\mathfrak{A}$ yapılarında doğru değildir. Dolayısıyla $\mathrm{Sb}(\varphi, x|t)$ koşulundan vazgeçersek $\dot{\forall}x\varphi \to \varphi(x|t)$ formülü doğru olmayabilir.

Teorem 3.6.8 ($\dot{\exists}$-katma) *$\varphi \in \mathrm{Fm}\, L$ ve $\mathrm{Sb}(\varphi, x|t)$ ise*

$$\models \varphi(x|t) \to \dot{\exists}x\varphi$$

dd. $\varphi(x|t) \to \dot{\exists}x\varphi$ doğrudur. Özel olarak $t = x$ için $\models \varphi \to \dot{\exists}x\varphi$ ve $t = c$ için $\models \varphi(x|c) \to \dot{\exists}x\varphi$, yalın yazılımla $\models \varphi(c) \to \dot{\exists}x\varphi$.

Kanıt. Her $\mathfrak{A} \in \mathrm{Yap}\, L$ ve $\mathfrak{A}$'daki her β nesnelemesi için (3.5.34)(2) ile

$$\mathfrak{A} \models \varphi(x|t)[\beta] \Longrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\beta_x^{t^{\mathfrak{A}}[\beta]}] \overset{def}{\Longrightarrow} \mathfrak{A} \models \dot{\exists}x\varphi[\beta].$$

Dolayısıyla her $\mathfrak{A}$ ve her $\beta \in N^{\mathfrak{A}}$ için $\mathfrak{A} \models \left(\varphi(x|t) \to \dot{\exists}x\varphi\right)[\beta]$ ve bkb. ■

Burada da $\mathrm{Sb}(\varphi, x|t)$ koşulundan vazgeçemeyeceğimizi hemen örnekleyelim: $\varphi = \dot{\forall}y\,(x \doteq y)$ olsun. $t = y$ alırsak $\varphi(x|t) = \dot{\forall}y\,(y \doteq y)$ her $\mathfrak{A}$ yapısında geçerlidir. Buna karşın $\dot{\exists}x\varphi$, dd. $\dot{\exists}x\dot{\forall}y\,(x \doteq y)$ savı, A evreni en az iki öğe içeren her $\mathfrak{A}$ yapısında doğru değildir. Dolayısıyla $\varphi(x|t) \to \dot{\exists}x\varphi$ doğru değildir.

Not 3.6.9 Aslında (3.6.8), (3.6.7)'den başka bir şey değildir. Gerçekten $\dot{\forall}x\neg\varphi \to \neg\varphi(x|t)$ doğru formülünün karşı konumu $\neg\neg\varphi(x|t) \to \neg\dot{\forall}x\neg\varphi$. Diğer yandan $\varphi(x|t) \to \neg\neg\varphi(x|t)$ bir önermemantıksal hepdoğru olduğundan zincir kuralı ile $\varphi(x|t) \to \neg\dot{\forall}x\neg\varphi$ elde ederiz ve bu tanım gereği tam da $\varphi(x|t) \to \dot{\exists}x\varphi$ formülüdür. ▲

Teorem 3.6.10 *1. $x \notin \mathrm{Sb}\,\varphi$ ise*

$$\models \dot{\forall}x\,(\varphi \to \psi) \to \left(\varphi \to \dot{\forall}x\psi\right).$$

2. $x \notin \mathrm{Sb}\,\psi$ ise

$$\models \dot{\forall}x(\varphi \to \psi) \to (\dot{\exists}x\varphi \to \psi).$$

Kanıt. *1.'in kanıtı:* $\xi := \dot{\forall}x\,(\varphi \to \psi)$ ve $\eta := \left(\varphi \to \dot{\forall}x\psi\right)$ olsun. Her $d \in D_L$ için $d(\xi \to \eta) = 1$ olduğunu, dd. $d(\xi) \leq d(\eta)$ olduğunu kanıtlayacağız. $d(\xi) = 0$ ise bu eşitsizlik sağlanır. Diğer yandan $d(\varphi) = 0$ ise $d(\eta) = 1$ olacağından elbette $d(\xi) \leq d(\eta)$ olacaktır. Bu nedenle $d(\varphi) = 1$ *ve* $d(\xi) = 1$ varsayalım. Bir $\mathfrak{A} \in \mathrm{Yap}\, L$ ve bir $\beta \in N^{\mathfrak{A}}$ için $d = d_\beta^{\mathfrak{A}}$. $d(\xi) = 1$'den her $a \in A$ için $d_{\beta_x^a}^{\mathfrak{A}}(\varphi) \leq d_{\beta_x^a}^{\mathfrak{A}}(\psi)$ olur. Diğer yandan $x \notin \mathrm{Sb}\,\varphi$ olduğundan her $a \in A$ için $1 = d_\beta^{\mathfrak{A}}(\varphi) = d_{\beta_x^a}^{\mathfrak{A}}(\varphi) \leq d_{\beta_x^a}^{\mathfrak{A}}(\psi) \leq 1$ elde ederiz. Bu ise bize

$d(\dot\forall x\psi) = d^{\mathfrak{A}}_{\beta}(\dot\forall x\psi) = \min_{a\in A} d^{\mathfrak{A}}_{\beta^a_x}(\psi) = 1$ ve dolayısıyla $d(\eta) = 1$ eşitliklerini verir ve işimiz biter.

2.'nin kanıtı: $\xi := \dot\forall x(\varphi \to \psi)$ ve $\kappa := \dot\exists x\varphi \to \psi$ olmak üzere herhangi bir $d = d^{\mathfrak{A}}_{\beta} \in D_L$ için $d(\xi) = 1$ ve $d(\kappa) = 0$ olamayacağını göstermeliyiz. $d(\xi) = 1$ olsun, dd. her $a \in A$ için, $x \notin \operatorname{Sb}\psi$ olduğunu da gözetirsek, $d^{\mathfrak{A}}_{\beta^a_x}(\varphi) \le d^{\mathfrak{A}}_{\beta^a_x}(\psi) = d(\psi)$ olur. $d(\psi) = 1$ ise $d(\kappa) = 1$ olacağından bir sorun yoktur. Eğer $d(\psi) = 0$ ise her $a \in A$ için $d^{\mathfrak{A}}_{\beta^a_x}(\varphi) = 0$ olacağından $d(\dot\exists x\varphi) = \max_{a\in A} d^{\mathfrak{A}}_{\beta^a_x}(\varphi) = 0$ elde ederiz ki yine $d(\kappa) = 1$ olur. ■

Sonuç 3.6.11 *$\varphi, \psi \in \operatorname{Fm} L$ ve $x \in \mathcal{V}$ olsun.*

1. *$\models \varphi \to \psi$ ve $x \notin \operatorname{Sb}\varphi$ ise $\models \varphi \to \dot\forall x\psi$.*
2. *$\models \varphi \to \psi$ ve $x \notin \operatorname{Sb}\psi$ ise $\models \dot\exists x\varphi \to \psi$.*

Kanıt. (3.6.10) ve ayırmadan ((3.5.31)) çıkarlar. ■

3.7 Mantıksal Çıkarımlar

Matematikte temel amaç matematiksel bir kuramın doğrularını bulmaktır. Bunu ise kuramın ilksavlarından yola çıkarak ve bazı *mantıksal çıkarımlar* kullanarak yaparız. Matematiksel mantığın ortaya çıkışının en önemli nedeni *matematiksel irdelemeleri*, dd. *mantıksal çıkarımları* incelemektir.

Önermeler mantığında açıkladığımız $\Vdash_{\mathrm{om}}, \equiv_{\mathrm{om}}, \ldots$ gibi kavramların benzerlerini bu kez $\operatorname{Fm} L$ için açıklayacağız açıklayacağız. Önermeler mantığında bir $\varphi \in \operatorname{Omf} P$ formülünün modelinden $d(\varphi) = 1$ koşulunu sağlayan, dd. φ formülünün *doğru* olduğu bir $d : P \to \{0, 1\}$ anlamıştık. Yüklem mantığında ise bir $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ formülünün modelinden ise bu formülün *doğru* olduğu bir $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ anlamıştık. Bu karşılık getirmelerle aşağıdaki tanımlar, önermeler mantığındaki tanımlarla benzeşir.

Tanım 3.7.1 *$\varphi, \psi \in \operatorname{Fm} L$ ve $\Gamma, \Omega \subseteq \operatorname{Fm} L$ olsunlar.*

*1. Ω, Γ'nın **mantıksal sonucudur** veya Ω, **mantıksal olarak** Γ**'dan çıkar**, imlerle $\Gamma \Vdash \Omega :\iff \operatorname{Mod}\Gamma \subseteq \operatorname{Mod}\Omega$.*

*2. Eğer $\Omega = \{\varphi\}$ ise $\Gamma \Vdash \{\varphi\}$ yerine $\Gamma \Vdash \varphi$ yazacağız ve bu durumda φ, Γ'nın **mantıksal sonucudur** veya φ, **mantıksal olarak** Γ**'dan çıkar** veya kısaca φ bir Γ-**teoremidir** veya Γ-**doğrusudur** veya Γ-**çıkarımıdır** diyeceğiz*[14]*. $\Gamma \Vdash \varphi$ başka sözlerle Γ'nın formüllerinin doğru olduğu her L-yapısında φ formülünün de doğru olmasıdır. Γ'nın mantıksal çıkarımlarının*

[14] Geleneksel matematikte "teorem" genelde σ savları için kullanılır.

kümesini $\operatorname{Mc}_L \Gamma$ *veya yalın biçimde* $\operatorname{Mc} \Gamma$ *ile göstereceğiz, dd.*

$$\operatorname{Mc} \Gamma := \{\varphi \in \operatorname{Fm} L \mid \Gamma \Vdash \varphi\}.$$
$$\operatorname{Mt} \Gamma := \{\sigma \in \operatorname{Sav} L \mid \Gamma \Vdash \sigma\} = \operatorname{Mc} \Gamma \cap \operatorname{Sav} L.$$

Not 3.7.2 Bazı yazarlar Γ'nın modellerini ve mantıksal çıkarımları farklı tanımlarlar. Bir φ formülünün modellerinden, bu formülün doğru olduğu $\mathfrak{y} = (\mathfrak{A}, \beta)$ yorumlarını, eş anlamlı olmak üzere $d_\beta^{\mathfrak{A}}(\varphi) = 1$ koşulunu sağlayan $d_\beta^{\mathfrak{A}}$ değerlemelerini anlarlar. $\operatorname{Fm} L$ kümesinin D_L değerlemelerinden yola çıkarak bu tanımları tümüyle önermeler mantığına koşut sürdürürler. $d_\beta^{\mathfrak{A}} \in D_L$ için $\mathfrak{A} \models \varphi\,[\beta]$ yerine $d_\beta^{\mathfrak{A}} \models \varphi$ yazarsanız izleyen tanım aşikârdır. $\Gamma, \Omega \subseteq \operatorname{Fm} L$ için

$$\operatorname{Mod}^* \Gamma := \{d \in D_L \mid \text{Her } \varphi \in \Gamma \text{ için } d(\varphi) = 1\}$$
$$\Gamma \Vdash^* \Omega :\iff \operatorname{Mod}^* \Gamma \subseteq \operatorname{Mod}^* \Omega$$

olarak açıklanır. $\Gamma \Vdash^* \Omega$ bağıntısı sözlerle tam da şu anlama gelir: Herhangi bir $d \in D_L$ değerlemesinde Γ'nın tüm formülleri doğruysa Ω'nın da tüm formülleri doğrudur.

$$\operatorname{Mod}' \Gamma := \bigcup_{\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod} \Gamma} D^{\mathfrak{A}}$$

olarak açıklarsak

$$\operatorname{Mod}' \Gamma \subseteq \operatorname{Mod}^* \Gamma \textit{ ve}$$
$$\Gamma \Vdash \Omega \iff \operatorname{Mod}' \Gamma \subseteq \operatorname{Mod}' \Omega$$

olduğu apaçıktır. Diğer yandan

$$\Gamma \Vdash \Omega \implies \Gamma \Vdash^* \Omega$$

olduğu kolayca görülür. Ancak bunun tersi genelde doğru değildir. Bu iki tür mantıksal çıkarımın örtüştüğü bir durum vardır: $\Gamma \subseteq \operatorname{Sav} L$, özellikle $\Gamma = \emptyset$:

$$\Gamma \Vdash \Omega \iff \Gamma \Vdash^* \Omega,\ \Gamma \subseteq \operatorname{Sav} L.$$
$$\Vdash \Omega \iff \Vdash^* \Omega$$

İleride birkaç yerde $\Vdash$ ve $\Vdash^*$ çıkarımları arasındaki farkın yarattığı farklara değineceğiz; ancak bu işi fazla sürdürmeyip $\Vdash$ bağıntısına odaklanacağız. ▲

Bu tanımlarda L dilini vurgulamak gerekirse $\Vdash$ imi yerine $\Vdash_L$ yazacağız. Tanımdan doğrudan

1.	Her $\varphi \in \Gamma$ için $\Gamma \Vdash \varphi$	Yansıma
2.	$\Gamma \subseteq \Omega$ ise $\Gamma \Vdash \varphi \implies \Omega \Vdash \varphi$	Monotonluk
3.	$\Gamma \Vdash \Omega$ ve $\Omega \Vdash \varphi$ ise $\Gamma \Vdash \varphi$	Geçişlilik

elde edilir.

$\Gamma = \emptyset$ ise $\mathrm{Mc}_L \emptyset$ yerine kısaca Mc_L veya Mc ve $\emptyset \Vdash \Omega$ yerine yalın olarak $\Vdash \Omega$ yazacağız. $\mathrm{Mod}\,\emptyset = \mathrm{Yap}\,L$ olduğundan

$$\Vdash \varphi : \Longleftrightarrow \emptyset \Vdash \varphi \iff \models \varphi. \tag{3.13}$$

$$\Vdash \varphi \iff \Vdash^* \varphi \tag{3.14}$$

Burada da önermeler mantığında olduğu gibi

$$\Gamma \cup \{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \Vdash \varphi \text{ ve } \Gamma \Vdash \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$$

gösterimlerinin yerine sırasıyla

$$\Gamma, \psi_1, \ldots, \psi_n \Vdash \varphi \text{ ve } \Gamma \Vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$$

gösterimlerini kullanacağız. (3.13) ile daha önce $\models$ için elde edilen teoremler buraya $\Vdash$ için aktarılır. Bunların bir kısmını aşağıdaki teoremde toplayacağız.

Teorem 3.7.3 *$\varphi, \psi \in \mathrm{Fm}\,L, x \in \mathcal{V}$ ve $\Gamma, \Omega \subseteq \mathrm{Fm}\,L$ ve $s, t_1, t_2 \in \mathrm{Tm}\,L$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir:*

1.	$\Gamma \Vdash_{\mathrm{om}} \varphi$ *ise* $\Gamma \Vdash \varphi$.	
2.	$\Vdash \varphi$,	φ *doğru (genel geçerli).*
3.	$\Gamma \Vdash \varphi$ *ise* $\Omega \Vdash \varphi$,	$\Gamma \subseteq \Omega$.
4.	$\Vdash t_1 \doteq t_2 \to s(x\vert t_1) \doteq s(x\vert t_2)$,	
5.	$\Vdash t_1 \doteq t_2 \to (\varphi(x\vert t_1) \leftrightarrow \varphi(x\vert t_2))$,	$\mathrm{Sb}(\varphi, x\vert t_i),\ i = 1, 2.$
6.	$\Vdash \varepsilon$,	ε *bir Eşitlik İlksavı.*
7.	$\Vdash \dot\forall x\varphi \to \varphi(x\vert t)$,	$\mathrm{Sb}(\varphi, x\vert t)$.
8.	$\Vdash \varphi\,(x\vert t) \to \dot\exists x\varphi$,	$\mathrm{Sb}(\varphi, x\vert t)$.
9.	$\Vdash \dot\forall x\,(\varphi \to \psi) \to \Big(\varphi \to \dot\forall x\psi\Big)$,	$x \notin \mathrm{Sb}\,\varphi$.
10.	$\Vdash \dot\forall x\,(\varphi \to \psi) \to \Big(\dot\exists x\varphi \to \psi\Big)$,	$x \notin \mathrm{Sb}\,\psi$
11.	$\Vdash \varphi \iff \Vdash \dot\forall x\varphi$ *ve* $\Vdash \varphi \iff \Vdash \varphi^{\dot\forall}$,	
12.	$\Vdash \varphi$ *ve* $\Vdash \varphi \to \psi$ *ise* $\Vdash \psi$	*(MP).*

Eğer (3.7.3) teoreminde (7) ve (8)'de $t = x$ alırsak özel olarak her φ formülü için

$$\Vdash \dot\forall x\varphi \to \varphi \text{ ve } \Vdash \varphi \to \dot\exists x\varphi$$

elde edilir. (3.7.3)(1) çok kullanışlıdır ve bize önermeler mantığından bir çok mantıksal çıkarım verir. Bunlardan sıkça kullanılan birkaç tanesi aşağıdadır:

$$
\begin{array}{lll}
1. & \varphi \Vdash \varphi & \text{yansıma.} \\
2. & \varphi, \varphi \to \psi \Vdash \psi & \text{ayırma(modus ponens).} \\
3. & \neg\varphi \Vdash \varphi \to \psi & \text{yanlış kuralı(regula falsi).} \\
4. & \varphi \to \psi, \psi \to \eta \Vdash \varphi \to \eta & \text{zincir kuralı.} \\
5. & \varphi \curlywedge \psi \Vdash \varphi, \psi & \curlywedge \text{ atma.} \\
6. & \varphi \to \psi \Vdash \neg\psi \to \neg\varphi & \text{karşı konum.} \\
7. & \neg\psi \to \neg\varphi \Vdash \varphi \to \psi & \text{karşı konum.} \\
8. & \varphi \to \neg\psi \Vdash \psi \to \neg\varphi & \text{karşı konum.} \\
9. & \varphi \to \psi, \neg\psi \Vdash \neg\varphi &
\end{array}
\tag{3.15}
$$

Teorem 3.7.4 *Aşağıdaki önermeler eşdeğerlidir:*

1. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \Vdash \varphi$.
2. *Her* $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ *için:* $\Gamma \Vdash \varphi_k, k = 1, \ldots, n$ *ise* $\Gamma \Vdash \varphi$.

Kanıt. (1) $\Longrightarrow$ (2): Her $k = 1, \ldots, n$ için $\Gamma \Vdash \varphi_k$ ise, $\operatorname{Mod}\Gamma \subseteq \operatorname{Mod}\varphi_k$ olacağından

$$\operatorname{Mod}\Gamma \subseteq \operatorname{Mod}\varphi_1 \cap \cdots \cap \operatorname{Mod}\varphi_n = \operatorname{Mod}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \overset{vrs}{\subseteq} \operatorname{Mod}\varphi$$

olur ve bu $\Gamma \Vdash \varphi$ demektir.

(2) $\Longrightarrow$ (1): (2) doğru olsun ve $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ alınsın. $\Gamma \Vdash \varphi_k, k = 1, \ldots, n$ olduğundan $\Gamma \Vdash \varphi$ elde ederiz. Bu ise $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \Vdash \varphi$ demektir. ■

(3.5.29)(genelleştirme)'den dolayı her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ için $\operatorname{Mod}\varphi = \operatorname{Mod}\dot{\forall}x\varphi = \operatorname{Mod}\varphi^{\dot{\forall}}$ olduğundan aşağıdaki önerme aşikârdır:

Önerme 3.7.5 *Her* $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ *için*

$$
\begin{array}{lll}
1. & \varphi \Vdash \dot{\forall}x\varphi & \textit{(Genelleştirme),} \\
2. & \dot{\forall}x\varphi \Vdash \varphi & \textit{(Özelleştirme),} \\
3. & \varphi \Vdash \varphi^{\dot{\forall}} \textit{ ve } \varphi^{\dot{\forall}} \Vdash \varphi. &
\end{array}
$$

Teorem 3.7.6 (Yeni Sabitler Teoremi) $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$, $\varphi = \varphi(\overline{x_n}) \in \operatorname{Fm} L$ *ve* $c_1, \ldots, c_n$ *sabitleri* L*'de olmayan yeni sabitler olsun.* $L' := L \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$ *olmak üzere*

$$\Gamma \Vdash_{L'} \varphi(c_1, \ldots, c_n) \implies \Gamma \Vdash_L \dot{\forall}x_1 \cdots \dot{\forall}x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

Kanıt. $\Gamma \Vdash_{L'} \varphi(c_1, \ldots, c_n)$ olsun. $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod}\Gamma$ ve $a_1, \ldots, a_n \in A$ keyfi verilsinler. $c_i^{\mathfrak{A}'} := a_i$ yorumlarıyla $\mathfrak{A}$ yapısını $\mathfrak{A}' \in \operatorname{Yap} L'$ yapısına yükseltelim.

Γ yeni sabitleri içermediğinden $\mathfrak{A}' \models \Gamma$, varsayımdan dolayı $\mathfrak{A}' \models \varphi(\overline{c_n})$, dd. $\mathfrak{A}' \models \varphi\,[\overline{a_n}]$. Ancak biz $\varphi^{\mathfrak{A}} = \varphi^{\mathfrak{A}'}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla her $\overline{a_n} \in A$ için $\varphi^{\mathfrak{A}}\,[\overline{a_n}]$ doğru olur, öyleyse $\mathfrak{A} \models \dot{\forall}\overline{x_n}\varphi(\overline{x_n})$. $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ keyfi seçildiğinden sav çıkar. ■

Not 3.7.7 $L = L_h = (\dot{+}, \bullet, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ ve $\varphi = \varphi(x) \in \operatorname{Fm} L$ formülü

$$\dot{\exists} y\,(x \doteq y \dot{+} (y \dot{+} \mathbf{1}))$$

olsun. $\dot{+}, \bullet$ ve $\mathbf{1}$'in $\mathfrak{N}$'deki yorumları $\mathbb{N}$'deki bildik toplama, çarpma ve 1 olmak üzere $\mathfrak{N}$ yapısında $\varphi^{\mathfrak{N}}(3)$ doğru, buna karşın $\varphi^{\mathfrak{N}}(2)$ yanlıştır. $\dot{\forall}x\varphi$ savı $\mathfrak{N}$ yapısında yanlıştır, dolayısıyla her $d_\beta^{\mathfrak{N}} \in D^{\mathfrak{N}}$ için $\mathfrak{N} \not\models \dot{\forall}x\varphi\,[\beta]$. Şimdi $\beta(x) = 3$ olacak biçimde seçelim. Bu durumda $d_\beta^{\mathfrak{N}} \in \operatorname{Mod}^* \varphi$ ve $d_\beta^{\mathfrak{N}} \notin \operatorname{Mod}^* \dot{\forall}x\varphi$, dolayısıyla

$$\varphi \not\Vdash^* \dot{\forall}x\varphi$$

buna karşın (3.7.5)(1)'den $\varphi \Vdash \dot{\forall}x\varphi$. Unutmayalım: $\mathfrak{N} \notin \operatorname{Mod}\varphi$ ve $\mathfrak{N} \notin \operatorname{Mod}\dot{\forall}x\varphi$! ▲

Önerme 3.7.8 *Her $\varphi, \psi \in \operatorname{Fm} L$ ve her $x \in \mathcal{V}$ için*

$$\varphi \to \psi \Vdash \dot{\forall}x\varphi \to \psi$$

ve

$$\varphi \to \psi \Vdash \varphi \to \dot{\exists}x\psi.$$

Kanıt. $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod}(\varphi \to \psi)$ ise her $d_\beta^{\mathfrak{A}} \in D^{\mathfrak{A}}$ için $d_\beta^{\mathfrak{A}}(\varphi \to \psi) = 1$, dolayısıyla $d_\beta^{\mathfrak{A}}(\varphi) \le d_\beta^{\mathfrak{A}}(\psi)$ olur. Buradan, $\beta_x^{\beta(x)} = \beta$ olduğunu gözetirsek

$$d_\beta^{\mathfrak{A}}(\dot{\forall}x\varphi) = \min_{a \in A} d_{\beta_x^a}^{\mathfrak{A}}(\varphi) \le d_{\beta_x^{\beta(x)}}^{\mathfrak{A}}(\varphi) = d_\beta^{\mathfrak{A}}(\varphi) \le d_\beta^{\mathfrak{A}}(\psi) \text{ ve}$$
$$d_\beta^{\mathfrak{A}}(\varphi) = d_{\beta_x^{\beta(x)}}^{\mathfrak{A}}(\varphi) \le d_{\beta_x^{\beta(x)}}^{\mathfrak{A}}(\psi) \le \max_{a \in A} d_{\beta_x^a}^{\mathfrak{A}}(\psi) = d_\beta^{\mathfrak{A}}(\dot{\exists}x\psi)$$

elde edilir ki bunlar $d_\beta^{\mathfrak{A}}(\dot{\forall}x\varphi \to \psi) = 1$ ve $d_\beta^{\mathfrak{A}}(\varphi \to \dot{\exists}x\psi) = 1$ demektir. ■

Teorem 3.7.9 *$\varphi, \psi, \eta \in \operatorname{Fm} L$ ve $\Gamma, \Theta, \Omega \subseteq \operatorname{Fm} L$ olmak üzere:*

1. $\Gamma \Vdash \varphi \curlywedge \psi \iff \Gamma \Vdash \varphi$ *ve* $\Gamma \Vdash \psi$.
2. ***Ayırma (MP):*** $\Gamma \Vdash \varphi$ *ve* $\Gamma \Vdash \varphi \to \psi$ *ise* $\Gamma \Vdash \psi$.
3. ***Zincir Kuralı:*** $\Gamma \Vdash \varphi \to \psi$ *ve* $\Gamma \Vdash \psi \to \eta$ *ise* $\Gamma \Vdash \varphi \to \eta$.
4. ***Geçişlilik:*** $\Gamma \Vdash \Theta$ *ve* $\Theta \Vdash \Omega$ *ise* $\Gamma \Vdash \Omega$.

Sonuç 3.7.10 *Aşağıdaki önermeler denktirler:*

1. $\Gamma, \varphi_1, \dots, \varphi_n \Vdash \psi$.
2. $\Gamma, \varphi_1 \curlywedge \cdots \curlywedge \varphi_n \Vdash \psi$.

Kanıt. (1) $\operatorname{Mod}(\varphi \curlywedge \psi) = \operatorname{Mod}\varphi \cap \operatorname{Mod}\psi$ eşitliği (1)'i verir.

(2) $\Gamma \Vdash \varphi$ ve $\Gamma \Vdash \varphi \to \psi$ olsun. Dolayısıyla $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ için $\mathfrak{A} \models \Gamma$ ise $\mathfrak{A} \models \varphi$ ve $\mathfrak{A} \models \varphi \to \psi$ olur ki bu (3.5.29) ile $\mathfrak{A} \models \psi$ bağıntısını verir. Her $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod}\Gamma$ için $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod}\psi$ elde ederiz ki bu $\Gamma \Vdash \psi$ demektir. Kalanları benzer biçimde kanıtlamayı okura bırakıyoruz. ■

Not 3.7.11 Önemli uyarı: Her φ için elbette $\varphi \Vdash \varphi$ ve $\varphi \Vdash^* \varphi$. Şimdi $\Gamma := \{\varphi\}$, $x \in \operatorname{Sb}\Gamma$ örneğin $\operatorname{Sb}\varphi = \{x\}$ olsun. Örneğin φ formülü $\mathfrak{N}$ yapısında yorumlanabilen, $\varphi^{\mathfrak{N}}(x)$ yorumu "x bir çift sayıdır" olan formülse $\beta \in N^{\mathfrak{N}}$ nesnelemesinde $\beta(x) = 2$ seçilirse $\mathfrak{N} \models \varphi[\beta]$ iken $\mathfrak{N} \not\models \dot\forall x\varphi[\beta]$! Dolayısıyla $\Gamma \Vdash^* \varphi$ ancak $\Gamma \not\Vdash^* \dot\forall x\varphi$. Buna karşın her $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ ve her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ için aşağıdaki teorem geçerlidir. ▲

Teorem 3.7.12 (Genelleştirme Teoremi) *$\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$, $\varphi, \psi \in \operatorname{Fm} L$ ve $x \in \mathcal{V}$ olsun.*

$$\Gamma \Vdash \varphi \iff \Gamma \Vdash \dot\forall x\varphi \iff \Gamma \Vdash \varphi^{\dot\forall}.$$

Sonuç 3.7.13 $\Gamma^{\dot\forall} := \{\psi^{\dot\forall} \mid \psi \in \Gamma\}$ *olmak üzere*

$$\Gamma \Vdash \varphi \iff \Gamma^{\dot\forall} \Vdash \varphi^{\dot\forall}.$$

Kanıt. Teorem doğrudan $\operatorname{Mod}\varphi = \operatorname{Mod}\dot\forall x\varphi = \operatorname{Mod}\varphi^{\dot\forall}$ eşitliğinden çıkar. Ek ise bu ve $\operatorname{Mod}\Gamma = \operatorname{Mod}\Gamma^{\dot\forall}$ eşitliğinden çıkar. ■

Not 3.7.14 $\operatorname{Sav} L$ kümesinde çalıştığımız sürece $\Vdash$ ve $\Vdash^*$ mantıksal çıkarımlarının örtüştüğünü biliyoruz. (3.7.13) ise bizim seçtiğimiz mantıksal çıkarım kavramı için "Γ formül kümesinden mantıksal olarak φ formülünün çıkması"nın "$\Gamma^{\dot\forall}$ savlar kümesinden $\varphi^{\dot\forall}$ savının çıkması" na denk olduğunu söyler. Bu nedenle kimi yazar salt $\operatorname{Sav} L$'de çalışır. ▲

(3.7.3)(9), (10) ve ayırma ile doğrudan aşağıdaki önerme elde edilir:

Önerme 3.7.15 *$\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L, \varphi, \psi \in \operatorname{Fm} L$ ve $x \in \mathcal{V}$ olmak üzere*

1. *$\Gamma \Vdash \varphi \to \psi$ ise $\Gamma \Vdash \varphi \to \dot\forall x\psi$, $x \notin \operatorname{Sb}\varphi$.*
2. *$\Gamma \Vdash \varphi \to \psi$ ise $\Gamma \Vdash \dot\exists x\varphi \to \psi$, $x \notin \operatorname{Sb}\psi$.*

Aşağıdaki mantıksal çıkarımları benzer biçimde kanıtlamayı okura bırakıyoruz:

(1) $\varphi \Vdash \dot{\exists} x\varphi$
(2) $\dot{\forall} x\varphi \Vdash \dot{\exists} x\varphi$.
(3) $\dot{\forall} x\varphi \curlyvee \dot{\forall} x\psi \Vdash \dot{\forall} x\,(\varphi \curlyvee \psi)$.
(4) $\dot{\exists} x(\varphi \curlywedge \psi) \Vdash \dot{\exists} x\varphi \curlywedge \dot{\exists} x\psi$.
(5) $\dot{\forall} x\,(\varphi \to \psi) \Vdash \dot{\forall} x\varphi \to \dot{\forall} x\psi$.
(6) $\dot{\forall} x\,(\varphi \to \psi) \Vdash \dot{\exists} x\varphi \to \dot{\exists} x\psi$.
(7) $\dot{\exists} y\dot{\forall} x\varphi \Vdash \dot{\forall} x\dot{\exists} y\varphi$.

Verdiğimiz bu çıkarımlar tek yönlüdürler. Bu çıkarımların ters yönlerinin doğru olmadığı karşı örnekler bulmasını okura öneririz. Biz iki karşı örnek vermekle yetineceğiz.

(3)'ün ters yönüne bir karşı örnek verelim. Örneğin $\mathfrak{N}$ doğal sayılar yapısında $\varphi^{\mathfrak{N}}(x)$ formülü "x tek sayıdır" ve $\psi^{\mathfrak{N}}(x)$ ise "x çift sayıdır" anlamına gelsin. φ ve ψ biçimsel formüllerini bulmayı okura bırakıyoruz. Bu durumda $\forall x\varphi^{\mathfrak{N}}$ ve $\forall x\psi^{\mathfrak{N}}$ önermeleri yanlıştırlar, buna karşın $\forall x\left(\varphi^{\mathfrak{N}} \vee \psi^{\mathfrak{N}}\right)$ doğrudur, dolayısıyla $\dot{\forall} x\,(\varphi \curlyvee \psi) \nVdash \dot{\forall} x\varphi \curlyvee \dot{\forall} x\psi$.

Bir karşı örnek de (7)'ye verelim. Bu kez $\mathfrak{N}$ yapısında $\varphi^{\mathfrak{N}} = (x < y)$ olsun. $\forall x\exists y\,(x < y)$ önermesi doğrudur. Buna karşın $\exists y\forall x\,(x < y)$ önermesi yanlıştır. $\varphi^{\mathfrak{N}}$ formülünü biçimselleştirecek bir dil ve biçimselleştiren φ formülünü bulmayı okura bırakıyoruz. Elbette $\dot{\forall} x\dot{\exists}\varphi \nVdash \dot{\exists}\dot{\forall} x\varphi$.

Not 3.7.16 Önermeler mantığında son derece kullanışlı bir çıkarın teoremimiz vardır: $\Gamma, \varphi \Vdash_{\mathrm{om}} \psi \iff \Gamma \Vdash_{\mathrm{om}} \varphi \to \psi$. İkinci bölümü atlayan okur, bunu ya kendisi kolayca kanıtlar, ya da (1.6).cı kesime bakabilir. Benzeri yüklem mantığında da geçerli midir, dd.

$$\Gamma, \varphi \Vdash \psi \iff \Gamma \Vdash \varphi \to \psi \ ?$$

Bunun $\Longleftarrow$ yönünün her zaman doğru olduğu (MP) ile kolayca görülür. $\Longrightarrow$ yönü her zaman doğru değildir. Öreğin φ (3.7.11)'deki formül ve $\Gamma = \{\varphi\}$ olsun. $\varphi \Vdash \dot{\forall} x\varphi$ ancak $\nVdash \varphi \to \dot{\forall} x\varphi$! Gerçekten de $\beta \in N^{\mathfrak{N}}$ nesnelemesi $\beta(x) = 2$ koşulunu sağlıyorsa $\mathfrak{N} \not\models (\varphi \to \dot{\forall} x\varphi)\,[\beta]$. Aşağıda $\varphi \in \operatorname{Sav} L$ ise $\Longrightarrow$ yönünün de doğru olduğunu kanıtlayacağız. ▲

Teorem 3.7.17 (Çıkarım Teoremi) $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ *ve* $\varphi, \psi \in \operatorname{Fm} L$ *olsunlar.*

1. $\Gamma \Vdash \varphi \to \psi$ *ise* $\Gamma, \varphi \Vdash \psi$.
2. $\Gamma, \varphi \Vdash \psi$ *ve* $\varphi \in \operatorname{Sav} L$ *ise* $\Gamma \Vdash \varphi \to \psi$.
3. $\sigma \in \operatorname{Sav}$ *ise* $\Gamma, \sigma \Vdash \psi \iff \Gamma \Vdash \sigma \to \psi$.

Kanıt. (1) $\Gamma \Vdash \varphi \to \psi$ ise özellikle $\Gamma, \varphi \Vdash \varphi \to \psi$. Bu ve $\Gamma, \varphi \Vdash \varphi$ ve (MP)'den $\Gamma, \varphi \Vdash \psi$.

(2) $\Gamma, \varphi \Vdash \psi$ ve $\varphi \in \operatorname{Sav} L$ olsun. Bu her $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ için $\mathfrak{A} \models \Gamma$ ve $\mathfrak{A} \models \varphi$ ise $\mathfrak{A} \models \psi$ demektir. Şimdi $\mathfrak{B} \in \operatorname{Yap} L$ ve $\mathfrak{B} \models \Gamma$ olsun. $\varphi \in \operatorname{Sav} L$ olduğundan (a) ya $\mathfrak{B} \models \varphi$, ki bu durumda az önce söylenenden $\mathfrak{B} \models \psi$, dolayısıyla $\mathfrak{B} \models \varphi \to \psi$ olur, (b) ya da $\mathfrak{B} \models \neg\varphi$, ki bu durumda her $\beta \in N^{\mathfrak{B}}$ için $d^{\mathfrak{B}}_{\beta}(\varphi) = 0$, dolayısıyla $d^{\mathfrak{B}}_{\beta}(\varphi \to \psi) = 1$, dd. $\mathfrak{B} \models \varphi \to \psi$ olur. $\mathfrak{B} \in \operatorname{Mod}\Gamma$ keyfi seçildiğinden $\Gamma \Vdash \varphi \to \psi$ elde edilir.

(3) ise doğrudan (1) ve (2)'den çıkar. ■

Sonuç 3.7.18 $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$, $\psi \in \operatorname{Fm} L$ *ve* $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \operatorname{Sav} L$ *için*

$$\Gamma, \sigma_1, \ldots, \sigma_n \Vdash \psi \iff \Gamma \Vdash \sigma_1 \to \sigma_2 \to \cdots \to \sigma_n \to \psi.$$

Kanıt. (2.6.11)'in kanıtının aynısı! ■

Tanım 3.7.19 $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ *olsun.* $\operatorname{Mod}\Gamma \neq \emptyset$ *ise* Γ ***anlamsal tutarlıdır*** *veya* ***anlamsal çelişkisizdir*** *denir. Diğer durumda, dd.* $\operatorname{Mod}\Gamma = \emptyset$ *ise* Γ ***anlamsal tutarsızdır*** *veya* ***anlamsal çelişkilidir*** *denir.* $\Gamma = \{\varphi\}$ *anlamsal tutarsız ise* φ ***anlamsal tutarsızdır*** *veya* ***anlamsal çelişkidir*** *denir.*

Not 3.7.20 $\Vdash^*$ mantıksal çıkarımını kullananlar için Γ'nın anlamsal tutarlı olması $\operatorname{Mod}^*\Gamma \neq \emptyset$ olarak açıklanır; bu bizim terimlerle Γ'nın sağlanabilir olmasına denktir. ▲

Γ'nın anlamsal tutarlı olması en az bir $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ için $\Gamma \subseteq \operatorname{Dog}\mathfrak{A}$ olması, dd. en az bir $\mathfrak{A}$ yapısında Γ'nın tüm formüllerinin doğru olması demektir.

Teorem 3.7.21 *Aşağıdaki önermeler eşdeğerlidir:*

1. Γ *anlamsal tutarlıdır.*
2. *En az bir* $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ *için* $\operatorname{Mc}\Gamma \subseteq \operatorname{Dog}\mathfrak{A}$.
3. *Her* $\sigma \in \operatorname{Sav} L$ *için:* $\Gamma \nVdash \sigma$ *veya* $\Gamma \nVdash \neg\sigma$.
4. $\Gamma \nVdash \bot$.
5. $\operatorname{Mc}\Gamma \neq \operatorname{Fm} L$.

Kanıt. (1) $\Longrightarrow$ (2): En az bir $\mathfrak{A}$ için $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod}\Gamma$. Tanım gereği her $\varphi \in \operatorname{Mc}\Gamma$ için $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod}\varphi$, dd. $\varphi \in \operatorname{Dog}\mathfrak{A}$.

(2) $\Longrightarrow$ (3): $\operatorname{Mc}\Gamma \subseteq \operatorname{Dog}\mathfrak{A}$ ve σ bir sav olsun. $\Gamma \subseteq \operatorname{Mc}\Gamma$ olduğundan $\Gamma \subseteq \operatorname{Dog}\mathfrak{A}$ olur. (3) doğru değilse en az bir $\sigma \in \operatorname{Sav} L$ için $\Gamma \Vdash \sigma$ ve $\Gamma \Vdash \neg\sigma$ olur ki bu $\sigma, \neg\sigma \in \operatorname{Dog}\mathfrak{A}$ demektir; bu olamaz!

(3) $\Longrightarrow$ (4): θ savı ile $\bot = \theta \curlywedge \neg\theta$. (4) doğru olmasın, dd. $\Gamma \Vdash \bot$ olsun. (3.15)(5) ile $\bot \Vdash \theta, \neg\theta$ dolayısıyla geçişli özellikten $\Gamma \Vdash \theta, \neg\theta$. Bu ise (3)'ün doğru olmaması demektir.

(4) $\Longrightarrow$ (5): $\Gamma \nvdash \bot$ ise $\bot \notin \operatorname{Mc}\Gamma$, dolayısıyla $\operatorname{Mc}\Gamma \neq \operatorname{Fm} L$.

(5) $\Longrightarrow$ (1): (1) doğru değilse $\operatorname{Mod}\Gamma = \emptyset$ olacağından her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ için $\Gamma \vDash \varphi$, dolayısıyla $\operatorname{Mc}\Gamma = \operatorname{Fm} L$ olur ve bkb. ■

(3) özelliği şöyle de dile getirilebilir:

$$\Gamma \text{ anlamsal tutarlıdır} \iff \sigma \text{ sav ise “}\Gamma \vDash \sigma \text{ ve } \Gamma \vDash \neg\sigma\text{” olamaz.} \quad (3.16)$$

(3.7.21)'in önermelerinin olumsuzlarına geçersek şu denklikleri elde ederiz:

$$\begin{aligned} \Gamma \text{ anlamsal tutarsızdır} &\iff \forall \mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L\ (\operatorname{Mc}\Gamma \nsubseteq \operatorname{Dog}\mathfrak{A}) \\ &\iff \exists \sigma \in \operatorname{Sav} L\ (\Gamma \vDash \sigma \wedge \Gamma \vDash \neg\sigma) \\ &\iff \Gamma \vDash \bot \iff \operatorname{Mc}\Gamma = \operatorname{Fm} L. \end{aligned}$$

Önerme 3.7.22 *Her $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ ve her $\sigma \in \operatorname{Sav} L$ için:*

1. $\Gamma \vDash \sigma \iff \Gamma \cup \{\neg\sigma\}$ anlamsal tutarsızdır (çelişkilidir).

2. $\Gamma \vDash \neg\sigma \iff \Gamma \cup \{\sigma\}$ anlamsal tutarsızdır (çelişkilidir).

3. Γ anlamsal tutarlı ise $\Gamma \cup \{\sigma\}$ ve $\Gamma \cup \{\neg\sigma\}$'dan en az biri anlamsal tutarlıdır.

Kanıt. (1) $\Longrightarrow$: $\Gamma \vDash \sigma$ olsun. Dolayısıyla $\Gamma, \neg\sigma \vDash \sigma$ ve $\Gamma, \neg\sigma \vDash \neg\sigma$ olur. Bu ve (3.7.21)(3)'ten $\Gamma \cup \{\neg\sigma\}$ anlamsal tutarsızdır.

(1) $\Longleftarrow$: $\Gamma \cup \{\neg\sigma\}$ anlamsal tutarsız olsun. (3.7.21)(5)'ten $\operatorname{Mc}(\Gamma \cup \{\neg\sigma\}) = \operatorname{Fm} L$, özellikle $\Gamma \cup \{\neg\sigma\} \vDash \sigma$ elde edilir. $\neg\sigma \in \operatorname{Sav} L$ olduğundan Çıkarım Teoremi ile $\Gamma \vDash \neg\sigma \to \sigma$ elde edilir. Bunu ve $(\neg\sigma \to \sigma) \to \sigma$ dosdoğrusundan elde edeceğimiz $\Gamma \vDash (\neg\sigma \to \sigma) \to \sigma$ bağıntısını ele alırsak (MP) bize $\Gamma \vDash \sigma$ çıkarımını verir.

(2) aynen (1) gibi kanıtlanır.

(3): $\Gamma \cup \{\sigma\}$ ve $\Gamma \cup \{\neg\sigma\}$'nin her ikisi de anlamsal tutarsız olsunlar. Teoremimizin (1) ve (2)'si bize $\Gamma \vDash \neg\sigma$ ve $\Gamma \vDash \sigma$ bağıntılarını verir. Ancak bu sonuçlar Γ'nın anlamsal tutarlı olmasıyla bağdaşmaz(bkz.(3.16)) ■

(3.7.22)(1) aşağıdaki önermeye denktir: Her σ savı için

$$\Gamma \nvdash \sigma \iff \Gamma \cup \{\neg\sigma\} \text{ anlamsal tutarlıdır.}$$

Tanım 3.7.23 $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ *kümesi* ***anlamsal tamdır*** $:\iff$ *Her $\sigma \in \operatorname{Sav} L$ için $\Gamma \vDash \sigma$ veya $\Gamma \vDash \neg\sigma$, dd.*

$$\sigma \in \operatorname{Mc}\Gamma \text{ veya } \neg\sigma \in \operatorname{Mc}\Gamma.$$

Her şeyden önce $\operatorname{Mc}(\operatorname{Mc}\Gamma) = \operatorname{Mc}\Gamma$ olduğundan

$$\Gamma \text{ anlamsal tamdır} \Longrightarrow \operatorname{Mc}\Gamma \text{ anlamsal tamdır.}$$

Herhangi bir σ savı için $\operatorname{Th}\mathfrak{A} \nVdash \sigma$ ise $\sigma \notin \operatorname{Th}\mathfrak{A}$, dd. $\mathfrak{A} \not\models \sigma$ olur. Öyleyse $\mathfrak{A} \models \neg\sigma$, dd. $\neg\sigma \in \operatorname{Th}\mathfrak{A}$, dolayısıyla $\operatorname{Th}\mathfrak{A} \Vdash \neg\sigma$ olur. Özetle $\operatorname{Th}\mathfrak{A}$ anlamsal tamdır.

Lemma 3.7.24 *Γ_1 ve Γ_2 çıkarımsal kapalı, anlamsal tam ve anlamsal tutarlı olsunlar. Bu koşullarda ayrıca $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ ise $\Gamma_1 = \Gamma_2$.*

Kanıt. $\sigma \notin \Gamma_1 = \operatorname{Mc}\Gamma_1$ olsun. $\neg\sigma \in \Gamma_1$ olur. Varsayımdan ise $\neg\sigma \in \Gamma_2$ ve Γ_2 anlamsal tutarlı olduğundan $\sigma \notin \Gamma_2$. Dolayısıyla $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1$ ve bkb. ■

Önerme 3.7.25 *$\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ kümesinin anlamsal tam olması için gerek ve yeter koşul en az bir $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ için $\operatorname{Dog}\mathfrak{A} \subseteq \operatorname{Mc}\Gamma$ olmasıdır.*

Sonuç 3.7.26 *Γ anlamsal tamsa her $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod}\Gamma$ için $\operatorname{Mc}\Gamma = \operatorname{Dog}\mathfrak{A}$, dolayısıyla $\operatorname{Mt}\Gamma = \operatorname{Th}\mathfrak{A}$.*

Kanıt. $\Longleftarrow$: $\operatorname{Dog}\mathfrak{A} \subseteq \operatorname{Mc}\Gamma$ olsun. Her σ savı için $\sigma \in \operatorname{Dog}\mathfrak{A}$ veya $\neg\sigma \in \operatorname{Dog}\mathfrak{A}$ olacağından Γ anlamsal tamdır.

$\Longrightarrow$: Γ anlamsal tam olsun. $\operatorname{Mod}\Gamma = \emptyset$ ise $\operatorname{Mc}\Gamma = \operatorname{Fm} L$ olacağından *her* $\mathfrak{A}$ için $\operatorname{Dog}\mathfrak{A} \subseteq \operatorname{Mc}\Gamma$ olur.

Şimdi $\operatorname{Mod}\Gamma \neq \emptyset$ ve $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod}\Gamma$ olsun. Bu durumda $\operatorname{Mc}\Gamma = \operatorname{Dog}\mathfrak{A}$ olduğunu savunuyoruz. Her şeyden önce $\operatorname{Mc}\Gamma \subseteq \operatorname{Dog}\mathfrak{A}$. Buradansa (3.7.24) ile $\operatorname{Mc}\Gamma = \operatorname{Dog}\mathfrak{A}$. Savın kalanı apaçıktır. ■

Not 3.7.27 Γ'nın anlamsal tutarlı ise bir modeli olduğunu, Gödel tamlık teoreminden ileride öğreneceğiz. Bu bilgi çerçevesinde şunu söyleyebiliriz: Γ anlamsal tutarlı ise anlamsal tam olması için gerek ve yeter koşul en az bir $\mathfrak{A}$ yapısı ile $\operatorname{Mc}\Gamma = \operatorname{Dog}\mathfrak{A}$ olmasıdır. ▲

3.8 Anlamsal Denklik

Tanım 3.8.1 *$\varphi, \psi \in \operatorname{Fm} L$ olsun.*

$$\begin{aligned} \varphi \equiv \psi \quad &:\Longleftrightarrow \quad \models (\varphi \leftrightarrow \psi) \\ &\Longleftrightarrow \quad \Vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)\,. \end{aligned}$$

*$\varphi \equiv \psi$ ise φ ve ψ **anlamsal** (veya **mantıksal**) **denktir** denir.*

Daha açık yazılımla

$$\varphi \equiv \psi \iff \text{Her } d \in D_L \text{ için } d(\varphi) = d(\psi).$$

Bu tanımda L dilini vurgulamak gerekirse $\equiv$ imi yerine $\equiv_L$ yazacağız. Her şeyden önce

$$\varphi \equiv_{\mathrm{om}} \psi \text{ ise } \varphi \equiv \psi$$

olduğu apaçıktır.

Önermeler mantığında $\equiv$ için kanıtlanan teoremlerin benzerleri şimdi $\mathrm{Fm}\, L$'de açıkladığımız $\equiv$ içinde geçerlidir. Biz (2.4.15) ve (2.4.17)'nin benzerlerini vermekle yetineceğiz.

Önerme 3.8.2 *Her şeyden önce $\equiv$ bağıntısı $\mathrm{Fm}\, L$ kümesinde bir denklik bağıntısıdır. Ayrıca $\varphi, \varphi', \psi, \psi' \in \mathrm{Fm}\, L$ ve $\varphi \equiv \psi$, $\varphi' \equiv \psi'$ ise*

(1) $\neg\varphi \equiv \neg\psi$,

(2) $\varphi \diamondsuit \varphi' \equiv \psi \diamondsuit \psi'$, $\diamondsuit \in \{\curlywedge, \curlyvee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,

(3) $\dot{\forall} x\varphi \equiv \dot{\forall} x\psi$, $x \in \mathcal{V}$,

(4) $\dot{\exists} x\varphi \equiv \dot{\exists} x\psi$, $x \in \mathcal{V}$.

Kanıt. (1) ve (2) önermeler mantığında olduğu gibi kanıtlanır. (3)'ün kanıtını verelim. $d = d^{\mathfrak{A}}_{\beta} \in D_L$ *keyfi* verilsin.

$$d(\dot{\forall} x\varphi) \overset{def}{=} \min_{a \in A} d^{\mathfrak{A}}_{\beta^a_x}(\varphi) \overset{vrs}{=} \min_{a \in A} d^{\mathfrak{A}}_{\beta^a_x}(\psi) = d(\dot{\forall} x\psi)$$

ile işimiz biter. (4) ise $\dot{\exists}$'ın tanımı ve (1)'den çıkar. ■

Önerme 3.8.3 *φ formülü ψ formülünün bir altformülü ve $\varphi \equiv \varphi'$ olsun. ψ' formülü ψ formülünden, geçtiği bazı yerlerde φ yerine φ' yazılarak elde edilmişse $\psi \equiv \psi'$.*

Kanıt. Önerme (FTK) ile kanıtlanacaktır.

1. ψ atomik formül olsun. Bu durumda ψ'nin yegane altformülü kendisi olduğundan $\varphi = \psi$ ve $\psi' = \varphi'$ olur ve $\varphi \equiv \varphi'$ olduğundan $\psi \equiv \psi'$.

2. Önerme η için kanıtlanmış ve $\psi = \neg\eta$ olsun. $\varphi = \psi$ ise sav aşikâr. φ eğer η'nın bir altformülü ise ψ' formülü $\neg\eta'$ tipindedir ve burada η' formülü η'da geçtiği bazı yerlerde φ yerine φ' yazarak elde edilmiştir. Varsayımdan dolayı $\eta \equiv \eta'$ olduğundan her $d \in D_L$ için

$$d(\psi) = 1 - d(\eta) \overset{vrs}{=} 1 - d(\eta') = d(\psi')$$

olur. Dolayısıyla $\psi \equiv \psi'$.

3. $\psi = \eta \rightarrow \kappa$ ve önerme η ve κ için kanıtlanmış olsunlar. η', κ' ise sırasıyla η, κ formüllerinde bazı yerlerde φ yerine φ' yazarak elde edilmiş olsunlar ve $\psi' = \eta' \rightarrow \kappa'$ olsun. Her $d \in D_L$ için

$$d(\psi) = \max\{1 - d(\eta), d(\kappa)\} \overset{vrs}{=} \max\left\{1 - d(\eta'), d(\kappa')\right\} = d(\psi')$$

olduğundan $\psi \equiv \psi'$.

4. $\psi = \dot\forall x\eta$ ve önerme η için kanıtlanmış olsun. η' formülü, η formülünde geçtiği bazı yerlerde φ yerine φ' yazarak elde edilmiş olsun. $d = d^{\mathfrak{A}}_{\beta} \in D_L$ keyfi verildiğinde, $\psi' = \dot\forall x\eta'$ olmak üzere

$$d(\psi) = \min_{a\in A} d^{\mathfrak{A}}_{\beta^a_x}(\eta) \overset{vrs}{=} \min_{a\in A} d^{\mathfrak{A}}_{\beta^a_x}(\eta') = d(\dot\forall x\eta') = d(\psi')$$

olduğundan işimiz biter. ■

İkinci bölümde 1.4.3 alt kesimde verdiğimiz 16 denklik, $\varphi \equiv_{\mathrm{om}} \psi$ ise $\varphi \equiv \psi$ olduğundan, $\mathrm{Fm}\, L$'de de aynen geçerlidir. Bu listeyi $\dot\forall$ ve $\dot\exists$ içeren başka denkliklerle uzatacağız.

Temel Mantıksal Denklikler

D17	$\neg\dot\forall x\varphi \equiv \dot\exists x\neg\varphi$.	
D18	$\neg\dot\exists x\varphi \equiv \dot\forall x\neg\varphi$.	
D19	$\dot\forall x\,(\varphi \curlywedge \psi) \equiv \dot\forall x\varphi \curlywedge \dot\forall x\psi$,	
D20	$\dot\exists x\,(\varphi \curlyvee \psi) \equiv \dot\exists x\varphi \curlyvee \dot\exists x\psi$.	
D21	$\forall x\forall y\varphi \equiv \forall y\forall x\varphi$.	
D22	$\exists x\exists y\varphi \equiv \exists y\exists x\varphi$.	
D23	$\dot\forall x\varphi \equiv \varphi$ ve $\dot\exists x\varphi \equiv \varphi$	$x \notin \mathrm{Sb}\,\varphi$.
D24	$\dot\forall x\,(\varphi \curlywedge \psi) \equiv \varphi \curlywedge \dot\forall x\psi$	$x \notin \mathrm{Sb}\,\varphi$.
D25	$\dot\forall x\,(\varphi \curlyvee \psi) \equiv \varphi \curlyvee \dot\forall x\psi$	$x \notin \mathrm{Sb}\,\varphi$.
D26	$\dot\exists x\,(\varphi \curlywedge \psi) \equiv \varphi \curlywedge \dot\exists x\psi$	$x \notin \mathrm{Sb}\,\varphi$.
D27	$\dot\exists x\,(\varphi \curlyvee \psi) \equiv \varphi \curlyvee \dot\exists x\psi$	$x \notin \mathrm{Sb}\,\varphi$
D28	$\dot\forall x\,(\varphi \to \psi) \equiv \dot\exists x\varphi \to \psi$	$x \notin \mathrm{Sb}\,\psi$.
D29	$\dot\exists x\,(\varphi \to \psi) \equiv \dot\forall x\varphi \to \psi$	$x \notin \mathrm{Sb}\,\psi$.
D30	$\dot\forall x\,(\varphi \to \psi) \equiv \varphi \to \dot\forall x\psi$	$x \notin \mathrm{Sb}\,\varphi$.
D31	$\dot\exists x\,(\varphi \to \psi) \equiv \varphi \to \dot\exists x\psi$	$x \notin \mathrm{Sb}\,\varphi$.
D32	$\dot\forall x\dot\exists y\,(\varphi \curlywedge \psi) \equiv \dot\forall x\varphi \curlywedge \dot\exists x\psi$	$y \notin \mathrm{Sb}\,\varphi$ ve $x \notin \mathrm{Sb}\,\psi$
D33	$\dot\forall x\dot\exists y\,(\varphi \curlyvee \psi) \equiv \dot\forall x\varphi \curlyvee \dot\exists y\psi$	$y \notin \mathrm{Sb}\,\varphi$ ve $x \notin \mathrm{Sb}\,\psi$
D34	$\dot\exists x\dot\forall y(\varphi \to \psi) \equiv (\dot\forall x\varphi) \to (\dot\forall y\psi)$	$y \notin \mathrm{Sb}\,\varphi$ ve $x \notin \mathrm{Sb}\,\psi$
D35	$\dot\forall x\dot\exists y\,(\varphi \to \psi) \equiv (\dot\exists x\varphi) \to (\dot\exists y\psi)$	$y \notin \mathrm{Sb}\,\varphi$, $x \notin \mathrm{Sb}\,\psi$
D36	$\dot\forall x\dot\exists y\,(\varphi \curlywedge \psi) \equiv \dot\exists y\dot\forall x\,(\varphi \curlywedge \psi)$.	$y \notin \mathrm{Sb}\,\varphi$ ve $x \notin \mathrm{Sb}\,\psi$
D37	$\dot\forall x\dot\exists y\,(\varphi \curlyvee \psi) \equiv \dot\exists y\dot\forall x\,(\varphi \curlyvee \psi)$.	$y \notin \mathrm{Sb}\,\varphi$ ve $x \notin \mathrm{Sb}\,\psi$
D38	$\dot\forall x\dot\exists y\,(\varphi \to \psi) \equiv \dot\exists y\dot\forall x\,(\varphi \to \psi)\,.$	$y \notin \mathrm{Sb}\,\varphi$ ve $x \notin \mathrm{Sb}\,\psi$

Bu denkliklerin kanıtlarını tek tek vermeyeceğiz, tümü tanımlardan doğrudan görülür.

Örnek 3.8.4 Daha önce kazanılan denklikler kullanılarak yeni denkliklerin kanıtı kolaylaştırılabilir. Örnek olarak (D34) ve (D35)'i kanıtlayalım.

$$\dot{\exists}x\dot{\forall}y\,(\varphi\to\psi)\overset{(D30)}{\equiv}\dot{\exists}x\left(\varphi\to\dot{\forall}y\psi\right)\overset{(D29)}{\equiv}\dot{\forall}x\varphi\to\dot{\forall}y\psi.$$

$$\dot{\forall}x\dot{\exists}y\,(\varphi\to\psi)\overset{(D11)}{\equiv}\dot{\forall}x\dot{\exists}y\,(\neg\psi\to\neg\varphi)\overset{(D29)}{\equiv}\dot{\forall}x\left(\dot{\forall}y\neg\psi\to\neg\varphi\right)$$

$$\overset{(D30)}{\equiv}\dot{\forall}y\neg\psi\to\dot{\forall}x\neg\varphi\overset{(D11)}{\equiv}\neg\dot{\forall}x\neg\varphi\to\neg\dot{\forall}y\neg\psi\overset{def}{\equiv}\dot{\exists}x\varphi\to\dot{\exists}y\psi.$$ ▲

Mantıksal denklikleri kolayca kanıtlayabileceğimiz bir başka Boole cebiri vereceğiz. Söz konusu denklikte yalnızca φ ve ψ formülleri bulunsun ve $\deg\varphi\cup\deg\psi\subseteq\{x_1,\ldots,x_n\}$ olsun. Burada her ne kadar $x_1,\ldots,x_n$ değişkenlerinin seçiminde bir belirsizlik varsa da, aşağıdaki irdelemelerde bunun hiç de önemli olmadığı kolayca görülür. $\mathfrak{A}$ bir L yapısı olmak üzere $\varphi,\psi\in\operatorname{Fm}L$ formülleriyle A^n kümesinde

$$R^{\mathfrak{A}}_{\varphi}:=\{(a_1,\ldots,a_n)\in A^n\,|\,\mathfrak{A}\models\varphi\,[a_1,\ldots,a_n]\}$$
$$R^{\mathfrak{A}}_{\psi}:=\{(a_1,\ldots,a_n)\in A^n\,|\,\mathfrak{A}\models\psi\,[a_1,\ldots,a_n]\}$$

bağıntılarını tanımlayalım. Bu durumda

$$\varphi\equiv\psi\iff\text{Her }\mathfrak{A}\in\operatorname{Yap}L\text{ için }R^{\mathfrak{A}}_{\varphi}=R^{\mathfrak{A}}_{\psi}$$

olduğu apaçıktır. Eğer ayrıca φ bir sav ise φ'nin $\mathfrak{A}$'da doğru olması $R^{\mathfrak{A}}_{\varphi}=A^n$ ve $\mathfrak{A}$'da yanlış olması ise $R^{\mathfrak{A}}_{\varphi}=\emptyset$ olmasına denktir.Ayrıca

$$R^{\mathfrak{A}}_{\neg\varphi}=A^n\backslash R^{\mathfrak{A}}_{\varphi}=\left(R^{\mathfrak{A}}_{\varphi}\right)^c$$
$$R^{\mathfrak{A}}_{\varphi\wedge\psi}=R^{\mathfrak{A}}_{\varphi}\cap R^{\mathfrak{A}}_{\psi}$$
$$R^{\mathfrak{A}}_{\varphi\vee\psi}=R^{\mathfrak{A}}_{\varphi}\cup R^{\mathfrak{A}}_{\psi}$$
$$R^{\mathfrak{A}}_{\varphi\to\psi}=R^{\mathfrak{A}}_{\neg\varphi}\cup R^{\mathfrak{A}}_{\psi}=(R^{\mathfrak{A}}_{\varphi})^c\cup R^{\mathfrak{A}}_{\psi}$$

olduğu kolayca görülür. Okura bazı denklikleri $\mathcal{P}(A^n)$ Boole cebirini kullanarak kanıtlamasını öneririz.

Teorem 3.8.5 (Bağlı Değişken Değiştirme) *Her $\varphi\in\operatorname{Fm}L$ ve her x,y değişkenleri için $y\notin\operatorname{Sb}\varphi$ ve $\operatorname{Sb}(\varphi,x|y)$ ise*

$$\dot{\forall}x\varphi\equiv\dot{\forall}y\varphi(x|y)\ \text{ve}\ \dot{\exists}x\varphi\equiv\dot{\exists}y\varphi(x|y)\tag{3.17}$$

Sonuç 3.8.6 *$y_1, \ldots, y_n \notin \operatorname{Sb}\varphi$ ve $1 \leq i \leq n$ için $\operatorname{Sb}(\varphi, x_i|y_i)$ ise*

$$\dot\forall x_1 \cdots \dot\forall x_n \varphi \equiv \dot\forall y_1 \cdots \dot\forall y_n \varphi(x_1|y_1, \ldots, x_n|y_n) \text{ ve} \tag{3.18}$$
$$\dot\exists x_1 \cdots \dot\exists x_n \varphi \equiv \dot\exists y_1 \cdots \dot\exists y_n \varphi(x_1|y_1, \ldots, x_n|y_n) \tag{3.19}$$

Özellikle $y_1, \ldots, y_n \notin \deg\varphi$ ise önermenin koşulları sağlanır.

Kanıt. Ek tümevarımla teoremden çıkar; bu nedenle teoremi kanıtlamak yeterlidir. Her $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ ve her $\beta \in D^{\mathfrak{A}}$ için

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \dot\forall y \varphi(x|y)[\beta] &\overset{def}{\iff} \forall a \in A\ (\mathfrak{A} \models \varphi(x|y)[\beta^a_y]) \\
&\overset{(3.11)}{\iff} \forall a \in A\ (\mathfrak{A} \models \varphi[\beta^{ay^{\mathfrak{A}}[\beta]}_{yx}]) \\
&\overset{y \notin \operatorname{Sb}\varphi}{\iff} \forall a \in A\ \mathfrak{A} \models \varphi[\beta^a_x] \\
&\overset{def}{\iff} \mathfrak{A} \models \dot\forall x \varphi[\beta].
\end{aligned}$$

Üçüncü denklikte $y^{\mathfrak{A}}[\beta] = a$ kullanılmıştır. Diğer denklik benzer biçimde kanıtlanır. ■

$\operatorname{Sb}\varphi = \{x, z_1, \ldots, z_m\}$ olmak üzere $y \notin \{x, z_1, \ldots, z_m\}$ ve $\operatorname{Sb}(\varphi, x|y)$ olmak üzere, yalın yazılımla (3.17) şu şekli alır:

$$\dot\forall x \varphi(x, z_1, \ldots, z_m) \equiv \dot\forall y \varphi(y, z_1, \ldots, z_m) \text{ ve}$$
$$\dot\exists x \varphi(x, z_1, \ldots, z_m) \equiv \dot\exists y \varphi(y, z_1, \ldots, z_m)$$

(3.18) ve (3.19)'un yalın yazılımlarını okura bırakıyoruz.

3.9 Biçimsel Kuramlar

Önermeler mantığında biz hepdoğrularla ilgilendik ve verilen bir $\varphi \in \operatorname{Omf} P$ formülünün bir hepdoğru olup olmadığına doğruluk tablosuyla karar verebiliyoruz. Dolayısıyla önermeler mantığı söz konusu olduğunda biçimsel kanıtları kullanmasak da olur.

Örneğin Gruplar Kuramı'nda ne yaparız? L_g Gruplar Kuramı dili ve $\Lambda_g = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ ise Gruplar Kuramı aksiyomları olsun. Biz elbette dersimizde biçimsel L dilinden ve onun yapılarından söz etmeyiz. Ancak bir $\mathfrak{A} = (A, L^{\mathfrak{A}}_g)$ yapısına, bu yapıda $\alpha_1^{\mathfrak{A}}, \alpha_2^{\mathfrak{A}}, \alpha_3^{\mathfrak{A}}$ doğru ise bir gruptur denir, kısaca: $\mathfrak{A}$ bir gruptur $\iff \mathfrak{A} \models \Lambda_g$. Gruplara ilişkin bir önermeye ne zaman "Gruplar Kuramının bir teoremidir" deriz? Tam da bu önerme her $\mathfrak{A}$ grubunda doğru ise. Gruplar Kuramı'na ilişkin önermemizi L_g diliyle biçimselleştirdiğimizde bir $\varphi \in \operatorname{Fm} L_g$ elde ederiz. Böylece φ formülünün Gruplar

Kuramının bir teoremini biçimselleştirmesi için gerek ve yeter koşul her $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L_g$ için $\mathfrak{A} \models \Lambda_g$ ise $\mathfrak{A} \models \varphi$ olmasıdır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \varphi \text{ bir Gruplar Kuramı teoremini biçimselleştirir} &\iff \Lambda_g \Vdash \varphi \\ &\iff \varphi \in \operatorname{Mc} \Lambda_g. \end{aligned}$$

Şimdi ister gruplar, ister halkalar vs... kuramı olsun, yaptığımızı biçimsel dil kullanarak söyleyelim. Kuramımızın bir L biçimsel dili ve bir $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ aksiyomları vardır. Kuramımızın modelleri $\mathfrak{A} \models \Gamma$ koşulunu sağlayan $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ yapıları ve kuramımızın teoremleri ise $\operatorname{Mc} \Gamma$ kümesinin öğeleridir. Ancak $\operatorname{Mc} \Gamma$ kümesinin tanımı $\mathfrak{A}$ yapıları ve onlardaki $D^{\mathfrak{A}}$ değerlemeleri üzerinden yapılan bir anlamsal kavramdır. Genelde $\operatorname{Mod} \Gamma$ bir sınıftır ve çoğu $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod} \Gamma$ yapısı için A bir sonsuz küme, ayrıca $D^{\mathfrak{A}}$ değerlemeleri de sonsuz bir kümedir ve bunlardan ötürü bir φ formülünün her $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod} \Gamma$ modelinde doğru olduğunu, önermeler mantığında olduğu gibi, doğruluk tablosu benzeri bir yaklaşımla belirlememiz olanaksızdır. Bu nedenle birinci dereceden kuramlar söz konusu olduğunda biçimsel yaklaşım, önermeler mantığında olduğu gibi, olmasa da olur bir yaklaşım değildir.

Biçimsel kuramdaki amacımız, yapı, değerlemeler, $\models, \Vdash$ ve benzeri tüm anlamsal kavramları bir kenara bırakıp, önermeler mantığında yaptığımız gibi bu kez $\operatorname{Fm} L$'de $\Vdash$ anlamsal çıkarımın yerini alacak bir $\vdash$ biçimsel çıkarımı açıklamak ve her $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ ve $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ için

$$\Gamma \Vdash \varphi \iff \Gamma \vdash \varphi \tag{3.20}$$

denkliğine ulaşmaktır. Özellikle $\Gamma = \emptyset$ için

$$\models \varphi \iff \Vdash \varphi \iff \vdash \varphi \tag{3.21}$$

olmalıdır.

L bir biçimsel dil ve $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ olmak üzere $\mathcal{K} := (L, \Gamma)$ ikilisine bir *biçimsel kuram*, $\operatorname{Mc} \Gamma$ kümesine ise bu kuramın *mantıksal çıkarımları* veya *anlamsal doğruları* diyelim. Burada ise hiçbir anlamsal kavram kullanmadan $\mathcal{K}$ kuramının bir $\operatorname{Bc} \mathcal{K} = \operatorname{Bc} \Gamma$ biçimsel çıkarımlar kümesini tanımlayacağız ve

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \varphi \in \operatorname{Bc} \Gamma$$

olacaktır. (3.21)'den dolayı her şeyden önce $\operatorname{Bc}_L := \operatorname{Bc} \emptyset = \operatorname{Dog} L$ olmalıdır. $\operatorname{Dog} L$ kümesinin öğelerinin bir kısmını ilksavlarımız olarak seçeceğiz ve bunlara L dilinin *mantıksal ilksavları* diyeceğiz. Her şeyden önce mantıksal ilksavlarımız Bc_L kümesinde olacaklardır.

İlerde ayrıntılı işleyeceğimiz bir konuya değinelim. Eğer amacımız kuramlarımızın teoremlerini bulmayı bir makinaya bırakmaksa bunun olmazsa

olmaz koşulları vardır. Elimizdeki abecenin bir imi verildiğinde bunun bir değişken, bir sabit, bir fonksiyon veya bağıntı imi olup olmadığı belirlenebilir olmalıdır. Abecemizin verilen bir sözcüğünün bir terim veya bir formül olup olmadığı, eğer bir formül ise bu formülünün bir mantıksal ilksav olup olmadığı *belirlenebilir* olmalıdır. Ayrıca vereceğimiz *çıkarım kuralları* ve ilksavlar yardımıyla, formüllerimizin bir *sonlu* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ dizisinin φ_n formülünün bir *biçimsel kanıtı* olmasının ne demek olduğunu tanımlayacağız. φ formülünün bir biçimsel kanıtı varsa bunu $\vdash \varphi$ ile gösterecek ve φ formülü L dilinin bir *biçimsel doğrusudur* veya bir *biçimsel çıkarımıdır* veya bir *biçimsel teoremdir* diyeceğiz. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ gibi bir formül dizisinin bir biçimsel kanıt olup olmadığı da, hiçbir anlamsal irdelemelere başvurmadan, salt formüllerimizin yazılışına bakarak *belirlenebilir (*veya *kararlaştırılabilir* veya *saptanabilir*) olmalıdır.

Elbette ilksavların ve çıkarım kurallarının seçimi, tıpkı önermeler mantığında da olduğu gibi, tek olarak belirli değildir. Her dosdoğru $\operatorname{Dog} L$ kümesinde olduğundan bir biçimsel çıkarım olmalıdır. Dolayısıyla seçeceğimiz ilksavlar ve çıkarım kuralları en azından tüm dosdoğruları vermelidir. Önermeler mantığında bu işi $\sigma_1(\varphi,\psi)$, $\sigma_2(\varphi,\psi,\eta)$, $\sigma_3(\varphi,\psi)$ ilksavları ve modus ponens çıkarım kuralıyla halletmiştik. $\operatorname{Fm} L = \operatorname{Omf} P_L$ eşitliğinden yola çıkarak $\sigma_1(\varphi,\psi)$, $\sigma_2(\varphi,\psi,\eta)$, $\sigma_3(\varphi,\psi)$ ilksavları ve modus ponens çıkarım kuralıyla yalnızca dosdoğruları ve bunların tümünü elde edeceğimizi biliyoruz. Ancak L dilinin dosdoğru olmayan, örneğin $\dot\forall x\,(x \doteq x)$, doğrularının olduğunu da biliyoruz. Bu tip formülleri de biçimsel teorem olarak elde edebilmemiz için başka ilksavlar ve(ya) çıkarım kurallarına gereksinimiz vardır. Biz L dilinde $\dot\forall$ niceleyicisinden yola çıktığımız için $\sigma_1(\varphi,\psi)$, $\sigma_2(\varphi,\psi,\eta)$, $\sigma_3(\varphi,\psi)$'ye ekleyeceğimiz ilksavları $\dot\forall$'e ilişkin ilksavlar arasından seçeceğiz ve ayrıca yine $\dot\forall$ kullanan bir ikinci çıkarım kuralı seçeceğiz. Ayrıca biz L dilimizin $\doteq$ özdeşlik imini içermesini istedik. Dolayısıyla $\doteq$ imini yöneten ilksavlarımız da olacaktır. Burada vereceğimiz ilksavlara **mantık ilksavları** diyeceğiz.

Tanım 3.9.1 (Mantık İlksavları) *$\varphi,\psi,\eta \in \operatorname{Fm} L$ ve $t \in \operatorname{Tm} L$ olmak üzere:*

$\sigma_1(\varphi,\varphi) = \varphi \to (\psi \to \varphi)$,
$\sigma_2(\varphi,\psi,\eta) = (\varphi \to (\psi \to \eta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \eta))$.
$\sigma_3(\varphi,\psi) = (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$.
$\sigma_4(\varphi,x,t) = \dot\forall x\varphi \to \varphi(x|t)$, $\operatorname{Sb}(\varphi,x|t)$.
$\sigma_5(\varphi,\psi,x) = \dot\forall x\,(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \dot\forall x\psi)$, $x \notin \operatorname{Sb}\varphi$

ve $x,y,z,x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n \in \mathcal{V}$ değişkenler, $f \in \mathcal{F}_n$ ve $R \in \mathcal{R}_n$ olmak üzere aşağıdaki ***Eşitlik İlksavları***

E1. $\dot\forall x\,(x \doteq x)$.

E2. $\dot\forall x, y\,(x \doteq y \to y \doteq x)$.
E3. $\dot\forall x, y, z\,(x \doteq y \curlywedge y \doteq z \to x \doteq z)$.
E4. $\dot\forall \overline{x_n}, \overline{y_n}(x_1 \doteq y_1 \curlywedge \ldots \curlywedge x_n \doteq y_n \to f(\overline{x_n}) \doteq f(\overline{y_n}))$.
E5. $\dot\forall \overline{x_n}, \overline{y_n}(x_1 \doteq y_1 \curlywedge \ldots \curlywedge x_n \doteq y_n \to (R(\overline{x_n}) \leftrightarrow R(\overline{y_n})))$.

L dilinin mantık ilksavlarının kümesini Λ_{mL} veya, eğer söz konusu L dili karıştırılmayacak biçimde belli ise, yalın olarak Λ_m ile göstereceğiz. $\sigma_1(\varphi, \psi)$, $\sigma_2(\varphi, \psi, \eta)$ ve $\sigma_3(\varphi, \psi)$ ilksavlarının kümesini ise Λ_{om} ile gösterelim. Eşitlik ilksavlarımızdaki formülleri bazen kısaca sırasıyla $\boldsymbol{\varepsilon}_1(x)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2(x, y)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3(x, y, z)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_4(\overline{x_n}, \overline{y_n}, f)$ ve $\boldsymbol{\varepsilon}_5(\overline{x_n}, \overline{y_n}, R)$ ile göstereceğiz.

ε_4 ve ε_5 eşitlik ilksavlarında $\curlywedge$ tanımlanmış imi kullanıldığından, bu ilksavlar elbette yazıldıkları şekilleriyle $\mathrm{Fm}\,L$'de değillerdir. Onları, kısaca ve anlaşılır kılmak için $\curlywedge$ tanımlanmış imi ile verdik. İlerde de gerektiğinde bunu yapacağız.

Tanım 3.9.2 (Çıkarım Kuralları) *$\varphi, \psi \in \mathrm{Fm}\,L$ olmak üzere:*

1. *(MP): φ ve $\varphi \to \psi$'den ψ çıkar (**Ayırma, Modus Ponens**).*
2. *(Gen): φ'den $\dot\forall x\varphi$ çıkar (**Genelleştirme**).*

Her şeyden önce, eğer L dilimiz belirlenebilirse tüm mantıksal ilksavlarımız belirlenebilirler. Diğer yanda ξ, η, κ formülleri verildiğinde κ formülünün ξ ve η formüllerinden ayırma ile elde edilip edilmediğini de belirleyebiliriz. Ancak κ formülünün ξ, η formüllerinden biriyle hiçbir ilişkisi yoktur, diğeriyle kısmen bir ilişkisi vardır. Yine κ formülünün η formülünden genelleştirme ile elde edilip edilmediğini de belirleyebiliriz.

Tüm ilksavlarımızın aslında bir ilksavlar şeması olduğunu belirtelim. Ayrıca tüm ilksavlarımız L dilinin doğrularıdır, dd. $\Lambda_{mL} \subseteq \mathrm{Dog}\,L$. Gerçekten de $\sigma_1(\varphi, \psi)$, $\sigma_2(\varphi, \psi, \eta)$ ve $\sigma_3(\varphi, \psi)$ şemaları dosdoğrular olarak doğrudurlar. $\sigma_4(\varphi, x, t)$ ve $\sigma_5(\varphi, \psi, x)$ ise (3.7.3)(7) ve (3.7.3) (9) mantıksal çıkarımlarımızdan başka bir şey değillerdir. Dolayısıyla

$$\text{her } \varphi \in \Lambda_m \text{ için } \models \varphi, \text{ dolayısıyla } \Vdash \varphi.$$

$\sigma_4(\varphi, x, t)$ ve $\sigma_5(\varphi, \psi, x)$ ilksavlarımızda x ve t için öngörülen koşullarımızdan vazgeçemeyeceğimizi önemle belirtelim. $\sigma_4(\varphi, x, t)$ ilksavında $\mathrm{Sb}(\varphi, x|t)$ koşulundan vazgeçersek $\sigma_4(\varphi, x, t)$'nin doğru olmayabileceğini örneklemiştik.

$\sigma_5(\varphi, \psi, x)$ ilksavında, $x \in \mathrm{Sb}\,\varphi$ olursa benzer bir durumla karşılaşabileceğimizi örnekleyelim. Örneğin R tek basamaklı bir bağıntı olsun. Bu durumda R bağıntısının bir $\mathfrak{A}$ modelindeki yorumu bir $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A$ altkümesidir. Modeli $R^{\mathfrak{A}} \subset A$ öz altküme olacak biçimde seçelim ve $a \in R^{\mathfrak{A}}$ olsun. $\beta \in N^{\mathfrak{A}}$ nesnelemesini ise $\beta(x) = a$ olacak biçimde seçersek

$$\mathfrak{A} \models \dot\forall x\ (Rx \to Rx)\,[\beta] \text{ ancak } \mathfrak{A} \not\models (Rx \to \dot\forall x\, Rx)\,[\beta]$$

olacağından

$$\not\models \dot\forall x\ (Rx \to Rx) \to (Rx \to \dot\forall x\, Rx) \quad (x \in \operatorname{Sb} Rx!!).$$

Benzeri bir irdelemeyi $\mathfrak{N}$'deki $\varphi^{\mathfrak{A}}(x)$ yorumu "x çift sayıdır" olan bir φ formülü için siz yapınız.

(Gen) çıkarım kuralı kuşkusuz en çok baş ağrıtan çıkarım kuralıdır. Nedeni $\varphi \in \operatorname{Fm} L \setminus \operatorname{Sav} L$ formüllerinin de biçimsel teorem olmalarına izin vermemizdir. Her φ formülü ve her $x \in \mathcal{V}$ için $\Vdash \varphi \iff \Vdash \dot\forall x\varphi$ olduğunu biliyoruz(bkz.3.7.12). Biçimsel çıkarımlarımız L dilinin doğruları olacak ve biçimsel çıkarımlarımız mantıksal çıkarım kurallarını yansıtacaklarsa, çıkarım kurallarımız $\vdash \varphi \iff \vdash \dot\forall x\varphi$ denkliğini kazanmamıza izin vermelidir. Bu denkliğin $\Longrightarrow$ yönünü bize (Gen) çıkarım kuralı verir. Diğer yön ise (MP) ve $\sigma_4(\varphi, x, x) = \dot\forall x\varphi \to \varphi$'den kazanılır: Eğer $\dot\forall x\varphi$ bir biçimsel teoremse bir ilksav olarak $\dot\forall x\varphi \to \varphi$ de bir biçimsel teorem olacağından (MP) ile φ bir biçimsel teorem olur. (Gen) olmazsa olmaz bir çıkarım kuralı mıdır? Elbette hayır! Başka çıkarım kuralları ve(ya) ilksavlardan yola çıkabiliriz. Böyle bir durumda ise (Gen) türetilmiş bir çıkarım kuralı olarak kazanılır. İlerde bu konuya tekrar döneceğiz. (Gen) çıkarım kuralını Herbrand Çıkarım Teoremi'ni kanıtlamadan önce bir kez daha tartışacağız.

L birinci dereceden bir dil ve $\Lambda_m \subseteq \Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ olsun. Γ kümesi **birinci dereceden** bir $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ **kuramı** belirler. Bu **kuramın anlamsal teoremleri** Γ'nın *tüm* modellerinde, dd. $\Gamma \subseteq \operatorname{Dog} \mathfrak{A}$ koşulunu sağlayan her $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ yapısında doğru olan $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ formülleridir, dd. özetle anlamsal teoremlerimizin kümesi tam da $\operatorname{Mc}\Gamma$ kümesidir.

$\operatorname{Mc}\Gamma = \operatorname{Mc}\Gamma^{\forall}$ olduğundan bazı yazarlar bir $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramı tanımında $\Gamma \subseteq \operatorname{Sav} L$ olmasını isterler; bizim böyle bir koşulumuz olmayacaktır.

Γ-**biçimsel kanıt,** yalın yazılımla Γ-**bkanıt** tıpkı önermeler mantığında olduğu gibi verilir. Tamlık açısından biraz ileride bu tanımı tekrar vereceğiz. Γ *sonsuz da* olsa her Γ-biçimsel kanıt *sonlu* olmak zorundadır. Önermeler mantığında olduğu gibi bu formüllerimizin bir sonlu $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ dizisidir. Diğer yandan formüllerimizin herhangi bir $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ dizisinin bir Γ-bkanıt olup olmadığı, mekanik olarak kararlaştırılabilir; örneğin bir bilgisayar buna karar verebilir olacaksa dilimizin belirlenebilir olmasının yanına Γ ilksavlarının belirlenebilir olmasını eklemek gerekir. Bu konuları ileride ayrıntılı olarak inceleyeceğiz.

Bu kesimde birinci dereceden bir L dili verilmiş olacaktır. Açıklayacağımız tüm kavramlar bu dile ilişkin olacaktır. Başka bir dil söz konusu olmadıkça L dilini vurgulamayacağız.

Tanım 3.9.3 $\Lambda_m \subseteq \Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ *olmak üzere* $\mathcal{K} := (L, \Gamma)$ *ikilisine* ***birinci dereceden bir biçimsel kuram*** *denir.* Γ *kümesine bu kuramın*

ilksavları*(veya* ***aksiyomları****) denir.* $\Delta := \Gamma\backslash\Lambda_m$ *kümesine* $\mathcal{K}$ *kuramının* ***öz ilksavları*** *denir.* $\Gamma = \Lambda_m$ *ise* $\mathcal{K}$ *kuramına bir* ***yüklem mantığı*** *veya* ***birinci dereceden bir mantık denir.*** (L, Λ_m) *kuramını kısaca* $\mathcal{L}$ *ile göstereceğiz ve ona* L *dilinin* ***birinci dereceden mantık kuramı*** *diyeceğiz.* $\operatorname{Mod}\mathcal{K} := \operatorname{Mod}\Gamma$ *sınıfına* $\mathcal{K}$ ***kuramının modeller sınıfı*** *denir. Bir* $\mathcal{Y} \subseteq \operatorname{Yap} L$ *sınıfı için* $\mathcal{Y} = \operatorname{Mod}\Gamma$ *olacak biçimde bir* Γ *bulunabiliyorsa* $\mathcal{Y}$ *sınıfı* ***ilksavlaştırılabilir*** *(veya* ***aksiyomlaştırılabilir****) denir.*

Not 3.9.4 Biz ileride Λ_m mantık ilksavlarının $\operatorname{Fm} L$ kümesinde (MP) ve (Gen) çıkarım kurallarına göre kapanışının $\operatorname{Mc}_L = \operatorname{Dog} L$ olduğunu kanıtlayacağız. Bu nedenle $\Gamma\backslash\Lambda_m$ öz ilksavlarını $\operatorname{Fm} L\backslash \operatorname{Dog} L$ kümesinde almak mantıklı olur, çünkü $\Gamma' := (\Gamma\backslash\Lambda_m) \cap \operatorname{Dog} L$ ilksavları Λ_m'den kazanılabilecekleri için gereksizdir, fazlalıktır. ▲

Biz yalnızca birinci dereceden biçimsel kuramları inceleyeceğimizden kısaca "**biçimsel kuram**" diyecek ve bundan her zaman "*birinci dereceden biçimsel kuram*" anlayacağız. $\mathcal{K}$ kuramının L dili ile ilişkisini vurgulamak gerektiğinde bunu $\mathcal{K}_L$ yazarak belirteceğiz. L dili belli olduğu sürece Γ'nın kendisine de birinci dereceden bir kuram diyeceğiz. Genelde bir $\mathcal{K}$ biçimsel kuramının ilksavlarından söz edildiğinde aslında bu kuramın öz ilksavlarının anlaşıldığını belirtelim.

$$\operatorname{Mc}\mathcal{K} := \operatorname{Mc}\Gamma \text{ ve } \operatorname{Mt}\mathcal{K} := \operatorname{Mt}\Gamma$$

olarak tanımlansınlar. $\operatorname{Mc}\mathcal{K}$ kümesine $\mathcal{K}$ biçimsel kuramının **(mantıksal) doğruları** veya **mantıksal çıkarımları,** $\operatorname{Mt}\mathcal{K}$ kümesine ise $\mathcal{K}$ biçimsel kuramının **(mantıksal)teoremleri** diyeceğiz.

Biz geleneksel matematikte bir teoremden, dar anlamda, *doğru* olan *savları* anlarız. Bir $\mathfrak{A}$ yapısının teoremlerinden $\operatorname{Dog}\mathfrak{A}$ kümesinin öğelerinden ziyade dar anlamda $\operatorname{Th}\mathfrak{A}$ kümesinin öğelerini anlarız. Bunlara koşut olarak

$$\operatorname{Bc}\Gamma := \{\varphi \mid \varphi \in \operatorname{Fm} L \text{ ve } \Gamma \vdash \varphi\} \text{ ve}$$
$$\operatorname{Bt}\Gamma := \{\sigma \mid \sigma \in \operatorname{Sav} L \text{ ve } \Gamma \vdash \sigma\}$$

olarak tanımlansın. (3.20) kanıtlandığında elbette $\operatorname{Mc}\Gamma = \operatorname{Bc}\Gamma$ ve $\operatorname{Mt}\Gamma = \operatorname{Bt}\Gamma$ olacaktır. Bizim araştırmalarımızın odağında $\operatorname{Mc}\Gamma$ ve $\operatorname{Bc}\Gamma$ olacaktır. $\operatorname{Mt}\Gamma$ ve $\operatorname{Bt}\Gamma$'ya ilişkin bilgiler buradan elde edilirler. Şimdi $\operatorname{Bc}\Gamma$ kümesini tanımlayacağız.

Tanım 3.9.5 $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ *ve* $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ *olmak üzere* $\operatorname{Fm} L$ *formüllerinden oluşan* sonlu *bir* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *dizisine aşağıdaki koşullar sağlandığında* φ *formülünün bir* Γ***-biçimsel kanıtı****(veya* Γ***-biçimsel çıkarımı****) denir: Her* $1 \leq i \leq n$ *için*

(1) $\varphi_i \in \Lambda_m \cup \Gamma$ *veya*

(2) φ_i *kendinden önce gelen iki formülden (MP) ile elde edilmiştir, dd.* $j < i$ *ve* $k < i$ *doğal sayıları bulunabilir öyle ki* φ_k *formülü* $\varphi_j \to \varphi_i$ *formülünden başka bir şey değildir. Bu durumda* φ_i *formülü, kendinden önce gelen,* φ_j *ve* $\varphi_j \to \varphi_i$ *formüllerinden ayırmayla elde edilmiştir denir. Veya*

(3) φ_i *kendinden önce gelen bir* φ_j *formülünden (Gen) ile elde edilmiştir, dd. bir* $j < i$ *ve bir* $x \in \mathcal{V}$ *ile* $\varphi_i = \dot{\forall} x \varphi_j$ *ve*

(4) $\varphi_n = \varphi$.

$\operatorname{Fm} L$ *kümesinin bir* Γ*-biçimsel kanıtı olan* φ *formüllerinin oluşturduğu altkümesini* $\operatorname{Bc} \Gamma$ *ile veya* $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ *olmak üzere* $\operatorname{Bc} \mathcal{K}$ *ile göstereceğiz ve* $\operatorname{Bt} \Gamma = \operatorname{Bt} \mathcal{K} := \operatorname{Bc} \Gamma \cap \operatorname{Sav} L$ *olarak açıklayacağız.*

Λ_m mantık ilksavlarını her biçimsel kuramın ilksavları arasına kattığımızdan Γ-biçimsel kanıt tanımında, (3.9.5)(1)'de $\varphi_i \in \Lambda_m$ öğelerine izin verilmiştir. Tanım gereği $\Gamma \subseteq \Lambda_m$ ise $\operatorname{Bc} \Gamma = \operatorname{Bc} \Lambda_m$, özellikle $\operatorname{Bc} \emptyset = \operatorname{Bc} \Lambda_m$ olacağı apaçıktır. Her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ için $\mathcal{K} := (L, \Gamma)$ ve $\mathcal{L} := (L, \Lambda_m)$ olmak üzere

$$\mathcal{K} \vdash \varphi \text{ veya } \vdash_{\mathcal{K}} \varphi \text{ veya } \Gamma \vdash \varphi :\iff \varphi \in \operatorname{Bc} \Gamma = \operatorname{Bc} \mathcal{K} \text{ ve}$$
$$\vdash_{\mathcal{L}} \varphi \text{ veya } \vdash \varphi :\iff \emptyset \vdash \varphi \iff \varphi \in \operatorname{Bc} \Lambda_m = \operatorname{Bc} \emptyset.$$

olarak açıklayacağız ve $\operatorname{Bc} \Gamma$ kümesinin öğelerine L dilinin **Γ-biçimsel teoremleri** diyeceğiz. $\Gamma = \emptyset$ olduğunda ise $\operatorname{Bc} \emptyset$ yerine Bc yazacağız ve bu kümenin öğelerine **biçimsel teoremler** diyeceğiz. $\Gamma \vdash \varphi$ ve $\vdash \varphi$ gösterimlerinde L dilini vurgulamak istersek bunları

$$\Gamma \vdash_L \varphi \text{ ve } \vdash_L \varphi$$

olarak göstereceğiz. Bu gösterimlerle (MP) ve (Gen) çıkarım kurallarımız, $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \psi$ yerine $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ yazarsak, şu şekli alırlar

(MP) $\varphi, (\varphi \to \psi) \vdash \psi$.
(Gen) Her $x \in \mathcal{V}$ için $\varphi \vdash \dot{\forall} x \varphi$

Uzlaşma: Biçimsel kanıt tanımından görüleceği gibi Γ ne olursa olsun Λ_m mantık ilksavları kullanılmaktadır. Bu nedenle Γ kullanıldığında, Λ_m dışındaki *yeni* ilksavlarımız $\Omega := \Gamma \backslash \Lambda_m$ kümesinin formülleri olacaklardır. Tanım gereği Γ-bkanıt ve Ω-bkanıt kavramları örtüşürler. Biz bu nedenle *bundan sonra* Γ*-bkanıttan söz ettiğimizde* $\Gamma \cap \Lambda_m = \emptyset$ *varsayabiliriz.*

φ formülünün bir Γ-biçimsel kanıtı varsa φ formülü **Γ-bkanıtlanabilir** denir. $\Gamma \backslash \Lambda_m = \emptyset$ ise kısaca **bkanıtlanabilir** diyeceğiz. Her $\varphi \in \Lambda_m \cup \Gamma$ için φ dizisi bu formül için bir Γ-bkanıtıdır.

Önermeler mantığında olduğu gibi $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi$ biçimsel kanıtında, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ formüllerini bilmek bizi ilgilendirmiyorsa kısaca

$$\ldots, \varphi \text{ bir } \Gamma\text{-bkanıt olsun}$$

diyeceğiz. Bazen kanıt dizisini dik sütun olarak yazıp sağ yanda gerekçeleri vereceğiz. Yine, tanımın doğrudan sonucu olarak, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ bir Γ-bkanıt ise her $1 \leq m \leq n$ için $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ de bir Γ-bkanıttır.

Not 3.9.6 Biçimsel kuram tanımında matematik literatürde tam bir uyum yoktur. Kimi yazarlar Γ ilksavlarının gerçekten sav olmasını, dd. $\Gamma \subseteq \operatorname{Sav} L$ olmasını isterler. Biz bu koşulu koymayacağız. Bazı yazarlar bir biçimsel kuramdan Λ_m mantık ilksavlarını içeren ve çıkarım kurallarımıza göre *kapalı* olan bir $\Phi \subseteq \operatorname{Fm} L$ kümesini anlarlar. Böyle bir Φ için elbette $\Phi = \operatorname{Bc} \Phi$ olur. Diğer yandan her Γ için $\Lambda_m \subseteq \operatorname{Bc} \Gamma$ ve $\operatorname{Bc} \Gamma$ çıkarım kurallarına göre kapalı olduğundan $\operatorname{Bc} \Gamma$ bu yeni anlamda bir biçimsel kuramdır.

Bu kısa tartışmadan da görüleceği gibi özde önemli bir fark yoktur. Bu nedenle $\Phi = \operatorname{Bc} \Gamma$ olduğunda biz "Φ *biçimsel kuramı*" veya "$\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ *biçimsel kuramı*" veya "Γ *biçimsel kuramı*" söylemlerinden herhangi birini kullanacağız. ▲

Önermeler mantığında olduğu gibi

$$\Gamma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \varphi \text{ yerine } \Gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \varphi$$

yazacağız. $\Gamma, \Delta \in \operatorname{Fm} L$ için

$$\Gamma \vdash \Delta : \Longleftrightarrow \quad \text{Her } \varphi \in \Delta \text{ için } \Gamma \vdash \varphi.$$
$$\Gamma \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n : \Longleftrightarrow \ \Gamma \vdash \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$$

Tanım 3.9.7 *$\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \operatorname{Fm} L$ olmak üzere $\operatorname{Bc} \Gamma_1 = \operatorname{Bc} \Gamma_2$ ise ve ancak bu durumda Γ_1 ve Γ_2 kuramları* ***denktir*** *diyeceğiz ve bunu $\Gamma_1 \approx \Gamma_2$ ile göstereceğiz.*

$\mathcal{K}_1 = (L, \Gamma_1)$ ve $\mathcal{K}_2 = (L, \Gamma_2)$ olmak üzere $\Gamma_1 \approx \Gamma_2$ ise ve ancak bu durumda $\mathcal{K}_1$ ve $\mathcal{K}_2$ kuramları denktir diyecek ve bunu da $\mathcal{K}_1 \approx \mathcal{K}_2$ olarak göstereceğiz. $\Gamma, \Omega \subseteq \operatorname{Fm} L$ ise

$$\Gamma \approx \Gamma \cup \Omega \iff \Gamma \vdash \Omega$$

olduğu apaçıktır. Özellikle $\Gamma \approx \operatorname{Bt} \Gamma$.

Tanım 3.9.8 *$\mathcal{K} = (L, \Sigma)$ birinci dereceden bir kuram, $\Delta \subseteq \operatorname{Fm} L$ ve $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ olsun. Eğer φ formülünün bir $\Sigma \cup \Delta$-biçimsel kanıtı varsa ve ancak*

bu durumda φ formülü $\mathcal{K}$ kuramında Δ ***koşulları*** *(veya* ***varsayımları****)* ***altında biçimsel kanıtlanabilir*** *denir ve bu $\Delta \vdash_{\mathcal{K}} \varphi$ veya $\mathcal{K}[\Delta] \vdash \varphi$ veya $\Gamma[\Delta] \vdash \varphi$ ile gösterilir, dd.*

$$\Delta \vdash_{\mathcal{K}} \varphi : \iff \Sigma \cup \Delta \vdash \varphi.$$

$\Delta \vdash_{\mathcal{K}} \varphi$ demek φ formülünün $\mathcal{K}$ kuramının ilksavlarına Δ ilksavlarını ekleyerek elde ettiğimiz $\mathcal{K}' := (L, \Sigma \cup \Delta)$ kuramının bir biçimsel teoremi olması demektir. Bu nedenle biz önünde sonunda aslında $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ veya yalın yazılımla $\Gamma \vdash \varphi$ ile ilgileniyoruz demektir. Bu nedenle teoremlerimiz bu tür biçimsel çıkarımlar üzerine olacaktır. Bu arada $\mathcal{K}$ kuramının ilksavlarına Δ ilksavlarını ekleyerek elde ettiğimiz $\mathcal{K}' := (L, \Sigma \cup \Delta)$ kuramı için $\mathcal{K}[\Delta]$ veya $\Sigma[\Delta]$ gösterimlerinin de yaygın olduğunu belirtelim.

Tanım 3.9.9 *$\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ olmak üzere $\overline{\Gamma}$ kümesi, $\Lambda_m \cup \Gamma$ kümesinin $\operatorname{Fm} L$ kümesinde (MP) ve (Gen) çıkarım kurallarına göre kapanışı olsun, dd. $\overline{\Gamma}$ kümesi aşağıdaki koşulları sağlayan $\Omega \subseteq \operatorname{Fm} L$ altkümelerinin $\subseteq$ bağıntısına göre en küçüğüdür:*
(1) $\Lambda_m \cup \Gamma \subseteq \Omega$,
(2) $\varphi, (\varphi \to \psi) \in \Omega$ ise $\psi \in \Omega$,
(3) $\varphi \in \Omega$ ise her $x \in \mathcal{V}$ için $\forall x \varphi \in \Omega$.

Önerme 3.9.10 *Bir φ formülünün Γ-biçimsel teoremi olması için gerek ve yeter koşul $\varphi \in \overline{\Gamma}$ olmasıdır, dd.*

$$\varphi \in \operatorname{Bc} \Gamma \iff \varphi \in \overline{\Gamma}$$

Kanıt. Kanıt (2.7.3)'ün aynısıdır. Eklenecek tek şey $\ldots, \varphi$ dizisi bir Γ-bkanıt ise$\ldots, \varphi, \forall x \varphi$ dizisinin de bir Γ-bkanıt olduğudur. ■

Her Γ-bkanıt sonlu sayıda formül içerdiğinden aşağıdaki önerme aşikârdır.

Önerme 3.9.11 (Biçimsel Sonluluk Teoremi) *$\Gamma \vdash \varphi$ ise $\Delta \vdash \varphi$ olacak biçimde* sonlu *bir $\Delta \subseteq \Gamma$ vardır.*

Burada önemsiz bir bilgi olan Sonluluk Teoremi $\Gamma \vdash \varphi \implies \Gamma \Vdash \varphi$ kanıtlandıktan sonra hiçte aşikâr olmayan şu **Anlamsal Sonluluk Teoremi**'ni verir: *$\Gamma \Vdash \varphi$ ise $\Delta \Vdash \varphi$ olacak biçimde bir sonlu $\Delta \subseteq \Gamma$ vardır.*

Not 3.9.12 $\operatorname{Bc} \Gamma$ kümesi özellikle $\Lambda_{\mathrm{om}} \cup \Gamma$ kümesinin $\operatorname{Fm} L$ kümesinde yalnızca (MP) çıkarım kuralına göre kapanışı olan ve $\overline{\Gamma}_{\mathrm{om}} = \operatorname{Bc}_{\mathrm{om}} \Gamma$ ile göstereceğimiz kümeyi içerir. İkinci bölümde $\operatorname{Omf} P_L$ için tanımladığımız $\Gamma \vdash \varphi$ biçimsel kanıt gösterimini, uzlaşmamız gereği bu bölümde $\Gamma \vdash_{\mathrm{om}} \varphi$

olarak göstereceğiz. İkinci bölümde $\Gamma \Vdash_{\mathrm{om}} \varphi \iff \Gamma \vdash_{\mathrm{om}} \varphi$ ve $\overline{\emptyset}_{\mathrm{om}} = \mathrm{Hd}\, P_L$ olduğunu kanıtlamıştık. ▲

Not 3.9.13 $\overline{\Gamma}$ kümesinin tanımı ve $\overline{\Gamma} = \mathrm{Bc}\,\Gamma$ eşitliği bize bu kümenin öğelerine ilişkin önermelerin kanıtı için bir yöntem verir: $\mathrm{Bc}\,\Gamma$ kümesinin öğelerine ilişkin bir $O(\varphi)$ özelliğinin her $\varphi \in \mathrm{Bc}\,\Gamma$ için doğru olduğunu göstermek için şu üç adım yeterlidir:

1. Her $\varphi \in \Gamma \cup \Lambda_m$ için $O(\varphi)$ kanıtlanır,
2. $O(\varphi)$ ve $O(\varphi \to \psi)$ ise $O(\psi)$ kanıtlanır,
3. $O(\varphi)$ ise her $x \in \mathcal{V}$ için $O(\dot{\forall} x\varphi)$ kanıtlanır.

Elimizde $\mathrm{Bc}\,\Gamma$ için böyle bir tekrarlı kanıtlama yöntemi, kısaca **FTK,** olmasına karşın bir tekrarlı tanımlama bulunmadığını belirtelim. Bunun nedeni formüllerimizin kanıtlarının tek olarak belirli olmamasıdır. Örneğin $\varphi, \psi, \varphi \to \psi \in \Gamma$ ise ψ ve $\varphi, \varphi \to \psi, \psi$ dizilerinin her ikisi de ψ formülünün birer Γ-bkanıtlarıdırlar. ▲

Bir örnek oluşturmak üzere aşağıdaki Doğruluk Teoremi'ni kanıtlayalım.

Teorem 3.9.14 (Doğruluk Teoremi) $\mathrm{Bc}\,\Gamma \subseteq \mathrm{Mc}\,\Gamma$, *dd.*

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ ise } \Gamma \Vdash \varphi.$$

Dolayısıyla $\Gamma \vdash \varphi$ *ise* φ *formülü her* $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}\,\Gamma$ *modelinde doğrudur.*

Kanıt. 1. Her $\varphi \in \Lambda_m$ için $\Vdash \varphi$ olduğundan $\Gamma \Vdash \varphi$. $\varphi \in \Gamma$ ise $\Gamma \Vdash \varphi$ aşikârdır.

2. Önerme φ ve $\varphi \to \psi$ için kanıtlanmışsa $\Gamma \Vdash \varphi$ ve $\Gamma \Vdash \varphi \to \psi$'den (3.9.14)(2) ayırmasıyla $\Gamma \Vdash \psi$.

3. Önerme $\varphi \in \mathrm{Bc}\,\Gamma$ için kanıtlanmış olsun, dd. $\Gamma \Vdash \varphi$ olsun. (3.7.12) ile her $x \in \mathcal{V}$ için $\Gamma \Vdash \dot{\forall} x\varphi$ elde edilir ve bkb. ■

Önerme 3.9.15 $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathrm{Fm}\,L$ *olmak üzere aşağıdaki önermeler denktirler:*

1. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$.

2. Her $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}\,L$ *için* $\Gamma \vdash \varphi_1, \ldots, \Gamma \vdash \varphi_n$ *ise* $\Gamma \vdash \varphi$.

Kanıt. (1) $\Longrightarrow$ (2): $\psi_1, \ldots, \psi_m, \varphi$ dizisi φ formülünün bir $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$-bkanıtı olsun. Eğer herhangi bir ψ_k bir φ_j ise ψ_k yerine bu φ_j'nin bir Γ-bkanıtını yazalım. Böylece elde edilen dizi φ'nin bir Γ-bkanıtıdır.

(2) $\Longrightarrow$ (1): $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ alalım. Her φ_k için salt bu formülden oluşan φ_k dizisi kendisinin bir Γ-bkanıtıdır. Dolayısıyla $\Gamma \vdash \varphi_k, k = 1, \ldots, n$ olduğundan varsayımdan $\Gamma \vdash \varphi$ olur ve işimiz biter. ■

Not 3.9.16 Önermeler mantığında olduğu gibi, bazı kolay görülebilir gerçekler şunlardır:

1. (a) $\vdash$ *yansımalıdır*: Her $\varphi \in \Gamma$ için $\Gamma \vdash \varphi$. (b) $\vdash$ *monotondur*; $\Gamma \subseteq \Omega$ ve $\Gamma \vdash \varphi$ ise $\Omega \vdash \varphi$, (c) $\vdash$ *geçişlidir;* $\Gamma \vdash \Delta$ ve $\Delta \vdash \varphi$ ise $\Gamma \vdash \varphi$. Özellikle $\Gamma \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ve $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ ise $\Gamma \vdash \varphi$. Gerçekten de $\eta_1, \ldots, \eta_m, \varphi$ bir Δ-bkanıt olsun. $\ldots, \eta_i$ dizisi η_i formülünün bir Γ-bkanıtı olmak üzere

$$\ldots, \eta_1, \ldots, \eta_2, \ldots\ldots, \eta_m, \varphi$$

dizisi φ formülünün bir Γ-bkanıtıdır. Bu nedenle önermeler mantığında olduğu gibi formüllerimizin bir $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ dizisinde her φ_i ya $\Lambda_m \cup \Gamma \cup \mathrm{Bc}\,\Gamma$ kümesinde ya da kendinden önce gelen formül veya formüllerden (Gen) veya (MP) ile kazanılmışsa $\varphi_n \in \mathrm{Bc}\,\Gamma$ ve biz böyle bir diziye φ_n formülünün bir **genelleştirilmiş Γ-bkanıtı** veya **Γ-bkanıt taslağı** diyeceğiz. Çünkü bu dizide her $\varphi_j \in \mathrm{Bc}\,\Gamma$ yerine bir Γ-bkanıtını yazarak elde edeceğimiz yeni dizi φ_n formülünün bir Γ-bkanıtıdır. Başka sözlerle, daha önce kazanılmış tüm biçimsel teoremler, tıpkı geleneksel matematikte olduğu gibi, ilksavlarmış gibi kullanılabilirler. Γ-bkanıt taslakları tam olarak Γ-bkanıt değilseler de birer Γ-bkanıta dönüştürebilecek kısa taslaklardır.

Özel olarak $\Gamma \vdash \varphi, \varphi \to \psi$ ise (MP) ile $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$ olduğundan $\Gamma \vdash \psi$ elde edilir. Bunu aşağıdaki biçimde daha akılda kalıcı şekle sokabiliriz:

$$\Gamma(MP) \quad \Gamma \vdash \varphi \text{ ve } \Gamma \vdash \varphi \to \psi \text{ ise } \Gamma \vdash \psi. \tag{3.22}$$

2. Monotonluktan özellikle $\vdash \varphi$ ise $\Gamma \vdash \varphi$ elde edilir.
3. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ve $\psi_1, \ldots, \psi_m$ dizileri sırasıyla Γ_1 ve Γ_2 biçimsel kanıtlarıysa $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \ldots, \psi_m$ dizisi bir $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ biçimsel kanıtıdır.
4. (MP) ve (Gen) gibi iki çıkarım kuralımız var. Elbette biçimsel kanıtlarda yalnızca iki çıkarım kuralı kullanmak ancak kanıtları uzatır. Bu nedenle bir sonraki bölümde yeni çıkarım kuralları türeteceğiz. Bunlar bu iki çıkarım kuralında olduğu gibi $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ tipinde ifadeler olacaklardır; bunlara **türetilmiş çıkarım kuralları** diyeceğiz. Doğruluk Teoremi'nden dolayı $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ ifadesinin bir türetilmiş çıkarım kuralı olması için $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \Vdash \psi$ olması gerekir. Tamlık Teoremi'ni kanıtladığımızda bu koşul aynı zamanda yeterli de olacaktır.

▲

3.10 Bazı Matematiksel Kuramlar

Değişik cebir kitaplarındaki grup tanımları karşılaştırıldığında iki şey göze çarpar: Aksiyomların ifadelerinde ve kullanılan dillerde farklılıklar vardır.

İkili işlemimiz $\cdot$ ile gösterilmek üzere ilk aksiyomumuz olarak birleşmeli aksiyomu

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \text{ veya } \forall x, y, z\, (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$$

olarak seçilmiştir. φ_{g1} formülü $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ olmak üzere birileri aksiyom olarak φ_{g1} formülünü seçerken diğerleri $\dot{\varphi}^{\forall}_{g1}$ savını seçmiştir. Bir sonraki kesimde (3.11.12)'de her iki yaklaşımın aynı kapıya çıktığını kanıtlayacağız. Seçilen dillerde de farklılıklar vardır. Bazıları salt bir $\cdot$ ikili işleminden yola çıkarken, bir kısmı $\cdot$ ikili işlemi bir e etkisiz öğesiyle, bir kısmı ise $\cdot$ ve e'nin yanına bir de tek değişkenli $^{-1}$ ters fonksiyonunu da eklerler. Dillerin farklı seçilmeleri, bazen aksiyomlar olarak seçtiğimiz formüllerin tiplerinin değişik olmasına yol açar; bunların altyapılarla ilişkisini ileride netleştireceğiz.

Herhangi bir cebirsel yapının dilini biçimselleştirirken şu yolu izleyeceğiz: Bağıntılarımız, fonksiyonlarımız ve sabitlerimiz için seçeceğimiz imler aynı görünümde olduğunda, imlerimizi *koyu* veya *noktalanmış* veya biraz *eğritilmiş* olarak yazacağız.[15]

A) Gruplar Kuramı: Biçimsel dilimiz, $\bullet$ iki değişkenli bir fonksiyon imi $\mathbf{e}$ bir sabit imi olmak üzere, $L_g := \{\bullet, \mathbf{e}\}$ ve aksiyomlarımız

$$\begin{aligned}
\alpha_{g1} &:= \dot{\forall} x, y, z\ (x \bullet (y \bullet z) \doteq (x \bullet y) \bullet z) \\
\alpha_{g2} &:= \dot{\forall} x\ (x \bullet \mathbf{e} \doteq x \curlywedge \mathbf{e} \bullet x \doteq x) \\
\alpha_{g3} &:= \dot{\forall} x \dot{\exists} y (x \bullet y \doteq \mathbf{e} \curlywedge y \bullet x \doteq \mathbf{e}) \\
\alpha_{g4} &:= \dot{\forall} x, y (x \bullet y \doteq y \bullet x)
\end{aligned}$$

$\mathcal{K}_g = (L_g, \Lambda_g)$ biçimsel *Gruplar Kuramı'nın öz aksiyomları* $\Lambda_{\mathbf{g}} := \{\alpha_{g1}, \alpha_{g2}, \alpha_{g3}\}$ olarak açıklanır. $\Lambda_{ag} := \Lambda_g \cup \{\alpha_{g4}\}$ ise $\mathcal{K}_{ag} = (L_g, \Lambda_{ag})$ *Abel grupları kuramının öz aksiyomları*dır. Abel grupları söz konusu olduğunda ise $\bullet$ yerine $\dot{+}$ ve $\mathbf{e}$ yerine $\mathbf{0}$ almak bir gelenektir; böylece $L_{ag} := \{\dot{+}, \mathbf{0}\}$ Abel Gruplar Kuramı'nın dilidir ve yukarıdaki aksiyomlarda bu imlerle dile getirilir. $\alpha_G := \alpha_{g1} \curlywedge \alpha_{g2} \curlywedge \alpha_{g3}$ olmak üzere $\Lambda_g \approx \{\alpha_G\}$ olduğundan $\mathcal{K}_g \approx (L_g, \{\alpha_G\})$. Elbette $\alpha_{AG} := \alpha_{g1} \curlywedge \cdots \curlywedge \alpha_{g4}$ olmak üzere $\Lambda_{ag} \approx \{\alpha_{AG}\}$.Eğer $L'_g := \{\bullet\}$ dilinden yola çıksaydık

$$\begin{aligned}
\alpha'_{g2} &:= \dot{\exists} x \dot{\forall} y\, (x \bullet y \doteq y \curlywedge y \bullet x \doteq y) \\
\alpha'_{g3} &:= \dot{\forall} y\, (x \bullet y \doteq y \curlywedge y \bullet x \doteq y) \to \dot{\forall} y \dot{\exists} z\, (z \bullet y \doteq x \curlywedge y \bullet z \doteq x)
\end{aligned}$$

olmak üzere biçimsel gruplar kuramının aksiyomları olarak $\Lambda'_g := \{\alpha_{g1}, \alpha'_{g2}, \alpha'_{g3}\}$ alırdık. $\mathcal{K}'_g := \left(L'_g, \Lambda'_g\right)$. Bu $\mathcal{K}_g, \mathcal{K}'_g$ kuramlarının modelleri örtüşür.

[15] Yazar kullandığı programda $<, +$ imlerini bunların koyularından ayırt etmekte zorlandığı için bu imleri $\prec, \dot{+}$ imleri ile biçimleştirmiştir.

$\mathfrak{G} \in \operatorname{Mod} \mathcal{K}_g$ yapılarına bir **grup** denir. $(\mathbb{Z}, +, 0)$, $(\mathbb{Q}, +, 0)$, $(\mathbb{R}, +, 0)$, ve $(\mathbb{C}, +, 0)$ yapıları birer değişmeli grupturlar; her defasında $+, -$ ve yorumları bildik toplama işlemleri ve $\mathbf{0}$'ın yorumu bildik 0 alınmıştır. Benzer biçimde, bu kez yorumlar bildik çarpma işlemi ve 1 olmak üzere $(\mathbb{Q}^*, \cdot, 1)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot, 1)$ ve $(\mathbb{C}^*, \cdot, 1)$ birer değişmeli gruptur. Ancak $\mathfrak{N}_+ := (\mathbb{N}, +, 0)$ bir grup değildir, çünkü $\mathfrak{N}_+ \models \alpha_{g1}$, $\mathfrak{N}_+ \models \alpha_{g2}$ ancak $\mathfrak{N}_+ \not\models \alpha_{g3}$!

Uzlaşma: Her $n \geq 1$ doğal sayısı ve her $x \in \mathcal{V}$ için

$$x^1 := x,\ x^{n+1} := x \bullet x^n \text{ ve işlem } \dot{+} \text{ ise}$$
$$1x := x,\ (n+1)\, x := x \dot{+} nx$$

kısaltmalarını kullanacağız.

Son olarak bir $\mathfrak{G} = (G, L_{ag}^{\mathfrak{G}})$ Abel grubuna her $n \geq 1$ doğal sayısı her $a \in G$ için bir $b \in G$ öğesi $na = b$ olacak biçimde bulunabiliyorsa **bölünebilir** denir. Her $0 \neq a \in G$ ve her $n \geq 1$ doğal sayısı için $na \neq 0$ ise $\mathfrak{G}$ grubu **burulmasızdır** denir.

B) Birim Öğeli Halkalar ve Cisimler: Bu iki kuramın dilleri aynı olacaktır: $L_h = L_c := \{\dot{+}, \bullet, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Burada $\dot{+}$ ve $\bullet$ iki değişkenli iki fonksiyon imi, $\mathbf{0}$ ve $\mathbf{1}$ ise iki sabit imidir. Bu kez aksiyomlarımız şunlardır: $\alpha_{h1} = \alpha_{c1}, \ldots, \alpha_{h4} = \alpha_{c4}$ aksiyomları olarak $\alpha_{g1}, \ldots, \alpha_{g4}$ Abel grubu aksiyomlarını alacağız ve

$$\begin{aligned}
\alpha_{h5} = \alpha_{c5} &:= \dot{\forall} x, y, z\ x \bullet (y \bullet z) \doteq (x \bullet y) \bullet z \\
\alpha_{h6} = \alpha_{c6} &:= \dot{\forall} x\ (x \bullet \mathbf{1} \doteq x) \curlywedge (\mathbf{1} \bullet x \doteq x) \\
\alpha_{h7} = \alpha_{c7} &:= \neg \mathbf{0} \doteq \mathbf{1} \\
\alpha_{h8} = \alpha_{c8} &:= \dot{\forall} x, y, z\ x \bullet (y \dot{+} z) \doteq (x \bullet y) \dot{+} (x \bullet z) \curlywedge \\
&\qquad \dot{\forall} x, y, z\ (x \dot{+} y) \bullet z \doteq (x \bullet z) \dot{+} (y \bullet z) \\
\alpha_{h9} = \alpha_{c9} &:= \dot{\forall} x\ (\neg x \doteq \mathbf{0} \to \dot{\exists} y\ x \bullet y \doteq \mathbf{1}) \\
\alpha_{h10} = \alpha_{c10} &:= \dot{\forall} x, y\ x \bullet y \doteq y \bullet x
\end{aligned}$$

olsunlar. $\Lambda_h =:= \{\alpha_{h1}, \ldots, \alpha_{h8}\}$ **birim öğeli halkalar kuramı**nın aksiyomlarıdır; $\Lambda_{ah} := \Lambda_h \cup \{\alpha_{h10}\}$ ise birim öğeli değişmeli halkalar kuramının aksiyomlarıdır. $\Lambda_{ec} := \{\alpha_{c1}, \ldots, \alpha_{c9}\}$ **eğik cisimler**in aksiyomları ve $\Lambda_c = \Lambda_{ec} \cup \{\alpha_{c10}\}$ ise **(değişmeli) cisimler**in aksiyomlarıdır. Böylece $\mathcal{K}_h := (L_h, \Lambda_h)$ ve $\mathcal{K}_c = (L_c, \Lambda_c)$ sırasıyla *birim öğeli halkalar kuramı* ve (*değişmeli) cisimler kuramıdırlar.* $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod} \mathcal{K}_c$ yapılarına **değişmeli cisimler** denir. $\mathcal{K}_h$'nın modellerine **birim elemanlı halkalar** denir. Her defasında $\cdot$, ve $+$ analizden bildik çarpma ve toplamayı göstermek üzere $\mathfrak{R} := (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$, $\mathfrak{Q} := (\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ ve $\mathfrak{C} := (\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ birer değişmeli cisimdirler. Bildik

işlemlerle $(M^{n\times n}(\mathbb{R}), +, \circ, 0_n, I_n)$ birim öğeli bir halkadır; bu halka $n = 1$ için bir değişmeli cisimken $n \geq 2$ için değişmeli olmayan bir halkadır. $\sigma_C := \alpha_{c1} \curlywedge \cdots \curlywedge \alpha_{c10}$ olmak üzere elbette $\Lambda_c \approx \{\sigma_C\}$. Tümevarımla her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\underline{0} := \mathbf{0} \text{ ve } \underline{n+1} := \underline{n} \dot{+} \mathbf{1}$$

$\underline{n}$ terimi açıklansın. $p \in \mathbb{N}$ bir asal sayı olmak üzere

$$\chi_p \text{ ile } \underline{p} \dot{=} \mathbf{0}$$

formülünü gösterelim. $\mathcal{K}_{pc} := (L_c, \Lambda_c \cup \{\chi_p\})$ karakteristiği p olan cisimler kuramıdır. $\Sigma_0 := \{\neg\chi_p \,|\, p \in \mathbb{N} \text{ asal}\}$ olmak üzere $\mathcal{K}_{0c} := (L_c, \Lambda_c \cup \Sigma_0)$ ise karakteristiği 0 olan cisimler kuramıdır.

Her $n \geq 1$ doğal sayısı için

$$\tau_n := \dot{\forall} y_1, \ldots, y_n \dot{\exists} x \left(x^n \dot{+} y_1 x^{n-1} \dot{+} \cdots \dot{+} y_{n-1} x \dot{+} y_n \dot{=} \mathbf{0}\right)$$

olmak üzere $\mathcal{K}_{ckc} := (L_c, \Lambda_c \cup \{\tau_n \,|\, n \geq 1, n \in \mathbb{N}\})$ kuramının modellerine **cebirsel kapalı cisimler** denir.

Cisimlerin L_c diline bir $\prec$ sıralama imi katarak $L_{sc} := \{\prec, \dot{+}, \bullet, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ sıralanmış cisimler dilini elde ederiz. Λ_c cisim aksiyomlarına az aşağıda verdiğimiz $\alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \alpha_{s3}$ sıralama aksiyomlarını ve

$$\begin{aligned}
\alpha_{sc1} &:= \dot{\forall} x, y(\neg(x \prec y \curlyvee x \dot{=} y) \to y \prec x)\\
\alpha_{sc2} &:= \dot{\forall} x, y(x \prec y \to \dot{\forall} z\,(x \dot{+} z \prec y \dot{+} z))\\
\alpha_{sc3} &:= \dot{\forall} x, y(\mathbf{0} \prec x \curlywedge \mathbf{0} \prec y \to \mathbf{0} \prec x \bullet y)
\end{aligned}$$

aksiyomlarını da ekleyerek Λ_{sc} **sıralanmış cisimler aksiyomlarını** elde ederiz. $\mathcal{K}_{sc} := (L_{sc}, \Lambda_{sc})$ kuramının modellerine **sıralanmış cisimler** denir. $\mathbb{K}$ bir sıralanmış cisim ve her $0 < x, y \in \mathbb{K}$ için bir $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı $y < nx$ olacak biçimde bulunabiliyorsa K cismi **Arşimedik sıralanmıştır** denir.

C) Sıralama Kuramı: Sıralama kuramının dili $L_{\mathbf{s}} := \{\prec\}$ ve aksiyomlarımız

$\alpha_{s1} := \dot{\forall} x \neg(x \prec x)$	yansımasız
$\alpha_{s2} := \dot{\forall} x, y, z(x \prec y \curlywedge y \prec z \to x \prec z)$	geçişli
$\alpha_{s3} := \dot{\forall} x, y(x \prec y \curlyvee x \dot{=} y \curlyvee y \prec x)$	bağlantılı
$\alpha_{s4} := \dot{\forall} x, y, z(x \prec y \to \dot{\exists} z\,(x \prec z \curlywedge z \prec y))$	yoğun
$\alpha_{s5} := \dot{\forall} x \dot{\exists} y\ y \prec x$	en küçük öğe yok
$\alpha_{s6} := \dot{\forall} x \dot{\exists} y\ x \prec y$	en büyük öğe yok

olmak üzere $\Lambda_s := \{\alpha_{s1}, \alpha_{s2}\}$ kümesi $\mathcal{K}_s$ **sıralamalar** kuramının aksiyomları, $\Lambda_{ds} := \{\alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \alpha_{s3}\}$ kümesi $\mathcal{K}_{ds}$ **doğrusal sıralamalar** kuramının

aksiyomları, $\Lambda_{ys} := \{\alpha_{s1}, \ldots, \alpha_{s6}\}$ ise $\mathcal{K}_{ydus}$ **uç noktasız yoğun doğrusal sıralamalar** kuramının aksiyomlarıdır. $<$ gerçel sayıların sıralaması olmak üzere $\mathfrak{N}_< := (\mathbb{N}, <)$ doğrusal sıralanmıştır; en küçük öğesi vardır ancak en büyük öğesi yoktur ve ayrıca yoğun değildir. $\mathfrak{Z}_< := (\mathbb{Z}, <)$ için $i \neq 4$ ise $\mathfrak{Z}_< \models \alpha_{si}$ ancak $\mathfrak{Z}_< \not\models \alpha_{s4}$. Diğer yandan $\mathfrak{Q}_< := (\mathbb{Q}, <)$ ve $\mathfrak{R}_< := (\mathbb{R}, <)$ yapılarında tüm α_{si} savları doğrudur, dd. bunlar uç noktasız yoğun sıralanmışlardır. $(A, <)$ doğrusal sıralanmış kümesine boştan farklı her $B \subseteq A$ altkümesinin minimal öğesi varsa, dd. bir $b_* \in B$ öğesi her $b_* \neq b \in B$ için $b_* < b$ olacak biçimde varsa **iyi sıralanmıştır** denir.

D) Vektör Uzayları: Her ne kadar vektör uzayları *vektörler* ve *skalarlar* olmak üzere iki tür nesne içerse de işin içinden nasıl çıkacağımızı (3.1.1)'de belirtmiştik. $\mathbb{K}$ işlemleri $+$ ve $\cdot$ ve birim elemanı 1 olan bir cisim olsun. Eğer V bir $\mathbb{K}$ vektör uzayı ise her şeyden önce V bir Abel grubu olacaktır. Bunun için L_{vu} ile göstereceğimiz vektör uzayları dili en azından $\dot{+}$ ve $\mathbf{0}$ imlerini içerecektir. Ayrıca bir $* : \mathbb{K} \times V \to V$ fonksiyonu her okurun da bildiği koşulları sağlayacak biçimde verilmiştir. Böyle bir fonksiyonun ise birinci dereceden yapılarda yeri yoktur. Her $a \in \mathbb{K}$ için $f_a : V \to V$ fonksiyonunu her $x \in V$ için $f_a(x) := a * x$ olarak açıklayarak $*$ fonksiyonunun yerine $\{f_a \,|\, a \in \mathbb{K}\}$ fonksiyon ailesini alabiliriz. Her f_a fonksiyonu için bir m_a fonksiyon imi seçeceğiz. Böylece vektör uzayları dilimiz olarak $L_{vu} := \{\dot{+}, \mathbf{0}\} \cup \{m_a \,|\, a \in \mathbb{K}\}$ dilini seçeceğiz. Aksiyomlarımız ise $\alpha_{g1}, \ldots, \alpha_{g4}$ Abel grupları kuramının yanı sıra aşağıdakilerdir:

$$\begin{aligned}
\alpha_{v5} &:= \dot{\forall} x \; m_a(m_b(x)) \doteq m_{a \cdot b}(x), \\
\alpha_{v6} &:= \dot{\forall} x \; m_{a+b}(x) \doteq m_a(x) \dot{+} m_b(x), \\
\alpha_{v7} &:= \dot{\forall} x, y \; m_a(x \dot{+} y) \doteq m_a(x) \dot{+} m_a(y), \\
\alpha_{v8} &:= \dot{\forall} x \; m_1(x) \doteq x.
\end{aligned}$$

$\mathcal{K}_{\mathbb{K}v} := (L_{vu}, \Lambda_{vu})$ ikilisi $\Lambda_{vu} := \Lambda_{ag} \cup \{\alpha_{v5}, \ldots, , \alpha_{v8}\}$ olmak üzere **$\mathbb{K}$-vektör uzayları** kuramımızdır.

E) Birinci Dereceden Peano Aritmetiği: Bu kuramın dili $L_a := \{\dot{+}, \bullet, \mathbf{S}, \mathbf{0}\}$. Burada $\dot{+}$ ve $\bullet$ iki değişkenli fonksiyon imleri, $\mathbf{S}$ tek değişkenli bir fonksiyon imi, $\mathbf{0}$ ise bir sabit imidir. Bu kuramın dilini ve aksiyomlarını seçerken çıkış noktamız $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, S, 0)$ yapısıdır; burada $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu $n \in \mathbb{N}$ için değeri $S(n) := n + 1$ olarak açıklanan ardıl fonksiyonudur. Bu model bağlamında anlaşılabilir olan aksiyomlarımızı aşağıdaki

gibi seçeceğiz: Her $\varphi = \varphi(x, x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{Fm} L_a$ ile

$$\begin{aligned}
\alpha_{a1} &:= \dot{\forall} x \; \neg \mathbf{S}x \doteq \mathbf{0} \\
\alpha_{a2} &:= \dot{\forall} x, y \; \mathbf{S}x \doteq \mathbf{S}y \to x \doteq y \\
\alpha_{a3} &:= \dot{\forall} x \; x \dot{+} \mathbf{0} \doteq x \\
\alpha_{a4} &:= \dot{\forall} x, y \; x \dot{+} \mathbf{S}y \doteq \mathbf{S}(x \dot{+} y) \\
\alpha_{a5} &:= \dot{\forall} x \; x \bullet \mathbf{0} \doteq \mathbf{0} \\
\alpha_{a6} &:= \dot{\forall} x, y \; x \bullet \mathbf{S}y \doteq (x \bullet y) \dot{+} x \\
\alpha^{\varphi}_{a7} &:= \varphi(x|\mathbf{0}) \curlywedge \dot{\forall} x \, (\varphi(x) \to \varphi(x|\mathbf{S}x)) \to \dot{\forall} x \varphi.
\end{aligned}$$

Burada α^{φ}_{a7} **tümevarım şemasıdır.** Her φ formülümüz için bir aksiyom verir. $\Lambda_a := \{\alpha_{a1}, \ldots, \alpha_{a6}\} \cup \{\alpha^{\varphi}_{a7} \mid \varphi \in \operatorname{Fm} L\}$ formüller kümesi $\mathcal{K}_a = (L_a, \Lambda_a)$ **birinci dereceden Peano Aritmetiğinin** öz aksiyomlarıdır.

Burada da

$$\underline{0} := \mathbf{0}, \underline{1} := \mathbf{S0}, \underline{2} := \mathbf{SS0}, \ldots$$

gösterimlerini kullanacağız. $\underline{n}$ terimlerine L_a aritmetik dilinin **sayısal terimleri,** veya **sayısalları** , bunların herhangi bir modeldeki yorumlarına ise o modelin (doğal) sayıları denir.

E) İkinci Dereceden Peano Aritmetiği: Peano aksiyomlarını henüz ortalıkta biçimsel kuram kavramları yokken vermişti! Bu nedenle onun aksiyomlarını ilk şekliyle verip bir kıyaslama yapmakta yarar vardır. Peano aksiyomlarını aşağıdaki gibi vermiştir:

1. 0 bir doğal sayıdır.
2. Her n doğal sayısına kaşılık bir başka $S(n)$ doğal sayısı vardır.
3. Her n doğal sayısı için $S(n) \neq 0$.
4. Her m, n doğal sayıları için $S(m) = S(n)$ ise $m = n$.
5. Doğal sayıların bir A altkümesi 0'ı içeriyorsa ve her $n \in A$ için $S(n) \in A$ ise A her doğal sayıyı içerir. (*Tümevarım*)

Buradaki aksiyomları Λ_a ile kıyasladığımızda şunlar göze çarpar: 1. ve 2. aksiyomlarının L_a'de karşılıkları yoktur. Ancak bunlara gerek yoktur; dilimizdeki $\mathbf{0}$ ve $\mathbf{S}$ bunları karşılar. Bu aksiyomlarda toplama ve çarpma fonksiyonları yoktur; ancak buradan yola çıkarak α_{a3}, α_{a4} ve α_{a5} aksiyomlarını sağlayan toplama ve çarpma fonksiyonları tanımlanabilir [17]. Gerçekten de $L'_a := \{\mathbf{S}, \mathbf{0}\}$ dili ve $\Lambda'_a := \{\alpha_{a1}, \alpha_{a2}, \alpha_{a7}\}$ öz aksiyomlarından yola çıkabilirdik, ancak işi daha kolay tutmak için seçtiğimiz yolu izledik.

α^{φ}_{a7} tümevarım şemasının Peano'nun tümevarım aksiyomuyla ilişkisi nedir? $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod} \mathcal{K}_a$ olsun. Bu durumda $S^{\mathfrak{A}} : A \to A$ fonksiyonu α_{a2} aksiyomundan dolayı birebirdir ve α_{a1} aksiyomundan dolayı ise örten değildir.

Dolayısıyla A bir *sonsuz* kümedir ve dolayısıyla $\kappa := |\mathcal{P}(A)| > \aleph_0$. $\mathbf{0}^{\mathfrak{A}}$ Peano aksiyomlarındaki 0'ın ve $S^{\mathfrak{A}}$ ise Peano aksiyomlarındaki S fonksiyonunun karşılığıdır. Genelde alındığı gibi $\mathcal{V}$ değişkenler kümemiz sayılabilir sonsuz alalım. Bu durumda $|\operatorname{Fm} L_a| = \aleph_0$ olduğundan $\kappa > \aleph_0$. $\varphi = \varphi(x, x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{Fm} L_a$ ve

$$B_\varphi := \{a \in A \,|\, \mathfrak{A} \models \varphi(a, x_1, \ldots, x_n)\} \subseteq A$$

olmak üzere $(\alpha_{a7}^{\varphi})^{\mathfrak{A}}$ tam da şunu söyler:

$$\mathbf{0}^{\mathfrak{A}} \in B_\varphi \text{ ve } \forall a \in A(a \in B_\varphi \implies S^{\mathfrak{A}}(a) \in B_\varphi) \text{ ise } A = B_\varphi. \tag{3.23}$$

A kümesinin B_φ tipindeki altkümelerine $\mathfrak{A}$-tanımlanabilir denir. Bu tip kümelerin kolleksiyonun gücü $\aleph_0$'dır; tümevarım şemamız ancak bunlar için bir söylemde bulunur. Buna karşın Peano'nun tümevarım aksiyomu, yani 5. aksiyomu her $B \in \mathcal{P}(A)$ için (3.23)'ün sağlanmasını ister! Bu aksiyom tümevarım şemasından çok güçlüdür; κ kadar küme üzerinde bir söylemdir ve $\kappa > \aleph_0$! 5. aksiyom, $\mathfrak{A}$ yapısında dile getirildiğinde aşağıdaki anlamsal formüldür:

$$\forall X(\mathbf{0}^{\mathfrak{A}} \in X \wedge \forall x(x \in X \Rightarrow S^{\mathfrak{A}} x \in X) \Rightarrow \forall x(x \in X)). \tag{3.24}$$

Bu formülde $\forall x$ ile başlayan altformüllerde $\forall$ evrenimizin öğelerine–*birinci türden nesnelere*– uygulanırken $\forall X$ ile başlayan altformüllerde $\forall$ evrenimizin altkümelerine–*ikinci türden nesnelere*– uygulanmaktadır. Bu formülde ayrıca bir $\in$ ikili bağıntı vardır ve $x \in X$ yazdığımızda $\in$ bağıntısının solunda birinci türden sağında ikinci türden bir nesne olabilir. (3.24) formülü birinci dereceden bir dille biçimselleştirilemez. Birinci türden nesnelerin evreninde değişkenler olarak $x, y, z, \ldots$ ve ikinci türden nesnelerin evreninde değişkenler olarak $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \ldots$ alır ve $\in$ bağıntısını $\dot{\in}$ olarak biçimselleştirirsek (3.24) şu şekilde biçimselleştirilir:

$$\dot{\forall}\mathbf{X}\left(\mathbf{0} \in \mathbf{X} \curlywedge \dot{\forall} x\,(x \dot{\in} \mathbf{X} \to \mathbf{S}x \dot{\in} \mathbf{X}) \to \dot{\forall} x\,(x \dot{\in} \mathbf{X})\right).$$

Bu formülü α_{a7}^2 olarak gösterirsek Peano aritmetiğinin dili olarak bu yeni $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \ldots$ değişkenleriyle zenginleştirilmiş L_a dilidir. Bu yeni dili L_a^2 ile gösterelim. Aksiyomlar olarak $\mathbf{\Lambda}_a^2 := \{\alpha_{a1}, \ldots, \alpha_{a6}, \alpha_{a7}^2\}$ alır ve $\mathcal{K}_a^2 := \left(L_a^2, \Lambda_a^2\right)$ **ikinci dereceden Peano aritmetiği** kuramını elde ederiz. Aslında Peano yaklaşımını birebir biçimselleştirmek istersek $L'_{\mathbf{a}} := \{S, \dot{\in}, \mathbf{0}\}$ dilinden ve $\Lambda_a'^2 := \left\{\alpha_{a1}, \alpha_{a2}, \alpha_{a7}^2\right\}$ aksiyomlarından yola çıkarak $\mathcal{K}_a'^2 := \left(L_a'^2, \Lambda_a^2\right)$ kuramını elde ederiz. Bu ikinci yol izlendiğinde $L_a'^2$ dilimiz $\dot{+}$ ve $\bullet$ tanımlanmış imleri $\alpha_{a3}, \ldots, \alpha_{a6}$ sağlanacak biçimde L_a^2 diline genişletilebilir.

$\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, S, 0)$ yapısı $\mathcal{K}_a$ kuramının bir modeli, $\mathfrak{N}^2 = (\mathbb{N}, +, \cdot, S, \in, 0)$ yapısı ise $\mathcal{K}_a^2$ kuramının bir modelidir. $\mathcal{K}_a$ ile $\mathcal{K}_a^2$ arasında çok temel ayrılıklar vardır. Her şeyden önce $\mathcal{K}_a^2$ kuramının herhangi iki yapısı eşyapılıdır; bunun için $\mathcal{K}_a^2$ kuramının her $\mathfrak{A}$ modeli için bunun $\mathfrak{N}^2$ ile eşyapılı olduğunu görmek yeterlidir. Tekrarlı tanımlamayla bir $f : \mathbb{N} \to A$ fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}$ için $f(S(n)) = S^{\mathfrak{A}}(f(n))$ olacak biçimde tanımlanır ve bu f bir eşyapı dönüşümüdür (alıştırma veya bkz. [17]). Buna karşın her $\kappa > \aleph_0$ için $\mathcal{K}_a$ kuramının $|A| = \kappa$ olan bir $\mathfrak{A}$ modeli vardır; $\mathfrak{N}$ ve $\mathfrak{A}$'nın eşyapılı olması söz konusu değildir. Hatta $\mathcal{K}_a^1$ kuramının $\mathfrak{N}$ ile eşyapılı olmayan sayılabilir modelleri vardır. Bunları Gödel Tamlık Teoremi'nden sonra kanıtlayacağız.

F) Zermelo-Fraenkel Kümeler Kuramı (ZF): Bu kuramın dili yalnızca bir $\dot{\in}$ ikili bağıntı iminden oluşur: $L_k := \{\dot{\in}\}$. Kümeler Kuramı'nda *nesnelerimiz kümeler* olacaklardır. Bu kuramın aksiyomlarını onların altında yatan sezgisel gerçeklerle birlikte vereceğiz. Bu aksiyomların yerleşmiş adları vardır. Her aksiyomu önce yalnızca L_k dilinde ifade edeceğiz. Bu yoksul dilde aksiyomlar elbette biraz karmaşık olabilecek. Ardından bu aksiyomları, ileride kullanımlarını temellendireceğimiz yardımcı tanımlanmış imlerle ifade edeceğiz.

- **Uzantı Aksiyomu** (Uz):

$$\alpha_{ZF1} := \dot{\forall} x \dot{\forall} y \; (x \dot{=} y \leftrightarrow \dot{\forall} z \, (z \dot{\in} x \leftrightarrow z \dot{\in} y)).$$

  İki küme ancak ve ancak aynı öğeleri içeriyorlarsa eşittirler. Burada ilk $\leftrightarrow$ iminin $\rightarrow$ yönü Eşitlik İlksavları'nın bir sonucudur, dolayısıyla ilk $\leftrightarrow$ yerine $\leftarrow$ almak yeterlidir. Ancak bu şekil anlamı daha iyi vurgular.

- **Çift Küme Aksiyomu** (Çift):

$$\alpha_{ZF2} := \dot{\forall} x \dot{\forall} y \dot{\exists} z \dot{\forall} u \, (u \dot{\in} z \leftrightarrow (u \dot{=} x \curlyvee u \dot{=} y)) \, .$$

  x ve y küme iseler, yalnızca bunları öğe kabul eden bir z kümesi vardır. Bu aksiyomdaki z kümesi α_{ZF1}'den dolayı tek olarak belirlidir ve $\{x, y\}$ ile gösterilir.

- **Birleşim Aksiyomu** (Bir):

$$\alpha_{ZF3} := \dot{\forall} x \dot{\exists} y \dot{\forall} z (z \dot{\in} y \leftrightarrow \dot{\exists} u \, (u \dot{\in} x \curlywedge z \dot{\in} u)).$$

  Verilen her x kümesine karşılık öğeleri tamı tamına x kümesinin u öğelerinin öğelerinden oluşan bir y kümesi vardır. α_{ZF1}'den dolayı tek olarak belirli olan bu küme $\bigcup x$ ile gösterilir. $\bigcup \{y, z\}$ yerine $y \cup z$ yazılır.

- **Güç Kümesi Aksiyomu** (Güç):

$$\alpha_{ZF4} := \dot{\forall} x \dot{\exists} y \dot{\forall} z (z \dot{\in} y \leftrightarrow \dot{\forall} u \, (u \dot{\in} z \to u \dot{\in} x)).$$

Her x kümesine karşılık öğeleri tamı tamına x kümesinin altkümelerinden oluşan bir y kümesi vardır. α_{ZF1}'den dolayı α_{ZF4}'de varlığı ileri sürülen y kümesi tek olarak bellidir ve $\mathcal{P}(x)$ ile gösterilir. Ayrıca $\dot{\forall} u (u \dot{\in} z \to u \dot{\in} x)$ yerine $z \subseteq x$ yazarsak α_{ZF4} aksiyomu şu bildik şekli alır

$$\dot{\forall} x \dot{\exists} y \dot{\forall} z \, (z \dot{\in} y \leftrightarrow z \subseteq x) \, .$$

- **Temellendirme Aksiyomu** (Tem):

$$\alpha_{ZF5} := \dot{\forall} x (\dot{\exists} y \; y \dot{\in} x \to \dot{\exists} y (y \dot{\in} x \barwedge \dot{\forall} z \, (z \dot{\in} x \to \dot{\neg} z \dot{\in} y))).$$

Bir x kümesinin en az bir öğesi varsa $\dot{\in}$ bağıntısına göre bir minimal öğesi vardır; başka sözlerle azalan $\dot{\in}$ dizileri sonludur. Başka bir anlatımla x kümesinin en az bir öğesi varsa, kendisiyle ayrık olan bir öğesi vardır. (Tem) aksiyomu Kümeler Kuramı'nın olmazsa olmazı değildir. Onun aksiyom olarak alınmasının nedeni, bir kümenin kendisini öğe olarak içermesi gibi, sezgiye ters düşecek durumlardan korunmak içindir.

- **φ-Derleme Aksiyomu** (φ-Der): Her $\varphi = \varphi(z, y_1, \ldots, y_n) \in \operatorname{Fm} L_k$ için

$$\alpha^{\varphi}_{ZF6} := \dot{\exists} y \dot{\forall} z \, (z \dot{\in} y \leftrightarrow z \dot{\in} x \barwedge \varphi(z, y_1, \ldots, y_n)) \, .$$

Her $\varphi(z, y_1, \ldots, y_n)$ formülü her x kümesi ve her $y_1, \ldots, y_n$ için öğeleri tamı tamına $\varphi(z, y_1, \ldots, y_n)$'nin doğru olduğu z öğelerinden oluşan bir küme belirler. Bu küme $\{z \dot{\in} x \,|\, \varphi(z, y_1, \ldots, y_n)\}$ ile gösterilir.

- **Yerine Koyma Aksiyomu** (Yer): $\varphi = \varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{Fm} L_k$ formülünde $x, y \in \operatorname{Sb} \varphi$ olsun. $z, u, v \notin \deg \varphi$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha_{ZF7} := & \dot{\forall} x \dot{\exists}! y \; \varphi(x, y, \overline{x_n}) \to \\ & \dot{\forall} z \dot{\exists} u \dot{\forall} v \; (v \dot{\in} u \leftrightarrow \dot{\exists} w \, (w \dot{\in} z \barwedge \varphi(w, v, \overline{x_n}))). \end{aligned}$$

φ formülü $\overline{x}$ parametrelerine bağlı olarak bir $y = f(x)$ fonksiyonu tanımlıyorsa her z kümesi için bu kümenin $f\,[z]$ resmi de bir kümedir. Buraya kadar olan aksiyomlarımız herhangi bir kümenin varlığını istemezler. Onlar yalnızca var olan kümelerden başka kümelerin nasıl elde edileceğini söylerler. Eğer tüm matematiği Kümeler Kuramı üzerine oturtmak istiyorsak bu kuram en azından doğal sayıları kazanmamıza

izin vermelidir. Öyleyse kümeler kuramımızın her modelinin sonsuz olmasını sağlayacak bir aksiyoma gereksinimiz vardır. Şimdi vereceğimiz aksiyom bunu sağlar ve bu ilk kez bir kümenin varlığının istendiği aksiyomdur.

- **Sonsuzluk Aksiyomu** (Soz):

$$\alpha_{ZF8} := \dot{\exists} x(\dot{\exists} y\ y \dot{\in} x \dot{\wedge} \dot{\forall} y\,(y \dot{\in} x \to y \cup \{y\} \dot{\in} x)).$$

Burada $\{y\}$ gösterimi $\{y, y\}$ yerine kullanılmıştır. Önce $y \cup \{y\} \dot{\in} x$ ifadesinin gerçekte yerini aldığı $\mathrm{Fm}\, L_k$ formülünü yazalım:

$$\dot{\exists} z(z \dot{\in} x \dot{\wedge} \dot{\forall} w\,(w \dot{\in} z \leftrightarrow (w \dot{\in} y \dot{\vee} w \dot{=} y))).$$

Sonsuzluk aksiyomu en az bir öğesi olan ve herhangi bir y öğesini içeriyorsa $y \cup \{y\}$ öğesini de içeren bir x kümesinin varlığını ister. Peki (Soz) aksiyomu kuramımızın sonsuz olmasını nasıl garanti eder? x (Soz) aksiyomunun garanti ettiği küme ve $y \dot{\in} x$ olsun. Her $z \in x$ için $z' := z \cup \{z\}$ olarak tanımlanırsa $y, y', y'', \ldots$ öğeleri x kümesinin birbirinden farklı öğeleridir. Bu ipucu yeterlidir!

$\Lambda_{ZF} := \{\alpha_{ZF1}, \ldots, \alpha_{ZF8}\}$ olmak üzere $\mathcal{K}_{ZF} := (L_k, \Lambda_{FK})$ biçimsel **Zermelo-Fraenkel Kümeler Kuramımızdır.** Bu kuramın aksiyomlarına *seçme aksiyomunu* da eklersek **ZFC** kuramını elde ederiz. Son olarak şunu belirtelim. Genelde ZF kuramının aksiyomları arasına boş küme aksiyomu da katılır.

- **Boş Küme Aksiyomu** (Boş):

$$\alpha_{ZFb} := \dot{\exists} x \dot{\forall} y\ \dot{\neg} y \dot{\in} x.$$

Bu aksiyom hiçbir öğesi olmayan bir kümenin varlığını ister. α_{ZF1}'den dolayı tek olarak belirli bu öğe $\emptyset$ tanımlanmış imi ile gösterilir.

(Boş) aksiyomu (Soz) aksiyomundan önce verilir ve (Soz) aşağıdaki biçimde verilir:

$$\alpha^*_{ZF8} := \dot{\exists} x \left(\emptyset \dot{\in} x \dot{\wedge} \dot{\forall} y\,(y \dot{\in} x \to y \cup \{y\} \dot{\in} x)\right).$$

Ancak α_{ZFb} gereksizdir. Gerçekten de α_{FZ8} aksiyomunun garanti ettiği bir küme x ve $\varphi(y) := \dot{\neg} y \dot{=} y$ olmak üzere α^{φ}_{FZ6} aksiyomu bir $\{y \in x \,|\, \varphi(y)\}$ kümesinin varlığını garanti eder. Bu küme hiçbir öğesi olmayan boş kümemizden başkası değildir.

G) $\mathcal{K}_{\leq n}$, $\mathcal{K}_{\geq n}$, $\mathcal{K}_{=n}$ ve $\mathcal{K}_{\infty}$ kuramları: Bu kuramların dili olarak $L_{\emptyset} := \emptyset$ alınır. $n \geq 2$ ve $x_1, \ldots, x_n$ birbirinden farklı değişkenler olmak üzere

$$\sigma_{\geq n} := \dot{\exists}\overline{x_n}\ \neg x_1 \doteq x_2 \wedge \cdots \wedge \neg x_1 \doteq x_n \wedge \neg x_2 \doteq x_3 \wedge \cdots \wedge \neg x_{n-1} \doteq x_n$$
$$\sigma_{\leq n} := \dot{\forall} x, \overline{x_n}\ x \doteq x_1 \vee \cdots \vee x \doteq x_n \vee x_1 \doteq x_2 \vee \cdots \vee x_{n-1} \doteq x_n$$
$$\sigma_{=n} := \varphi_{\leq n} \wedge \varphi_{\geq n} \qquad \text{ve} \qquad \Sigma_{\infty} := \{\sigma_{\geq n} \mid n \geq 2\}$$

olarak açıklansın. $\sigma_{\leq n}$ formülü $n = 1$ için de anlamlıdır. $\mathcal{K}_{\leq n} := (\emptyset, \{\sigma_{\leq n}\})$ kuramının modelleri $|A| \leq n$ olan A kümeler, $\mathcal{K}_{\geq n} := (\emptyset, \{\sigma_{\geq n}\})$ kuramının modelleri $|A| \geq n$ olan A kümeler, $\mathcal{K}_{=n} := (\emptyset, \{\sigma_{=n}\})$ kuramının modelleri n öğeli A kümeler ve $\mathcal{K}_{\infty} := (\emptyset, \Sigma_{\infty})$ kuramının modelleri ise sonsuz A kümeleridir.

3.11 Temel Biçimsel Teoremler

Bu kesimde daha önce kanıtladığımız mantıksal çıkarımların bazılarının biçimselleştirilmiş kanıtlarını vereceğiz. φ formülünün bir biçimsel teorem veya bir Γ-biçimsel teoremi olduğunu göstermek için $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi$ gibi bir biçimsel kanıt veya bir Γ-biçimsel kanıtı vermeliyiz. Bu yaklaşımda $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi$ dizisi bir Γ-biçimsel kanıt iken "$\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi$ *dizisi* φ*'nin bir* Γ*-biçimsel kanıtıdır*" önermesi elbette bir sözeden teoremdir. Bu kesimdeki teoremlerimiz bu tipten sözeden teoremler olacaklar ve kanıtları da elbette tüm diğer matematik alanlarında olduğu gibi içeriksel kanıtlar olacaklardır. Yeterince anlaşıldığını düşündüğümüz bu konuya son kez değinmiş olduk.

Biçimsel çıkarım kurallarımız, mantıksal çıkarım kurallarımızı biçimsel kuramımıza yansıtan kurallar olacaklardır. Bu türetilmiş çıkarım kuralları-mızı

$$(\divideontimes \text{ ise}) \quad \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$$

kalıbında verecek ve bunu "(eğer $\divideontimes$ ise) φ *formülü* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *formüllerinden biçimsel olarak çıkar*" veya "(eğer $\divideontimes$ ise) φ *formülü* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *formüllerinin biçimsel sonucudur*" diye okuyacağız. ($\divideontimes$ ise) koşulu olmayabilir!

Teorem 3.11.1 (Dosdoğru (Totoloji) Teoremi) *Her dosdoğru bir biçimsel teoremidir, dd.* $\Vdash_{\text{om}} \varphi$ *ise* $\vdash \varphi$. *Ayrıca* $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ *için* $\Gamma \vdash_{\text{om}} \varphi$ *ise* $\Gamma \vdash \varphi$.

Kanıt. φ bir dosdoğru ise $\operatorname{Fm} L = \operatorname{Omf} P_L$'nin bir $\psi(p_1, \ldots, p_n)$ gibi hepdoğrusundan, geçtiği her yerde p_i yerine bir $\varphi_i \in \operatorname{Fm} L$ yazarak elde edilmiştir. İkinci bölümde gördüğümüz gibi ψ formülünün yalnızca $p_1, \ldots, p_n$

değişkenlerini, ilk üç mantık ilksavını ve modus ponens çıkarım kuralını kullanan bir bkanıtı vardır. Bu bkanıtta geçtiği her yerde p_i yerine φ_i yazarsak φ'nin bir bkanıtını elde ederiz. İkinci sav için (3.9.12)'ye bakınız. ■

Not 3.11.2 (3.11.1)'den dolayı genelde $\sigma_1(\varphi,\ \psi)$, $\sigma_2(\varphi,\psi,\eta)$ ve $\sigma_3(\varphi,\psi)$ şemaları yerine aşağıdaki Dosdoğru İlksavı alınır:

(DD) Dosdoğru İlksavı: Her dosdoğru bir mantık ilksavıdır.

Elbette bu ilksav çok şey ister. ▲

- **Önemli Not:** İkinci bölümü, Kesim 2.7 de dahil, tümüyle atlamak isteyen bir okur mantık ilksavları olarak aldığımız $\sigma_1(\varphi,\psi)$, $\sigma_2(\varphi,\psi,\eta)$ ve $\varphi_3(\varphi,\psi)$ ilksavlarından vazgeçerek, onların yerine onlardan çok daha güçlü olan (DD)'yi alıp diğer aksiyom ve çıkarım kurallarını aynen koruyabilir ve

$$\varphi \vdash_{\mathrm{om}} \psi \iff \varphi \to \psi \text{ dosdoğru} \tag{3.25}$$

  olduğu kolayca gösterilir. Bunun bir sonucu olarak $\varphi \to \psi$ bir dosdoğru ise $\varphi \vdash \psi$ olur. İkinci bölümü tümüyle atlayanlar için bu bilgi yeterlidir.

Aşağıda önermeler mantığından kazanılan bazı temel çıkarım kuralları vereceğiz. Örneğin $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$. İkinci bölüm atlandıysa, bunu görmek için $\neg\neg\varphi \to \varphi$ formülünün bir dosdoğru olduğunu, dd. φ'nin doğruluk değeri ne olursa olsun $\neg\neg\varphi \to \varphi$ formülünün doğruluk değerinin bir olduğunu görmek yeterlidir. (3.25)'ten tümevarımla kolayca $\varphi_1,\ldots,\varphi_n \vdash_{\mathrm{om}} \psi$ olması için $\varphi_1 \to \cdots \to \varphi_n \to \psi$'nin dosdoğru olmasının gerek ve yeterli olduğu görülür.

(3.11.1) bize önermeler mantığından bir çok türetilmiş biçimsel çıkarım kuralları verir. Bunlardan çok kullanılan bazılarını vereceğiz. $\diamond$ herhangi bir önermemantıksal im olmak üzere bunların çoğu **$\diamond$-atma** veya **$\diamond$-katma** başlıkları altında verilecektir. Bunları ise $\diamond A$ ve $\diamond K$ olarak kısaltacağız.

Temel Türetilmiş Biçimsel Çıkarım Kuralları:

$\varphi,\psi,\eta,\theta \in \mathrm{Fm}\,L$ olmak üzere:

- $\neg A$: $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$.
- $\neg K$: $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$.
- $\curlywedge A$: $\varphi \curlywedge \psi \vdash \varphi$; $\varphi \curlywedge \psi \vdash \psi$; $\neg(\varphi \curlywedge \psi) \vdash \neg\varphi \curlyvee \neg\psi$.

- $\curlywedge K$: $\varphi, \psi \vdash \varphi \curlywedge \psi$.
- $\curlyvee A$: $\varphi \curlyvee \psi, \neg\varphi \vdash \psi$; $\varphi \curlyvee \psi, \neg\psi \vdash \varphi$; $\neg(\varphi \curlyvee \psi) \vdash \neg\varphi \curlywedge \neg\psi$; $\varphi \to \eta$, $\psi \to \eta$, $\varphi \curlyvee \psi \vdash \eta$.
- $\curlyvee K$: $\varphi \vdash \varphi \curlyvee \psi$; $\psi \vdash \varphi \curlyvee \psi$.
- $\to A$: $\varphi \to \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi$; $\varphi \to \neg\psi, \psi \vdash \neg\varphi$; $\neg\varphi \to \psi, \neg\psi \vdash \varphi$; $\neg\varphi \to \neg\psi, \psi \vdash \varphi$; $\neg(\varphi \to \psi) \vdash \varphi$; $\neg(\varphi \to \psi) \vdash \neg\psi$.
- $\to K$: $\varphi, \neg\psi \vdash \neg(\varphi \to \psi)$.
- $\leftrightarrow A$: $\varphi \leftrightarrow \psi, \varphi \vdash \psi$; $\varphi \leftrightarrow \psi, \psi \vdash \varphi$; $\varphi \leftrightarrow \psi, \neg\varphi \vdash \neg\psi$; $\varphi \leftrightarrow \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi$; $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \varphi \to \psi$; $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \psi \to \varphi$.
- $\leftrightarrow K$: $\varphi \to \psi, \psi \to \varphi \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.
- $\leftrightarrow$ olumsuzlama: $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi$; $\neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.
- Karşı konumlar: $\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$; $\varphi \to \neg\psi \vdash \psi \to \neg\varphi$;
- $\neg\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \varphi$; $\neg\varphi \to \neg\psi \vdash \psi \to \varphi$.
- Zincir Kuralı: $\varphi \to \psi, \psi \to \eta \vdash \varphi \to \eta$.

Teorem 3.11.3 (Ayırma Kuralı) *$\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi \in \operatorname{Fm} L$ ve $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ ise*

(*a*) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi_1 \to \varphi_2 \to \cdots \to \varphi_n \to \psi \vdash \psi$.
(*b*) $\Gamma \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *ve* $\Gamma \vdash \varphi_1 \to \varphi_2 \to \cdots \to \varphi_n \to \psi$ *ise* $\Gamma \vdash \psi$.

Sonuç 3.11.4 *$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ ve $\Gamma \vdash \varphi \to \eta$ ise $\Gamma \vdash \varphi \to \psi \curlywedge \eta$.*

Kanıt. (a) $1 \leq k \leq n$ için

$$\eta_k := \varphi_k \to \varphi_{k+1} \to \cdots \to \varphi_n \to \psi$$

olsun. Bu durumda

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \psi$$

dizisi ψ formülünün $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \eta_1\}$-bkanıtıdır. Her defasında (MP) uygulanarak sırasıyla φ_1, η_1 formüllerinden η_2 formülü, φ_2, η_2 formüllerinden η_3 formülü ve böyle devam ederek φ_n, η_n formüllerinden ψ çıkarılmıştır.

(b) Şimdi $\Gamma \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \eta_1$ olsun. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \eta_1 \vdash \psi$ olduğundan $\Gamma \vdash \psi$ olur.

Sonucun kanıtı: $\varphi_1 := \varphi \to \psi$, $\varphi_2 := \varphi \to \eta$ ve $\psi' := (\varphi \to \psi \curlywedge \eta)$ olsun. $\Gamma \vdash \varphi_1, \varphi_2$ ve $\varphi_1 \to \varphi_2 \to \psi'$ bir dosdoğru olduğundan $\Gamma \vdash \varphi_1 \to \varphi_2 \to \psi'$ olur. Teoremimizden $\Gamma \vdash \psi'$ elde ederiz ki bu savımızdır. ■

Teorem 3.11.5 (Post Teoremi) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi \in \operatorname{Fm} L$ *olsun.*

$$\vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n \text{ ve } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash_{\mathrm{om}} \psi \text{ ise } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi.$$

Kanıt. (2.7.10)'dan dolayı

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash_{\mathrm{om}} \psi \text{ ise } \vdash_{\mathrm{om}} \varphi_1 \to \varphi_2 \to \cdots \to \varphi_n \to \psi.$$

Dolayısıyla (3.11.1)'den $\vdash \varphi_1 \to \varphi_2 \to \cdots \to \varphi_n \to \psi$. (3.11.3)'te $\Gamma = \emptyset$ alırsak $\vdash \psi$. ■

Önermeler mantığından

$$\begin{aligned} \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash_{\mathrm{om}} \psi \quad &\iff \quad \varphi_1 \curlywedge \cdots \curlywedge \varphi_n \vdash_{\mathrm{om}} \psi \\ &\iff \quad \vdash_{\mathrm{om}} \varphi_1 \to \varphi_2 \to \cdots \to \varphi_n \to \psi \end{aligned} \tag{3.26}$$

olduğunu biliyoruz. Bu nedenle Post Teoremi'nin ön koşulu olarak buradaki eşdeğer ifadelerin herhangi birini seçebiliriz. Ayırma kuralı ve Post Teoremi *türetilmiş çıkarım kurallarıdırlar.* Kanıtlanmış her Γ biçimsel teoremini biçimsel kanıtlarımızda bir ilksavmış gibi kullanabiliyorsak, kazandığımız her türetilmiş çıkarım kuralını da, baştan verilmiş (MP) ve (Gen) çıkarım kuralları gibi kullanabiliriz.

Omf $P_L = \operatorname{Fm} L$'deki her önermemantıksal biçimsel kanıt aynı zamanda elbette şimdi de bir biçimsel kanıt olduğundan orada kazandığımız türetilmiş çıkarım kuralları burada da geçerlidir.

Herhangi bir yerde gerekçe olarak (Post) türetilmiş çıkarım kuralını verirsek, bunlar Temel Türetilmiş Biçimsel Çıkarım Kurallarında verilenler dışında iseler, okurun kolayca göreceğini umduğumuz, Post Teoremi'nin özel uygulamaları anlaşılacaktır.

Not 3.11.6 Önermeler mantığında $\Gamma, \varphi \vdash_{\mathrm{om}} \psi \iff \Gamma \vdash_{\mathrm{om}} \varphi \to \psi$ olduğunu kanıtlamıştık. Son derece kullanışlı olan bu teoremi olduğu gibi birinci dereceden kuramlara aktarabilir miyiz? Diğer deyişle $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ ve $\varphi, \psi \in \operatorname{Fm} L$ olmak üzere $\Gamma, \varphi \vdash \psi \iff \Gamma \vdash \varphi \to \psi$? Bunun $\Longleftarrow$ yönü koşulsuz doğrudur. Gerçekten $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ ise $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ ve $\Gamma, \varphi \vdash \varphi \to \psi$ olacağından (MP) ile $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ elde edilir. Tersine $\Gamma, \varphi \vdash \psi \implies \Gamma \vdash \varphi \to \psi$ yönü her zaman doğru değildir. En basit şekliyle her φ formülü için (Gen) ile $\varphi \vdash \dot{\forall} x \varphi$. (3.7.16)'da $\Gamma, \varphi \Vdash \psi \implies \Gamma \Vdash \varphi \to \psi$ önermesinin her zaman doğru olmadığını örneklemiş ve (3.7.17)'de ise $\varphi \in \operatorname{Sav} L$ olduğunda bunun doğru olduğunu kanıtlamıştık. (3.9.14)'te ise $\Omega \vdash \eta$ ise $\Omega \Vdash \eta$ olduğunu kanıtladık. $\Gamma, \varphi \vdash \psi \implies \Gamma \vdash \varphi \to \psi$ her zaman doğru olsaydı, $\Gamma, \varphi \Vdash \psi \implies \Gamma \Vdash \varphi \to \psi$ daima doğru olurdu ki bunun böyle olmadığını biliyoruz. Şimdi (3.9.14) teoremini daha genel olarak biçimselleştireceğiz.

Verdiğimiz bu basit karşı örnekte olduğu gibi (Gen) çıkarım kuralı bir şekilde işe karışacaktır.

Her φ için $\vdash \varphi \to \dot\forall x\varphi$? Buna yanıtımız hayır olacaktır! Örneğin c nesnesi L dilimizin bir sabiti olmak üzere $\varphi = (x \doteq c)$ olsun. $\mathfrak{A}$ yapısının evreni en az iki öğe içerdiğinde $\dot\forall x\varphi(x)$ formülü, ki bu bir savdır, *her* $\beta \in N^{\mathfrak{A}}$ değerlemesinde yanlıştır. Buna karşın φ formülü $\beta(x) = c^{\mathfrak{A}}$ koşulunu sağlayan her β değerlemesinde doğrudur. Dolayısıyla $\varphi(x) \to \dot\forall x\varphi(x)$ doğru değildir ve bir biçimsel teorem olamaz, dd. $\varphi \vdash \dot\forall x\varphi$ ancak $\nvdash \varphi \to \dot\forall x\varphi$! Bu örnekte $x \in \operatorname{Sb}\varphi$ ve $\varphi \vdash \dot\forall x\varphi$ çıkarımında x üzerinden (Gen) uygulanmıştır. Aşağıda bunu dışlamanın yeterli olacağını kanıtlayacağız. ▲

Teorem 3.11.7 (Çıkarım Teoremi) $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ *ve* $\varphi, \psi \in \operatorname{Fm} L$ *olsunlar.*

1. $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ *ise* $\Gamma, \varphi \vdash \psi$.

2. $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ *çıkarımında* φ *formülünün herhangi bir serbest değişkeni üzerinden (Gen) çıkarım kuralı kullanılmamışsa* $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

3. $\sigma \in \operatorname{Sav} L$ *ise* $\Gamma, \sigma \vdash \psi \iff \Gamma \vdash \sigma \to \psi$.

Kanıt. (1) (3.11.6)'da gösterildi.

(2) $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ ve $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ise ψ'nin bir $\Gamma \cup \{\varphi\}$-bkanıtı olsun. i üzerinden tümevarımla her $i \in \{1, \ldots, n\}$ için $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi_i$ olduğunu kanıtlayacağız. Bu kanıtlandığında $\psi = \varphi_n$ olduğundan $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ olur ve işimiz biter. $i \in \{1, \ldots, n\}$ ve her $j \in \{1, \ldots, i-1\}$ için $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi_j$ olsun.

(2a) $\Gamma \vdash \varphi_i$ olsun. Bu ve $\varphi_i \to (\varphi \to \varphi_i)$ dosdoğrusundan (MP) ile $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi_i$ elde ederiz.

(2b) $\Gamma \nvdash \varphi_i$ olsun. Bu durumda $\varphi_i \notin \Gamma \cup \Lambda_m$. Eğer $\varphi_i = \varphi$ ise $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi_i$ doğrudan $\varphi \to \varphi$ dosdoğrusundan elde edilir. Geriye φ_i'nin kendinden önce gelen $\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}$ formüllerinden çıkarım kurallarımızla elde edildiği durumlar kalıyor.

$j, k \in \{1, \ldots, i-1\}$ olmak üzere φ_i formülü φ_j ve $\varphi_k = (\varphi_j \to \varphi_i)$ formüllerinden (MP) ile kazanılmış olsun. Tümevarım koşulumuzdan dolayı $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi_j$ ve $\Gamma \vdash \varphi \to (\varphi_j \to \varphi_i)$. Bu biçimsel çıkarımlardan ve

$$(\varphi \to (\varphi_j \to \varphi_i)) \to ((\varphi \to \varphi_j) \to (\varphi \to \varphi_i))$$

dosdoğrusundan iki kez (MP) kullanılarak önce $\Gamma \vdash (\varphi \to \varphi_j) \to (\varphi \to \varphi_i)$ ardından da $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi_i$ elde edilir.

Son olarak $x \notin \operatorname{Sb}\varphi$ ve $j \in \{1, \ldots, i-1\}$ olmak üzere $\varphi_i = \dot\forall x\varphi_j$ olsun, dd. φ_i formülümüz φ_j formülünden, φ formülünde serbest olmayan bir x

değişkeni üzerinden (Gen) uygulanarak elde edilmiş olsun.

$$\begin{array}{lll}
(a) & \varphi \to \varphi_j & vrs \\
(b) & \dot{\forall} x\,(\varphi \to \varphi_j) & (a)\,,\ (Gen) \\
(c) & \dot{\forall} x\,(\varphi \to \varphi_j) \to (\varphi \to \dot{\forall} x \varphi_j) & \sigma_5(\varphi, \varphi_j, x) \\
(d) & \varphi \to \dot{\forall} x \varphi_j = \varphi \to \varphi_i & (b)\,,(c)\,,(MP)
\end{array}$$

olduğundan $\varphi \to \varphi_j \vdash \varphi \to \varphi_i$ elde ederiz. Buradan ve $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi_j$ tümevarım koşulundan geçişlilik ile $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi_i$ olur.

(3) doğrudan (2)'den çıkar. ■

- Çıkarım Teoremi, mantıksal çıkarımlarda en sık baş vurduğumuz yöntemi biçimselleştirir: $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ kanıtlanmak istendiğinde, "$\Gamma \vdash \varphi$ olduğunu varsayalım" diyerek φ savı Γ ilksavlarına eklenir ve $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ kanıtlanır. φ bir savsa veya $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ kanıtı (3.11.7)'nin koşulları sağlandığında da $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ gösterilmiş olur.

Örnek 3.11.8 $x \notin \mathrm{Sb}\,\varphi$ ise $\vdash (\varphi \to \dot{\forall} x \psi) \to \dot{\forall} x\,(\varphi \to \psi)$ olduğunu görelim.

$$\begin{array}{lll}
(1) & \varphi \to \dot{\forall} x \psi & vrs \\
(2) & \dot{\forall} x \psi \to \psi & \sigma_4(\psi, x, x) \\
(3) & \varphi \to \psi & (1), (2),\ Zincir\ Kuralı \\
(4) & \dot{\forall} x\,(\varphi \to \psi) & (3),\ (Gen).
\end{array}$$

Dolayısıyla $\varphi \to \dot{\forall} x \psi \vdash \dot{\forall} x\,(\varphi \to \psi)$. Bu çıkarımda bir kez x ile (Gen) kullanılmıştır. Ancak $x \notin \mathrm{Sb}(\varphi \to \dot{\forall} x \psi)$ olduğundan (3.11.7) savı verir. ▲

Örnek 3.11.9 $\vdash \dot{\forall} x \dot{\forall} y \varphi \to \dot{\forall} y \dot{\forall} x \varphi$ olduğunu kanıtlayınız.

$$\begin{array}{lll}
(1) & \dot{\forall} x \dot{\forall} y \varphi & vrs \\
(2) & \dot{\forall} x \dot{\forall} y \varphi \to \dot{\forall} y \varphi & \sigma_4(\dot{\forall} y \varphi, x, x) \\
(3) & \dot{\forall} y \varphi & (1), (2), (MP) \\
(4) & \varphi & (3), \sigma_4(\varphi, y, y) \\
(5) & \dot{\forall} x \varphi & (4), (Gen) \\
(6) & \dot{\forall} y \dot{\forall} x \varphi & (5), (Gen).
\end{array}$$

Dolayısıyla $\dot{\forall} x \dot{\forall} y \varphi \vdash \dot{\forall} y \dot{\forall} x \varphi$. Bu çıkarımda x ve y değişkenleri üzerinden (Gen) kullanılmıştır. Ancak $x, y \notin \mathrm{Sb}(\dot{\forall} x \dot{\forall} y \varphi)$ olduğundan (3.11.7) ile sav elde edilir. Okur benzer biçimde $\vdash \dot{\forall} y \dot{\forall} x \varphi \to \dot{\forall} x \dot{\forall} y \varphi$ olduğunu kanıtlayabilir. ▲

Aşağıda vereceğimiz bazı teoremleri, $Q \in \{\dot{\forall}, \dot{\exists}\}$ olmak üzere **Q-atma** ve **Q-katma** olarak sınıflandıracağız ve bunları ise yalın olarak QA ve QK

ile göstereceğiz. Vereceğimiz formül dizileri, daha önce kanıtlanmış teoremler kullanacaklarından bunlar bkanıt taslakları olacaklardır; ancak bunlar bilindiği gibi bir biçimsel kanıta uzatılabilirler.

Teorem 3.11.10 ($\dot{\forall}A$) $\mathrm{Sb}(\varphi, x|t)$ *ise*

$$\Gamma \vdash \dot{\forall}x\varphi \implies \Gamma \vdash \varphi(x|t)$$

ve

$$\dot{\forall}x\varphi \vdash \varphi(x|t).$$

Özel olarak: $\dot{\forall}x\varphi \vdash \varphi$.

Kanıt. $\mathrm{Sb}(\varphi, x|t)$ olsun. $\ldots, \dot{\forall}x\varphi$ bir Γ-bkanıt ise

$$\ldots \dot{\forall}x\varphi, \dot{\forall}x\varphi \to \varphi(x|t), \varphi(x|t)$$

dizisi $\varphi(x|t)$ formülünün bir Γ-bkanıtı,

$$\dot{\forall}x\varphi, \dot{\forall}x\varphi \to \varphi(x|t), \varphi(x|t)$$

dizisi ise $\{\dot{\forall}x\varphi\}$'den $\varphi(x|t)$'nin bir biçimsel kanıtıdır. Her iki dizide de $\varphi(x|t)$ formülü kendinden önce gelenlerden (MP) ile kazanılmıştır. $t = x$ ile buradan $\dot{\forall}x\varphi \vdash \varphi$ elde edilir. ■

$$\mathrm{Sb}(\varphi, x|t) \text{ ise } \dot{\forall}x\varphi \vdash \varphi(x|t) \tag{3.27}$$

bir türetilmiş biçimsel çıkarım kuralıdır. $\dot{\forall}$-atma teoremini kısaca $(\dot{\forall}A)$ ile göstereceğiz. Bu teoreme **Özelleştirme Teoremi** de denir.

Teorem 3.11.11 ($\dot{\forall}K$) $\varphi, \psi \in \mathrm{Fm}\, L$, $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}\, L$ *ve* $x \in \mathcal{V}$ *olsun.*

(1) $\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vdash \dot{\forall}x\varphi \iff \Gamma \vdash \varphi^{\dot{\forall}}$.

(2) $\Gamma, \varphi \vdash \psi \iff \Gamma, \dot{\forall}x\varphi \vdash \psi$.

(3) $\Gamma, \varphi \vdash \psi \iff \Gamma, \varphi^{\dot{\forall}} \vdash \psi$.

Sonuç 3.11.12 $\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma^{\dot{\forall}} \vdash \varphi \iff \Gamma^{\dot{\forall}} \vdash \varphi^{\dot{\forall}}$.

Kanıt. (1) Önce ilk denkliği kanıtlayacağız.

$\implies$: $\ldots, \varphi$ bir Γ-bkanıt ise $\ldots, \varphi, \dot{\forall}x\varphi$ dizisi de (Gen) ile uzatılmış bir Γ-bkanıtıdır.

$\impliedby$: $\ldots, \dot{\forall}x\varphi$ bir Γ-bkanıt ise $\dot{\forall}$-atma ile $\ldots, \dot{\forall}x\varphi, \varphi$ bir Γ-bkanıttır. $x_i = v_{\alpha_i}$ olmak üzere $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ ise

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vdash \dot{\forall}x_1\varphi \iff \cdots \iff \Gamma \vdash \dot{\forall}x_n \cdots \dot{\forall}x_1\varphi \iff \Gamma \vdash \varphi^{\dot{\forall}}.$$

(2) $\Longrightarrow$: $\ldots, \varphi, \ldots, \psi$ bir $\Gamma \cup \{\varphi\}$-bkanıt ise $\dot\forall$-atma ile $\ldots$, $\dot\forall x\varphi$, φ, $\ldots$, ψ bir $\Gamma \cup \{\dot\forall x\varphi\}$-bkanıttır.

(2) $\Longleftarrow$: $\ldots, \dot\forall x\varphi, \ldots, \psi$ bir $\Gamma \cup \{\dot\forall x\varphi\}$-bkanıt ise $\ldots$, φ, $\dot\forall x\varphi$, $\ldots, \psi$, (Gen) ile uzatılmış bir $\Gamma \cup \{\varphi\}$-bkanıttır.

(3) Bu denklik (2)'den sonlu adımda elde edilir.

Sonucun kanıtı: $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ bir Γ-bkanıt olmak üzere (3.11.11)(3) n kez art arda uygulanarak

$$\begin{aligned} \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \quad &\Longleftrightarrow \quad \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi_n^{\dot\forall} \vdash \psi \\ &\Longleftrightarrow \quad \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}^{\dot\forall}, \varphi_n^{\dot\forall} \vdash \psi \\ &\vdots \\ &\Longleftrightarrow \quad \varphi_1^{\dot\forall}, \ldots, \varphi_n^{\dot\forall} \vdash \psi \end{aligned}$$

elde edilir. Her Γ-bkanıt, uygun sonlu formülle bu denkliklerin sol ucu, her $\Gamma^{\dot\forall}$-bkanıt ise sağ ucu gibi olduğundan $\Gamma \vdash \psi \iff \Gamma^{\dot\forall} \vdash \psi$ aşikârdır. Teoremimizin (1) kısmından ise $\Gamma^{\dot\forall} \vdash \psi \iff \Gamma^{\dot\forall} \vdash \psi^{\dot\forall}$ olduğunu biliyoruz ve bkb. ■

(3.11.12)'den dolayı savlardan oluşan $\Gamma \subset \operatorname{Sav} L$ altkümeleriyle çalışmak yeterlidir.

Şimdi $\sigma_4(\varphi, x, t)$ ve $\sigma_5(\varphi, \psi, x)$ ilksavlarının ikilileri diyeceğimiz iki biçimsel teorem öğreneceğiz.

Teorem 3.11.13 ($\dot\exists K$) $\operatorname{Sb}(\varphi, x|t)$ *ise*

$$\vdash \varphi(x|t) \to \dot\exists x\varphi.$$

$\sigma_4'(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{x}, \mathbf{t}) := \varphi(x|t) \to \dot\exists x\varphi.$

Sonuç 3.11.14 $\dot\exists$K : $\operatorname{Sb}(\varphi, x|t)$ *olsun. Bu durumda*

1. $\Gamma \vdash \varphi(x|t)$ *ise* $\Gamma \vdash \dot\exists x\varphi$, *ve*
2. $\varphi(x|t) \vdash \dot\exists x\varphi$. *Özel olarak:* $\varphi \vdash \dot\exists x\varphi$.

Kanıt. $\operatorname{Sb}(\varphi, x|t)$ olsun. Bu durumda

$$\dot\forall x\neg\varphi \to \neg\varphi(x|t), \varphi(x|t) \to \neg\dot\forall x\neg\varphi, \varphi(x|t) \to \dot\exists x\varphi$$

dizisi $\varphi(x|t) \to \dot\exists x\varphi$ formülünün bir biçimsel kanıtıdır. Bu dizideki ikinci formül birinciden $\xi \to \neg\eta \vdash \eta \to \neg\xi$ türetilmiş biçimsel çıkarım kuralı ile kazanılmıştır. Son formülde ise $\dot\exists$ tanımı kullanılmıştır. Bu kanıtı bir de Hilbert tipi dikey sütun ve sağda gerekçeleriyle yazalım.

(1)	$\dot\forall x\neg\varphi \to \neg\varphi(x\|t)$	$\sigma_4(\neg\varphi, x\|t)$.
(2)	$\varphi(x\|t) \to \neg\dot\forall x\neg\varphi$	(1) ve karşı konum.
(3)	$\varphi(x\|t) \to \dot\exists x\varphi$	$\dot\exists$'ın tanımı.

Sonucun kanıtı: $\Gamma \vdash \varphi(x|t)$ olsun. (3.11.13)'ten $\Gamma \vdash \varphi(x|t) \to \dot{\exists} x\varphi$. Bu ikisinden (MP) ile $\Gamma \vdash \dot{\exists} x\varphi$ olur.

$$\varphi(x|t), \varphi(x|t) \to \dot{\exists} x\varphi, \dot{\exists} x\varphi$$

ise bir genelleştirilmiş $\{\varphi(x|t)\}$ biçimsel kanıttır, dolayısıyla $\varphi(x|t) \vdash \dot{\exists} x\varphi$ ve buradan $t = x$ ile $\varphi \vdash \dot{\exists} x\varphi$. ■

Teorem 3.11.15 *1.* $\dot{\forall}\mathbf{K}$: $x \notin \operatorname{Sb}\varphi$ *ise* $\varphi \to \psi \vdash \varphi \to \dot{\forall} x\psi$.

2. $\dot{\exists}\mathbf{K}$: $x \notin \operatorname{Sb}\psi$ *ise* $\varphi \to \psi \vdash \dot{\exists} x\varphi \to \psi$.

3. $\boldsymbol{\sigma}'_5(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}) := \dot{\forall} x\,(\varphi \to \psi) \to (\dot{\exists} x\varphi \to \psi)$ *olmak üzere* $\vdash \sigma'_5(\varphi, \psi, x)$.

Kanıt. (1)

(1)	$\varphi \to \psi$	$x \notin \operatorname{Sb}\varphi$, *önsav*
(2)	$\dot{\forall} x\,(\varphi \to \psi)$	(1), (Gen)
(3)	$\dot{\forall} x\,(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \dot{\forall} x\psi)$	$\sigma_5(\varphi, \psi, x)$
(4)	$\varphi \to \dot{\forall} x\psi$	(2), (3), (MP)

(2)

(1)	$\varphi \to \psi$	$x \notin \operatorname{Sb}\psi$, vrs
(2)	$\neg\psi \to \neg\varphi$	(1)'in karşı konumu, $x \notin \operatorname{Sb}\neg\psi$
(3)	$\neg\psi \to \dot{\forall} x\neg\varphi$	Teoremin 1.kısmı
(4)	$\neg\dot{\forall} x\neg\varphi \to \psi$	(3)'ün karşı konumu
(5)	$\dot{\exists} x\,\varphi \to \psi$	$\dot{\exists}$'ın tanımı.

(3) 2.cinin kanıtının başına (0) $\dot{\forall} x\,(\varphi \to \psi)$ satırını koyarsak (1) satırı buradan özelleştirme ile elde edilir ve biz $\dot{\forall} x\,(\varphi \to \psi) \vdash \dot{\exists} x\varphi \to \psi$ elde ederiz. buradan da çıkarım kuralı ile $\vdash \sigma'_5(\varphi, \psi, x)$ elde edilir. ■

- Bir an için ara verip $\varphi \to \dot{\forall} x\psi(x)$ gibi bir önermeyi matematik derslerinde nasıl kanıtladığımızı düşünelim. "φ doğru olsun ve x keyfi verilsin" diye kanıta başlar ve $\psi(x)$'i kanıtlarız. "x keyfi olduğundan her x için $\psi(x)$ doğrudur" der kanıtı tamamlarız. φ doğru iken x'i keyfi seçebilmemiz ne anlama gelir? Bu φ formülünün x değişkenine hiçbir koşul yüklememesi demektir, bu ise bizim terimlerimizle $x \notin \operatorname{Sb}\varphi$ olması demektir. Demek ki biz $x \notin \operatorname{Sb}\varphi$ koşulu altında $\varphi \to \psi$ önermesini kanıtlamış olduk. Bu durumda (3.11.15)$\dot{\forall}K$ çıkarım kuralı ile $\varphi \to \dot{\forall} x\psi$ kanıtlanmış olur.

Önerme 3.11.16 $\dot{\forall}$***-dağılımı:*** *Her* $\varphi, \psi \in \operatorname{Fm} L$ *ve her* $x \in \mathcal{V}$ *için* $\vdash \dot{\forall} x\,(\varphi \to \psi) \to (\dot{\forall} x\varphi \to \dot{\forall} x\psi)$.

Kanıt. $\tau_1(p,q,r)$ ve $\tau_2(p,q,r)$ önermemantıksal formülleri sırasıyla

$(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$ ve $(p \to (q \to r)) \to (q \curlywedge p \to r))$

olsunlar. Bunlar dosdoğrular olduklarından, p, q, r yerine $\mathrm{Fm}\,L$'den formüller koyduğumuzda biçimsel teoremler elde ederiz.

(1)	$\dot\forall x\,(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \psi)$	$\sigma_4(\varphi \to \psi, x, x)$
(2)	$\tau_1(\dot\forall x\,(\varphi \to \psi), \varphi, \psi)$	(3.11.1)
(3)	$\varphi \to (\dot\forall x\,(\varphi \to \psi) \to \psi)$	(1), (2), (MP)
(4)	$\dot\forall x\varphi \to \varphi$	$\sigma_4(\varphi, x, x)$
(5)	$\dot\forall x\varphi \to (\dot\forall x\,(\varphi \to \psi) \to \psi)$	(3), (4) , zincir kuralı
(6)	$\tau_2(\dot\forall x\varphi, \dot\forall x\,(\varphi \to \psi), \psi)$	(3.11.1)
(7)	$\dot\forall x\varphi \curlywedge \dot\forall x\,(\varphi \to \psi) \to \psi$	(5), (6), (MP)
(8)	$\dot\forall x\varphi \curlywedge \dot\forall x\,(\varphi \to \psi) \to \dot\forall x\psi$	(3.11.13)(1)
(9)	$\dot\forall x\,(\varphi \to \psi) \to (\dot\forall x\varphi \to \dot\forall x\psi)$	(8), τ_3 hepdoğru

Burada τ_3 ise $(p \curlywedge q \to r) \leftrightarrow (q \to (p \to r))$ hepdoğrusudur. ■

Önerme 3.11.17 (∃̇-dağılımı) *Her $\varphi, \psi \in \mathrm{Fm}\,L$ ve her $x \in \mathcal{V}$ için* $\vdash \dot\forall x\,(\varphi \to \psi) \to (\dot\exists x\varphi \to \dot\exists x\psi)$.

Kanıt.

(1)	$\dot\forall x\,(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \psi)$	$\sigma_4(\varphi \to \psi, x, x)$
(2)	$\dot\forall x\,(\varphi \to \psi) \curlywedge \varphi \to \psi$	$(1), p \to (q \to r) \vdash_{\mathrm{om}} p \curlywedge q \to r$
(3)	$\psi \to \dot\exists x\psi$	*(3.11.14)*$\dot\exists K$
(4)	$\dot\forall x\,(\varphi \to \psi) \curlywedge \varphi \to \dot\exists x\psi$	(2), (3), *zincir kuralı*
(5)	$\varphi \to (\dot\forall x\,(\varphi \to \psi) \to \dot\exists x\psi)$	$(4), p \curlywedge q \to r \vdash_{\mathrm{om}} q \to (p \to r)$
(6)	$\dot\exists x\varphi \to (\dot\forall x\,(\varphi \to \psi) \to \dot\exists x\psi)$	(5), *(3.11.15)* (2)$\dot\exists K$
(7)	$\dot\forall x\,(\varphi \to \psi) \to (\dot\exists x\varphi \to \dot\exists x\psi$	$(6), p \to (q \to r) \vdash_{\mathrm{om}} q \to (p \to r)$

■

Örnek 3.11.18 Biçimsel kanıtlarımızın tek türlü belirli olmadığını daha önce vurgulamıştık. Hem bunu bir kez daha örneklemek, hem de okuru biçimsel kanıtlara alıştırmak amacıyla (3.11.17)'nin bir farklı kanıtını vereceğiz.

(1)	$\eta := (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	karşı konum
(2)	$\dot\forall x\eta$	(1), (Gen)
(3)	$\dot\forall x\ \eta \to (\dot\forall x(\varphi \to \psi) \to \dot\forall x\,(\neg\psi \to \neg\varphi))$	(2), $\dot\forall$-dağılımı
(4)	$\dot\forall x\ (\varphi \to \psi) \to (\dot\forall x\neg\psi \to \dot\forall x\neg\varphi)$	(2), (3), (MP)
(5)	$\dot\forall x(\neg\varphi \to \neg\psi) \to \dot\forall x\,(\neg\psi \to \neg\varphi)$	$\dot\forall$-dağılımı
(6)	$\dot\forall x(\varphi \to \psi) \to (\dot\forall x\neg\psi \to \dot\forall x\neg\varphi)$	(4), (5) zincir kur.
(7)	$(\dot\forall x\neg\psi \to \dot\forall x\neg\varphi) \to (\neg\dot\forall x\neg\varphi \to \neg\dot\forall x\neg\psi)$	karşı konum
(8)	$\dot\forall x(\varphi \to \psi) \to (\neg\dot\forall x\neg\varphi \to \neg\dot\forall x\neg\psi)$	(6), (7), zincir kur.
(9)	$\dot\forall x(\varphi \to \psi) \to (\dot\exists x\varphi \to \dot\exists x\psi)$	(8), $\dot\exists$ tanımı.

Verilen bu iki genelleştirilmiş kanıt iki biçimsel kanıta genişletildiğinde iki farklı kanıt olacağı apaçıktır. ▲

(3.11.16) ve (3.11.17) doğrudan aşağıdaki biçimsel türetim kurallarını verirler:

$$\dot\forall x(\varphi \to \psi) \vdash (\dot\forall x\varphi \to \dot\forall x\psi) \tag{3.28}$$

$$\dot\forall x(\varphi \to \psi) \vdash (\dot\exists x\varphi \to \dot\exists x\psi) \tag{3.29}$$

Önerme 3.11.19 $\vdash \varphi \to \psi$ *ise* $\vdash \dot\forall x\varphi \to \dot\forall x\psi$ *ve* $\vdash \dot\exists x\varphi \to \dot\exists\psi$,

Kanıt. $\ldots, \varphi \to \psi$ bir biçimsel kanıtsa, (3.28) ve (3.29) türetilmiş çıkarım kurallarıyla birer kez (Gen) kullanılarak

$$\ldots, \varphi \to \psi, \dot\forall x\,(\varphi \to \psi)\,, \dot\forall x\varphi \to \dot\forall x\psi$$
$$\ldots, \varphi \to \psi, \dot\forall x\,(\varphi \to \psi)\,, \dot\exists x\varphi \to \dot\exists x\psi$$

genelleştirilmiş biçimsel kanıtları elde edilir. ■

3.11.1 Bir Başka Yaklaşım

Biraz ara verip bizim seçtiğimiz Λ_m mantık ilksavlarına denk olan ve mantık kitaplarında sıkça karşılaşılan bir başka ilksav sistemini tanıyalım.

L dilinde $\dot\forall$ yerine $\dot\exists$ alınır ve $\neg\dot\exists x\neg\varphi$ yerine $\dot\forall x\varphi$ kısaltması kullanılır. L dilinden bir harfle fark eden bu yeni dilimizi L' ile gösterelim. Λ'_m **mantık ilksavlar** kümesi aşağıdakilerden oluşur:

(DD)	dosdoğrular,
(Eş)	Eşitlik İlksavları Λ_m'deki gibi,
$\sigma'_4(\varphi, x, t)$	$\varphi(x\|t) \to \dot\exists x\varphi \quad x \in \mathcal{V}$, $\mathrm{Sb}(\varphi, x\,|\,t)$

Çıkarım Kurallarımız: (MP) ve

(VK): $x \notin \operatorname{Sb}\psi$ ise $\varphi \to \psi$'den $\dot\exists x\varphi \to \psi$ çıkar.

(VK)'yı "varlık katma" olarak okuyalım! Bc' ile $\mathbf{\Lambda}'_m$'nin (MP) ve (VK)'ya göre kapanışını gösterelim. Bu kapanışa ilişkin türetmeyi $\mathbf{\Lambda}'_m$-bkanıtı olarak adlandıralım ve $\vdash'$ ile gösterelim. L ve L' dillerinden birinin formülünü diğerinin de formülü olarak daima ele alabiliriz; bilindiği gibi $\dot\forall$ imi L' dilinde $\dot\exists$ ise L dilinde tanımlanmış imlerdir. $\Gamma' \subseteq \operatorname{Fm} L'$ ve $\varphi' \in \operatorname{Fm} L'$ için $\Gamma' \vdash' \varphi'$ diğer kavramlar şimdiye kadar yapılana koşut yapılır.

Teorem 3.11.20 $\Lambda_m, \mathbf{\Lambda}'_m$ *ilksavları kendi çıkarım kurallarıyla alınmak üzere birbirlerine denktirler, dd.* $\mathrm{Bc} = \mathrm{Bc}'$.

Kanıt. 1. $\mathrm{Bc} \supseteq \mathrm{Bc}'$: (3.11.1)'e göre tüm dosdoğrular Bc'dedir. (3.11.13)'te $\sigma'_4(\varphi, x, t) \in \mathrm{Bc}$ olduğun gördük ve (3.11.15)(2)'de ise (VK) çıkarım kuralını bir türetilmiş çıkarım kuralı olarak kazandık. Dolayısıyla $\mathrm{Bc} \supseteq \mathrm{Bc}'$.

2. $\mathrm{Bc}' \supseteq \mathrm{Bc}$: $\sigma_1(\varphi, \psi)$, $\sigma_2(\varphi, \psi, \eta)$ ve $\sigma_3(\varphi, \psi)$ birer dosdoğru olduklarından Bc' kümesindedirler. $\operatorname{Sb}(\varphi, x \,|\, t)$ ise

(1)	$\neg\varphi(x\|t) \to \dot\exists x\neg\varphi$	$\sigma'_4(\neg\varphi, x, t)$
(2)	$(\neg\varphi(x\|t) \to \dot\exists x\neg\varphi) \to (\neg\dot\exists x\neg\varphi \to \varphi(x\|t))$	karşı konum
(3)	$\neg\dot\exists x\neg\varphi \to \varphi(x\|t)$	(1), (2), (MP)
(4)	$\dot\forall x\varphi \to \varphi(x\|t)$	tanım

Böylece her $\sigma_4(\varphi, x, t) \in \mathrm{Bc}'$. Dolayısıyla $\operatorname{Sb}(\varphi, x|t)$ için

$$\dot\forall x\varphi, \dot\forall\varphi \to \varphi(x|t), \varphi(x|t)$$

dizisinden $\dot\forall x\varphi \vdash' \varphi(x|t)$ özelleştirmesini, özellikle $\dot\forall x\varphi \vdash' \varphi$ özelleştirmesini elde ederiz. İşimizin bitmesi için

$$\varphi \vdash' \dot\forall x\varphi \text{ ve}$$
$$\vdash' \dot\forall x\,(\varphi \to \psi) \to \left(\varphi \to \dot\forall x\psi\right),\ x \notin \operatorname{Sb}\varphi,\ \text{dd.} \quad \vdash' \sigma_5(\varphi, \psi, x).$$

türetilmiş biçimsel çıkarım kuralını kanıtlamak yeterlidir. η herhangi bir *sav* olmak üzere $\bot := \neg\,(\eta \to \eta)$ olsun. $\operatorname{Sb}\bot = \emptyset$! ve $\bot$ bir hepyanlıştır.

(1)	φ	vrs
(2)	$\varphi \to (\neg\varphi \to \bot)$	dosdoğru
(3)	$\neg\varphi \to \bot$	(1), (2) ve (MP)
(4)	$\dot\exists x\neg\varphi \to \bot$	$\dot\exists K$
(5)	$(\dot\exists x\neg\varphi \to \bot) \to \neg\dot\exists x\neg\varphi$	$(p \to \bot) \to \neg p$ dosdoğru
(6)	$\neg\dot\exists x\neg\varphi\ (= \dot\forall x\varphi)$	(4), (5) ve (MP).

Böylece $\varphi \vdash' \dot{\forall} x\varphi$.

Şimdi $x \notin \operatorname{Sb}\varphi$ olsun.

(1)	$\varphi \to \psi$	vrs
(2)	$\neg\psi \to \neg\varphi$	karşı konum.
(3)	$\dot{\exists} x\neg\psi \to \neg\varphi$	(2), (VK)
(4)	$\neg\neg\varphi \to \neg\dot{\exists} x\neg\psi$	(3), karşı konum.
(5)	$\varphi \to \dot{\forall} x\psi$	$\varphi \to \neg\neg\varphi$, (4), zincir kuralı ve tanım

Böylece $\varphi \to \psi \vdash' \varphi \to \dot{\forall} x\psi$. Buradan, $\dot{\forall} x(\varphi \to \psi) \vdash' \varphi \to \psi$ ve (MP) ile $\dot{\forall} x\,(\varphi \to \psi) \vdash' \varphi \to \dot{\forall} x\psi$ elde ederiz. $x \notin \operatorname{Sb}(\varphi \to \dot{\forall} x\psi)$ olduğundan aşağıdaki çıkarım kuralı ile $\vdash' \dot{\forall} x\,(\varphi \to \psi) \to' (\varphi \to \dot{\forall} x\psi)$ ve bkb. ■

Teorem 3.11.21 (Çıkarım Teoremi) *$\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L'$ ve $\varphi, \psi \in \operatorname{Fm} L'$ olsunlar. $\Gamma \vdash' \varphi \to \psi$ ise $\Gamma, \varphi \vdash' \psi$. Diğer yandan $\Gamma, \varphi \vdash' \psi$ ve ψ'nin $\Gamma \cup \{\varphi\}$'den bir $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ biçimsel $\vdash'$ kanıtında $\sigma'_4(\varphi_j, x, t)$ kullanıldığı her yerde $x \notin \operatorname{Sb}\varphi$ ise $\Gamma \vdash' \varphi \to \psi$. Özellikle φ bir sav ise $\Gamma, \varphi \vdash' \psi \implies \Gamma \vdash' \varphi \to \psi$.*

Kanıt. Bu teoremin kanıtı (3.11.7)'nin kanıtına koşut olacaktır. Orada Λ_m yerine Λ'_m ve $\vdash$ yerine $\vdash'$ alırsak oradaki kanıt son adım dışında olduğu gibi kalır.

Son adımı tartışalım. Bu durumda φ_i kendisinden önce gelen bir φ_j'den (VK) ile elde edilmiştir. Demek ki $j \in \{1, \ldots, i-1\}$, $x \in X$, $\eta, \theta \in \operatorname{Fm} L'$ ve $x \notin \operatorname{Sb}\theta$ olmak üzere $\varphi_j = \eta \to \theta$ ve $\varphi_i = \dot{\exists} x\eta \to \theta$. Tümevarım koşulundan $\Gamma \vdash' \varphi \to \varphi_j$, dd. $\Gamma \vdash' \varphi \to (\eta \to \theta)$. Buradan ve

$$(\varphi \to (\eta \to \theta)) \to (\eta \to (\varphi \to \theta))$$

dosdoğrusundan (MP) ile $\Gamma \vdash' \eta \to (\varphi \to \theta)$ elde edilir. Buradansa, varsayımlarımızdan dolayı $x \notin \operatorname{Sb}(\varphi \to \theta)$ olduğundan (VK) ile $\Gamma \vdash' \dot{\exists} x\eta \to (\varphi \to \theta)$ elde edilir. (3.11.5) ve (3.26) burada da aynen geçerlidir, dd. $\Gamma \vdash' \psi_1, \ldots, \Gamma \vdash' \psi_m$ ve $\psi_1 \curlywedge \cdots \curlywedge \psi_m \to \xi$ bir dosdoğru ise $\Gamma \vdash' \xi$. Şimdi bu teoremi $\psi_1 = \eta \to (\varphi \to \theta)$ ve $\psi_2 = \dot{\exists} x\eta \to (\varphi \to \theta)$ olmak üzere uygular ve

$$(p \to (q \to r)) \curlywedge (s \to (q \to r)) \to (q \to (s \to r))$$

hepdoğrusundan yola çıkarsak $\psi_1 \curlywedge \psi_2 \to \left(\varphi \to \left(\dot{\exists} x\eta \to \theta\right)\right)$ dosdoğrusuna ulaşırız. Dolayısıyla $\Gamma \vdash' \varphi \to \left(\dot{\exists} x\eta \to \theta\right)$, dd. $\Gamma \vdash' \varphi \to \varphi_i$ ve bkb. ■

3.12 Biçimsel Denklik

$\neg((\varphi \to \psi) \to \neg(\psi \to \varphi))$ yerine $\varphi \leftrightarrow \psi$ yazmıştık. Her ne kadar aşağıda yazacağımız önerme doğrudan temel türetilmiş biçimsel çıkarım kuralları-mızdan görülürse de tamlık açısından kanıtını kısaca verelim.

Önerme 3.12.1 $\vdash (\varphi \leftrightarrow \psi) \iff \vdash \varphi \to \psi$ *ve* $\vdash \psi \to \varphi$.

Sonuç 3.12.2 $\vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$ *ise* $(\vdash \varphi \iff \vdash \psi)$.

Kanıt. $\xi := \varphi \to \psi$ ve $\eta := \psi \to \varphi$ olmak üzere $(\varphi \leftrightarrow \psi) = \neg(\xi \to \neg\eta)$ $= \xi \curlywedge \eta$.

$\Longrightarrow$ *yönü:* $\vdash \xi \curlywedge \eta$ olsun. Bu ve $(\curlywedge A)$ $\xi \curlywedge \eta \vdash \xi, \eta$ temel biçimsel çıkarımından zincir kuralı ile $\vdash \xi$ ve $\vdash \eta$ elde edilir.

$\Longleftarrow$ *yönü:* $\xi \to (\eta \to \neg(\xi \to \neg\eta))$ dosdoğru olduğundan $\ldots, \xi$ ve $\ldots, \eta$ biçimsel kanıtları

$$\ldots, \xi, \ldots, \eta, \xi \to (\eta \to \neg(\xi \to \neg\eta)), \eta \to \neg(\xi \to \neg\eta), \neg(\xi \to \neg\eta)$$

olarak $\neg(\xi \to \neg\eta)$'nın biçimsel kanıtına genişletilebilir; burada iki kez (MP) kullanılmıştır.

Sonuç önermemizden (MP) ile elde edilir. Örneğin $\vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$ ve $\vdash \varphi$ ise (3.12.1)'den $\vdash \varphi \to \psi$ olacağından (MP) ile $\vdash \psi$ olur. Benzer biçimde $\vdash \psi$ ve $\vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$ ise $\vdash \varphi$ olur. ■

Tanım 3.12.3 $\varphi, \psi \in \operatorname{Fm} L$ *için* $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ *ise ve ancak bu durumda* φ *ve* ψ *formülleri* ***biçimsel****(veya* ***kanıtlanabilir) denktir*** *denir. Bunu* $\varphi \equiv_{\vdash} \psi$ *ile göstereceğiz.*

Not 3.12.4 $\vdash_{\mathrm{om}} \varphi$ ise $\vdash \varphi$ olduğunu biliyoruz. İkinci bölümde ise φ, ψ formülleri için $\varphi \equiv_{\mathrm{om}} \psi$ bağıntısını $\varphi \leftrightarrow \psi$ formülünün bir hepdoğru olması olarak açıkladık ve bu durumda $\vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$ olduğunu biliyoruz. Öyleyse ise

$$\varphi \equiv_{\mathrm{om}} \psi \Longrightarrow \varphi \equiv_{\vdash} \psi$$

Bundan sıkça yararlanacağız. ▲

- **Uyarı:** (3.12.2) *tek yönlü* bir önermedir; $\vdash \varphi \iff \vdash \psi$ ise asla $\varphi \equiv_{\vdash} \psi$ olması gerekmez. (3.11.11)(1)'den $\vdash \varphi \iff \vdash \varphi^{\dot\forall}$ olduğunu biliyoruz. Buna karşın $\varphi \equiv_{\vdash} \varphi^{\dot\forall}$ olması gerekmez! $\varphi^{\dot\forall} \in \operatorname{Sav} L$ olduğundan (3.11.7) Çıkarım Teoremi'ne göre her zaman $\vdash \varphi^{\dot\forall} \to \varphi$. Ancak (3.11.6)'da $\nvdash \varphi \to \dot\forall x\varphi$ olabileceğini örnekledik. $\operatorname{Sb}\varphi = \{x\}$ ise $\varphi^{\dot\forall} = \dot\forall x\varphi$ olacağından bu $\nvdash \varphi \to \varphi^{\dot\forall}$ demektir!

Biçimsel denklik şu anlamda önemlidir: $\varphi \equiv_{\vdash} \psi$ ise φ ve ψ'den biri biçimsel teoremse (3.12.2)'den dolayı diğeri de biçimsel teoremdir. Bazen bunlardan birinin biçimsel teorem olduğunu göstermek daha kolay olabilir ve onu kanıtlarız. Aşağıdaki önermenin kanıtını alıştırma olarak bırakıyoruz.

Önerme 3.12.5 *$\varphi, \varphi', \psi, \psi' \in \operatorname{Fm} L$ için*

(1) $\equiv_{\vdash}$, $\operatorname{Fm} L$*'de bir denklik bağıntısıdır.*
(2) $\varphi \equiv_{\vdash} \psi \iff \neg\varphi \equiv_{\vdash} \neg\psi$
(3) $\varphi \equiv_{\vdash} \varphi' ve \psi \equiv_{\vdash} \psi'$ *ise* $\varphi \Diamond \psi \equiv_{\vdash} \varphi' \Diamond \psi' \quad \Diamond \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$.

Önerme 3.12.6 *$\varphi \equiv_{\vdash} \psi$ ise $\dot{\forall} x\varphi \equiv_{\vdash} \dot{\forall} x\psi$ ve $\dot{\exists} x\varphi \equiv_{\vdash} \dot{\exists} x\psi$.*

Kanıt. Doğrudan (3.11.19) ve (3.12.1)'den çıkar. ■

(3.12.5) ve (3.12.6)'dan $\equiv_{\vdash}$ bağıntısının $\operatorname{Fm} L$ kümesinde yalnızca bir denklik bağıntısı değil, aynı zamanda tüm mantık işlemcilerine göre bir benzeşme olduğunu görüyoruz. Okur $\equiv$ anlamsal denkliği için geçerli olan her önermenin $\equiv_{\vdash}$ biçimsel denkliği için de geçerli olduğunu kanıtlayabilir. Bunlardan önemli olanları kanıtlayacağız. İlerde $\Gamma \Vdash \varphi \iff \Gamma \vdash \psi$ olduğunu kanıtladığımızda bunun bir sonucu olarak $\varphi \equiv \psi \iff \varphi \equiv_{\vdash} \psi$ elde edeceğiz. Dolayısıyla $\equiv$ için verdiğimiz tüm önermeler $\equiv_{\vdash}$ içinde geçerli olacaktır.

Teorem 3.12.7 *$\varphi, \psi, \eta \in \operatorname{Fm} L$ ve ψ ise φ'nin bir altformülü olsun. φ' formülü φ formülünden ψ altformülü yerine geçtiği bazı yerlerde (bu* her *veya* hiçbir *yerde olabilir) η formülü yazılarak elde edilmiş olsun. ψ veya η formülünde serbest, ancak φ formülünde bağlı olan değişkenler $y_1, \ldots, y_n$ değişkenleri arasında iseler*

(1) $\vdash \dot{\forall} y_1 \ldots y_n (\psi \leftrightarrow \eta) \to (\varphi \leftrightarrow \varphi')$ ***Denklik Teoremi.***
(2) $\vdash \psi \leftrightarrow \eta$ *ise* $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$ ***Yerine Koyma Teoremi***
(3) $\vdash \psi \leftrightarrow \eta$ *ve* $\vdash \varphi$ *ise* $\vdash \varphi'$.

Kanıt. *(1)'in kanıtı:* Formüller üzerinden tümevarımla kanıtlayacağız. Eğer *hiçbir* yerde ψ yerine η koymamışsak $\varphi' = \varphi$ olacağından sav doğrudan $p \to (q \to q)$ dosdoğrusundan çıkar. Şimdi $\psi = \varphi$ olsun ve ψ yerine η koymuş olalım. Bu durumda savımız $\vdash \dot{\forall} y_1 \ldots y_n (\psi \leftrightarrow \eta) \to (\psi \leftrightarrow \eta)$ şekline dönüşür ki doğrudur. Öyleyse yalnızca ψ'nin φ'nin bir öz altformülü olduğu durumları tartışmak yeterlidir. χ herhangi bir formül olmak üzere χ' daima bu formülün bir ψ altformülünün yerine, geçtiği bazı yerlerde η formülü koyarak elde edilen formülü göstersin.

(1a) φ bir atomik formülse öz altformülü yoktur.

(1b) $\varphi = \neg\theta$ ve sav θ için kanıtlanmış olsun. $\varphi' = \neg\theta'$ olduğundan, varsayımdan dolayı $\dot{\forall} y_1 \ldots y_n (\psi \leftrightarrow \eta) \to (\theta \leftrightarrow \theta')$ bir biçimsel teoremdir.

Bu biçimsel teorem ve $(r \to (p \leftrightarrow q)) \to (r \to (\neg p \leftrightarrow \neg q))$ hepdoğrusunda $r := \dot\forall y_1 \dots y_n (\psi \leftrightarrow \eta)$, $p := \theta$ ve $q := \theta'$ alarak elde edilen biçimsel teoreme (MP) uygularsak sav elde edilir.

(1c) $\varphi = \theta \to \phi$ ve sav θ ve ϕ için kanıtlanmış olsun. $\varphi' = \theta' \to \phi'$ ve varsayımdan dolayı

$$\tau_1 := \dot\forall y_1 \dots y_n (\psi \leftrightarrow \eta) \to \big(\theta \leftrightarrow \theta'\big) \text{ ve}$$
$$\tau_2 := \dot\forall y_1 \dots y_n (\psi \leftrightarrow \eta) \to \big(\phi \leftrightarrow \phi'\big)$$

biçimsel teoremler, dolayısıyla $\tau_1 \curlywedge \tau_2$ de bir biçimsel teoremdir.

$$(r \to (p_1 \leftrightarrow q_1)) \curlywedge (r \to (p_2 \leftrightarrow q_2) \to (r \to ((p_1 \leftrightarrow p_2) \leftrightarrow (q_1 \leftrightarrow q_2))))$$

hepdoğrusunda $r := \dot\forall y_1 \dots y_n (\psi \leftrightarrow \eta)$, $p_1 := \theta$, $q_1 := \theta'$, $p_2 = \phi$ ve $q_2 = \phi'$ alarak

$$\tau_1 \curlywedge \tau_2 \to (\dot\forall y_1 \dots y_n (\psi \leftrightarrow \eta) \to ((\theta \leftrightarrow \phi) \leftrightarrow (\theta' \leftrightarrow \phi')))$$

biçimsel teoremini elde ederiz. $\tau_1 \curlywedge \tau_2$ de bir biçimsel teorem olduğundan buradan (MP) ile $\dot\forall y_1 \dots y_n (\psi \leftrightarrow \eta) \to (\varphi \leftrightarrow \varphi')$ biçimsel teoremini elde ederiz.

(1d) $\varphi = \dot\forall x\theta$ ve sav θ için kanıtlanmış olsun. $\varphi' = \dot\forall x\theta'$ ve varsayımdan $\vdash \dot\forall y_1 \dots y_n (\psi \leftrightarrow \eta) \to (\theta \leftrightarrow \theta')$. hiçbir x değişkeni $\xi := \dot\forall y_1 \dots y_n (\psi \leftrightarrow \eta)$ formülünde serbest olamaz! Gerçekten de x değişkeninin ξ'de serbest olabilmesi için ψ veya η formülünde serbest olmalıdır. Ancak bu durumda, x değişkeni φ formülünde bağlı olduğundan x değişkeni $y_1, \dots, y_n$ değişkenlerinden biri olmak zorundadır; dolayısıyla x değişkeni ξ formülünde serbest değildir. $\sigma_5(\xi, \theta \leftrightarrow \theta', x)$ ile $\vdash \xi \to \dot\forall x(\theta \leftrightarrow \theta')$ olur. (3.12.6)(2)'den $\vdash \dot\forall x(\theta \leftrightarrow \theta') \to (\dot\forall x\theta \leftrightarrow \dot\forall x\theta')$ olduğundan zincir kuralı ile $\vdash \xi \to (\dot\forall x\varphi \leftrightarrow \dot\forall x\varphi')$.

(2) $\vdash (\psi \leftrightarrow \eta)$ ise (Gen) ile sonlu adımda $\vdash \dot\forall y_1 \dots y_n (\psi \leftrightarrow \eta)$ elde edilir. Buradan (1) ve (MP) ile $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$ elde edilir.

(3) $\vdash \psi \leftrightarrow \eta$ ise (2)'den $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$ ve buradan $\leftrightarrow A$ ile $\vdash \varphi \to \varphi'$ elde edilir. Bu ve $\vdash \varphi$'den (MP) ile $\vdash \varphi'$ olur. ■

Önerme 3.12.8 ($\dot\forall$ dağıtma) $\dot\forall x (\varphi \curlywedge \psi) \equiv_\vdash \dot\forall x\varphi \curlywedge \dot\forall x\psi$.

Kanıt. $\Longrightarrow$ *yönü*:

(1)	$\dot\forall x (\varphi \curlywedge \psi) \to (\varphi \curlywedge \psi)$	σ_4 ilksavı
(2)	$\varphi \curlywedge \psi \to \varphi$	$\curlywedge A$
(3)	$\dot\forall x (\varphi \curlywedge \psi) \to \varphi$	(1), (2), zincir kuralı
(4)	$\dot\forall x (\varphi \curlywedge \psi) \to \dot\forall x\varphi$	(3.11.15)(1)

Böylece $\vdash \dot{\forall}x\,(\varphi \curlywedge \psi) \to \dot{\forall}x\varphi$. Benzer biçimde $\dot{\forall}x\,(\varphi \curlywedge \psi) \to \dot{\forall}x\psi$ kanıtlanır. (3.11.4) ile $\vdash \dot{\forall}x\,(\varphi \curlywedge \psi) \to \dot{\forall}x\varphi \curlywedge \dot{\forall}x\psi$ elde edilir.

$\Longleftarrow$ *yönü*:

(1)	$\dot{\forall}x\varphi \curlywedge \dot{\forall}x\psi \to \dot{\forall}x\varphi$	$\curlywedge A$
(2)	$\dot{\forall}x\varphi \to \varphi$	σ_4 ilksavı
(3)	$\dot{\forall}x\varphi \curlywedge \dot{\forall}x\psi \to \varphi$	(1), (2), (MP)
(4)	$\dot{\forall}x\varphi \curlywedge \dot{\forall}x\psi \to \psi$	benzer biçimde
(5)	$\dot{\forall}x\varphi \curlywedge \dot{\forall}x\psi \to \varphi \curlywedge \psi$	(3), (4), (3.11.4)
(6)	$\dot{\forall}x\varphi \curlywedge \dot{\forall}x\psi \to \dot{\forall}x(\varphi \curlywedge \psi)$	(3.11.15)(1)

Şimdi (3.12.1)'den $\vdash \dot{\forall}x(\varphi \curlywedge \psi) \leftrightarrow \dot{\forall}x\varphi \curlywedge \dot{\forall}x\psi$, dd. $\dot{\forall}x(\varphi \curlywedge \psi) \equiv_\vdash \dot{\forall}x\varphi \curlywedge \dot{\forall}x\psi$. ■

$Q \in \{\dot{\exists}, \dot{\forall}\}$ olmak üzere Q' diğer niceleyici olsun: Açıkça yazarsak $Q = \dot{\forall}$ ise $Q' = \dot{\exists}$ ve eğer $Q = \dot{\exists}$ ise $Q' = \dot{\forall}$ olsun.

Önerme 3.12.9 ($\urcorner$ dönüşümleri) *$\dot{\forall}x\urcorner\varphi \equiv_\vdash \urcorner\dot{\exists}x\varphi$ ve $\dot{\exists}x\urcorner\varphi \equiv_\vdash \urcorner\dot{\forall}x\varphi$. Özetle $\urcorner Qx\varphi \equiv_\vdash Q'x\urcorner\varphi$.*

Sonuç 3.12.10 *$\urcorner Q_1x_1 \cdots Q_nx_n\varphi \equiv_\vdash Q'_1x_1 \cdots Q'_nx_n\urcorner\varphi$.*

Kanıt. $\Longrightarrow$ *yönü:*

(1)	$\dot{\forall}x\urcorner\varphi \to \urcorner\varphi$	σ_4 ilksavı
(2)	$\varphi \to \urcorner\dot{\forall}x\urcorner\varphi$	(1) ve karşı konum.
(3)	$\dot{\exists}x\varphi \to \urcorner\dot{\forall}x\urcorner\varphi$	$\dot{\exists}K$, (3.11.15)(2)
(4)	$\dot{\forall}x\urcorner\varphi \to \urcorner\dot{\exists}x\varphi$	(3), karşı konum.

$\Longleftarrow$ *yönü:*

(1)	$\varphi \to \dot{\exists}x\varphi$	(3.11.13), $\dot{\exists}K$.
(2)	$\urcorner\dot{\exists}x\varphi \to \urcorner\varphi$	(1), karşı konum.
(3)	$\urcorner\dot{\exists}x\varphi \to \dot{\forall}x\urcorner\varphi$	(2) ve $\dot{\forall}K$, (3.11.15)(1)

Böylece $\dot{\forall}x\urcorner\varphi \equiv_\vdash \urcorner\dot{\exists}x\varphi$ olur. Buradan, $\urcorner A$ ve $\urcorner K$'den her η için $\urcorner\urcorner\eta \equiv_\vdash \eta$ olduğunu da gözetirsek (3.12.5) ve (3.12.7) ile

$$\dot{\exists}x\urcorner\varphi \equiv_\vdash \urcorner\urcorner\dot{\exists}x\urcorner\varphi \equiv_\vdash \urcorner\dot{\forall}x\urcorner\urcorner\varphi \equiv_\vdash \urcorner\dot{\forall}x\varphi$$

elde edilir. Sonuç önermemizden tümevarımla elde edilir. ■

Önerme 3.12.11 *(1) $\dot{\exists}$ **dağıtımı:** $\dot{\exists}x\,(\varphi \curlyvee \psi) \equiv_\vdash (\dot{\exists}x\varphi \curlyvee \dot{\exists}x\psi)$*

*(2) $\to$ **dönüşümü:** $\dot{\exists}x\,(\varphi \to \psi) \equiv_\vdash (\dot{\forall}x\varphi \to \dot{\exists}x\psi)$.*

Kanıt. *(1)*

$$\begin{aligned}\dot{\exists}x\,(\varphi \curlyvee \psi) &\overset{(a)}{\equiv}_{\vdash} \dot{\exists}x\neg\,(\neg\varphi \curlywedge \neg\psi) \overset{(b)}{\equiv}_{\vdash} \neg\dot{\forall}x\,(\neg\varphi \curlywedge \neg\psi)\\ &\overset{(c)}{\equiv}_{\vdash} \neg(\dot{\forall}x\neg\varphi \curlywedge \dot{\forall}x\neg\psi) \overset{(d)}{\equiv}_{\vdash} \neg(\neg\dot{\exists}x\varphi \curlywedge \neg\dot{\exists}x\psi)\\ &\overset{(e)}{\equiv}_{\vdash} \neg\neg\dot{\exists}x\varphi \curlyvee \neg\neg\dot{\exists}x\psi \overset{(f)}{\equiv}_{\vdash} \dot{\exists}x\varphi \curlyvee \dot{\exists}x\psi.\end{aligned}$$

Burada (a), (e) ve (f)'de (3.12.7), (b) ve (d)'de (3.12.9) ve (c)'de ise (3.12.8) kullanılmıştır.

(2) $\dot{\exists}x\,(\varphi \to \psi) \equiv_{\vdash} \dot{\exists}x\,(\neg\varphi \curlyvee \psi) \equiv_{\vdash} \dot{\exists}x\neg\varphi \curlyvee \dot{\exists}x\psi \equiv_{\vdash} \neg\dot{\forall}x\varphi \curlyvee \dot{\exists}x\psi \equiv_{\vdash} \dot{\forall}x\varphi \to \dot{\exists}x\psi$. Sırasıyla (3.12.7), (1), (3.12.9)+(3.12.7) ve (3.12.7) kullanılmıştır. ■

Önerme 3.12.12 *$x \notin \mathrm{Sb}\,\varphi$ ise $\varphi \equiv_{\vdash} \dot{\forall}x\varphi$ ve $\varphi \equiv_{\vdash} \dot{\exists}x\varphi$.*

Kanıt. Özelleştirme ile $\vdash \dot{\forall}x\varphi \to \varphi$. Diğer yandan $\vdash \varphi \to \varphi$ olduğundan (3.11.15)$\dot{\forall}K$ ile $\vdash \varphi \to \dot{\forall}x\varphi$. Böylece $\varphi \equiv_{\vdash} \dot{\forall}x\varphi$. Bir yandan $\vdash \varphi \to \dot{\exists}x\varphi$, diğer yandan ise $\vdash \varphi \to \varphi$'den (3.11.15)$\dot{\exists}K$ ile $\vdash \dot{\exists}x\varphi \to \varphi$ olduğundan $\varphi \equiv_{\vdash} \dot{\exists}x\varphi$. ■

Önerme 3.12.13 ($\curlywedge, \curlyvee$ dönüşümleri) *$Q \in \{\dot{\exists}, \dot{\forall}\}$ ve $x \notin \mathrm{Sb}\,\varphi$ ise*

1. *$Qx\,(\varphi \curlyvee \psi) \equiv_{\vdash} \varphi \curlyvee Qx\psi$.*
2. *$Qx\,(\psi \curlyvee \varphi) \equiv_{\vdash} Qx\psi \curlyvee \varphi$.*

Her iki sav her yerde $\curlyvee$ yerine $\curlywedge$ yazıldığında da doğrudur.

Sonuç 3.12.14 *$Q_1, \ldots, Q_n \in \{\dot{\exists}, \dot{\forall}\}$ ve $x_1, \ldots, x_n \notin \mathrm{Sb}\,\varphi$ ise*

1. *$Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\,(\varphi \curlyvee \psi) \equiv_{\vdash} \varphi \curlyvee Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\psi$.*
2. *$Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\,(\psi \curlyvee \varphi) \equiv_{\vdash} Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\psi \curlyvee \varphi$.*

Her iki sav her yerde $\curlyvee$ yerine $\curlywedge$ yazıldığında da doğrudur.

Kanıt. Örnek oluşturmak üzere (1)'de $Q = \dot{\exists}$ ve $\curlyvee$ yerine $\curlywedge$ aldığımızda elde edilen (1′) $\dot{\exists}x\,(\varphi \curlywedge \psi) \equiv_{\vdash} \varphi \curlywedge \dot{\exists}x\psi$ ve (2)'de $Q = \dot{\forall}$ aldığımızda elde edilen (2′) $\dot{\forall}x\,(\psi \curlyvee \varphi) \equiv_{\vdash} \dot{\forall}x\psi \curlyvee \varphi$ denkliklerini kanıtlayalım.

(1′) $\Longrightarrow$:

a.	$\varphi \curlywedge \psi \to \psi$	dosdoğru
b.	$\psi \to \dot{\exists}x\psi$	$\sigma_4'(\psi, x, x)$
c.	$\varphi \curlywedge \psi \to \dot{\exists}x\psi$	(a), (b), zincir kuralı
d.	$\varphi \curlywedge \psi \to \varphi$	dosdoğru
e.	$\varphi \curlywedge \psi \to \varphi \curlywedge \dot{\exists}x\psi$	(c), (d), (3.11.4)
f.	$\dot{\exists}x(\varphi \curlywedge \psi) \to \varphi \curlywedge \dot{\exists}x\psi$	(3.11.15)$\dot{\exists}K$

$(1') \Longleftarrow$:

a.	$\varphi \curlywedge \psi \to \dot{\exists} x\,(\varphi \curlywedge \psi)$	σ'_4
b.	$\psi \to (\varphi \to \dot{\exists} x\,(\varphi \curlywedge \psi))$	(a)$\equiv_{\mathrm{om}}$(b)
c.	$\dot{\exists} x\psi \to (\varphi \to \dot{\exists} x\,(\varphi \curlywedge \psi))$	(3.11.4)$\dot{\exists} K$
d.	$\dot{\exists} x\psi \curlywedge \varphi \to \dot{\exists} x\,(\varphi \curlywedge \psi)$	(c)$\equiv_{\mathrm{om}}$(d)
e.	$\varphi \curlywedge \dot{\exists} x\psi \to \dot{\exists} x\,(\varphi \curlywedge \psi)$	(d), (3.12.7)

(b) ve (d)'de $\xi \curlywedge \theta \to \zeta \equiv_{\mathrm{om}} \xi \to (\theta \to \zeta)$ kullanılmıştır; (e)'de ise $\xi \curlywedge \theta \equiv_{\mathrm{om}} \theta \curlywedge \xi$ kullanılmıştır. Adımların, $(1')$ de dahil, gerekçelerini okura bırakmak üzere $(2')$ için bir kanıt aşağıdadır:

$$\dot{\forall} x\,(\psi \curlyvee \varphi) \equiv_{\vdash} \neg\dot{\exists} x \neg\,(\psi \curlyvee \varphi) \equiv_{\vdash} \neg\dot{\exists} x\,(\neg\varphi \curlywedge \neg\psi)$$
$$\equiv_{\vdash} \neg(\neg\varphi \curlywedge \dot{\exists} x \neg\psi) \equiv_{\vdash} \neg\neg\varphi \curlyvee \neg\dot{\exists} x \neg\psi \equiv_{\vdash} \varphi \curlyvee \dot{\forall} x\psi.$$

Sonucun, (3.12.6) ve (3.12.13) yardımıyla, tümevarımla kanıtını okura bırakıyoruz. ■

Önerme 3.12.15 ($\to$ dönüşümleri) *$x \notin \mathrm{Sb}\,\psi$ ise*
(i) $(\dot{\forall} x\varphi \to \psi) \equiv_{\vdash} \dot{\exists} x\,(\varphi \to \psi)$
(ii) $(\psi \to \dot{\forall} x\varphi) \equiv_{\vdash} \dot{\forall} x\,(\psi \to \varphi)$
(iii) $(\dot{\exists} x\varphi \to \psi) \equiv_{\vdash} \dot{\forall} x\,(\varphi \to \psi)$
(iv) $(\psi \to \dot{\exists} x\varphi) \equiv_{\vdash} \dot{\exists} x\,(\psi \to \varphi)$

Kanıt. $\varphi \to \psi \equiv_{\vdash} \neg\varphi \curlyvee \psi$ biçimsel denkliğini ve daha önce kanıtlananları kullanarak önermeyi kanıtlamayı okura bırakıyoruz. Bu denklikteki $\neg$ bize *(i)* ve *(ii)*'deki niceleyici değişimlerini açıklar. ■

Yüklem Mantığının İkililik İlkesi

Herhangi bir $\varphi \in \mathrm{Fm}\,L$ formülü verildiğinde, eğer bu formülde $\to$ ve $\leftrightarrow$ varsa $\psi \to \eta$ yerine $\neg\psi \curlyvee \eta$ ve $\psi \leftrightarrow \eta$ yerine $(\neg\psi \curlyvee \eta) \curlywedge (\neg\eta \curlyvee \psi)$ yazarak yalnızca $\curlywedge, \curlyvee, \neg, \dot{\forall}, \dot{\exists}$ imlerini içeren ve $\varphi \equiv_{\vdash} \varphi'$ olan bir φ' elde edilir. Örneğin $\varphi = \dot{\forall} x(\psi \to \dot{\exists} y\eta)$ ise $\varphi' = \dot{\forall} x(\neg\psi \curlyvee \dot{\exists} y\eta)$. Bu tipte bir formülü ikinci bölümde olduğu gibi yüklem mantığının bir **Boole formülü** diyelim.

φ formülüne ilişkin Boole formülü φ' olmak üzere φ' formülündeki tüm $\curlywedge$ yerine $\curlyvee$, tüm $\curlyvee$ yerine $\curlywedge$, tüm $\dot{\forall}$ yerine $\dot{\exists}$ ve son olarak tüm $\dot{\exists}$ yerine $\dot{\forall}$ yazarak elde edilen formülü $\Delta\varphi$ ile göstereceğiz ve buna φ formülünün (yüklem mantıksal)**ikilisi** diyeceğiz. Örneğin $\varphi = \dot{\forall} x(\psi \to \dot{\exists} y\eta)$ ise

$$\Delta\varphi \equiv_{\vdash} \Delta\varphi' = \dot{\exists} x(\neg\psi \curlywedge \dot{\forall} y\eta).$$

$N\varphi$ ile φ' formülündeki her *atomik* altformülün önünde $\neg$ varsa bunu atarak, eğer $\neg$ yoksa önüne $\neg$ yazarak elde edilen formülü gösterelim. Şöyle de

diyebiliriz: Her atomik altformülün önüne $\neg$ yazalım ve sonra önlerindeki *çift* sayıdaki $\neg$ imlerini atalım. Örneğin P bir basamaklı ve R iki basamaklı bağıntı imleri olmak üzere $\varphi = \dot{\forall}x(P(x) \to \dot{\exists}yR(x,y))$ ise

$$N\varphi = N\dot{\forall}x(\neg P(x) \curlyvee \dot{\exists}yR(x,y)) = \dot{\forall}x(P(x) \curlyvee \dot{\exists}y\neg R(x,y)).$$

aşağıdaki İkililik Teoremi'nin (FTK) ile kanıtını ikinci bölümdekine benzer biçimde kanıtlamayı okura bırakıyoruz.

Teorem 3.12.16 (İkililik Teoremi) *Her $\varphi, \psi \in \operatorname{Fm} L$ için*
(i) $\neg\varphi \equiv_{\vdash} \Delta N\varphi$
(ii) $\varphi \equiv_{\vdash} \psi \iff \Delta\varphi \equiv_{\vdash} \Delta\psi$.

Örneğin $\varphi = \dot{\forall}x(P(x) \to \dot{\exists}yR(x,y))$ formülü için

$$\neg\varphi \equiv_{\vdash} \Delta N\varphi = \dot{\exists}x(P(x) \curlywedge \dot{\forall}y\neg R(x,y))$$

Tanım 3.12.17 *$Q_1, \ldots, Q_n \in \{\dot{\forall}, \dot{\exists}\}$ ve ψ ise niceleyiciler içermeyen bir formül olmak üzere $Q_1x_1 \cdots Q_nx_n\psi$ tipindeki formüllere* ***normal biçimde*** *veya* ***önsel yazılımda*** *bir formül diyeceğiz.*

Teorem 3.12.18 (Normal Biçim Teoremi) *Her φ formülü normal biçimdeki bir $Q_1x_1 \cdots Q_nx_n\psi$ formülüne biçimsel denktir.*

Kanıt. 3.12.16'dan dolayı $\varphi \equiv_{\vdash} \neg\Delta N\varphi$. Sağdaki formül yalnızca $\curlywedge, \curlyvee, \neg$ ve niceleyiciler içerir. (3.12.9) ve (3.12.10) uyarınca $\neg$ olabildiğince içe, atomik formüllerin başına gelinceye kadar kaydırılır. Sonra bir sonraki kesimde kanıtlayacağımız (3.13.4) ile tüm bağlı değişkenler φ'nin tüm serbest değişkenlerinden farklı olacak biçimde değiştirilerek $\varphi \equiv_{\vdash} \eta$ olan bir η elde edilir. η formülünden ise gerektiği kadar (3.12.13) ve (3.12.14) uygulanarak istenilen bir gösterim kazanılır. ■

Kısıtlanmış Niceleyiciler: İkililik Teoremi elbette biçimsel imler yerine anlamsal imler koyarak elde edilen anlamsal formüllerimiz için de geçerlidir. Bir $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ yapısında çalışırken $B \subseteq A$ olmak üzere $\exists x \in B\, \varphi^{\mathfrak{A}}$ ve $\forall x \in B\, \varphi^{\mathfrak{A}}$ gibi formüllerle de karşılaşırız. Böyle bir durumda kısıtlanmış niceleyicilerden söz ederiz. Eğer $\mathfrak{A}$ yapısında çalışıyorsak $\forall x$ ve $\exists x$ niceleyicilerimiz vardır ve burada söz konusu evren daima A kümesidir. $\exists x \in B\, \varphi^{\mathfrak{A}}$ ve $\forall x \in B\, \varphi^{\mathfrak{A}}$ formüllerinden ne anlıyoruz ve bunları nasıl biçimselleştiririz? B altkümesi bir basamaklı bir $P^{\mathfrak{A}}(x)$ bağıntısıyla verilmiş olsun, dd. $B = \{x \in A \mid P^{\mathfrak{A}}(x)\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{llll} \exists x \in B\ \varphi^{\mathfrak{A}} & \text{tam da} & \exists x \left(P^{\mathfrak{A}}(x) \wedge \varphi^{\mathfrak{A}}\right) & \text{ve} \\ \forall x \in B\ \varphi^{\mathfrak{A}} & \text{tam da} & \forall x \left(P^{\mathfrak{A}}(x) \Rightarrow \varphi^{\mathfrak{A}}\right) & \end{array}$$

yerine kullanılmışlardır. Bu durumda $P \in L$ bir basamaklı bir bağıntı imi olmak üzere

$$\dot{\exists} x\,(P(x) \curlywedge \ldots) \text{ ve } \dot{\forall} x\,(P(x) \to \ldots) = \dot{\forall} x\,(\neg P(x) \curlyvee \ldots)$$

kısıtlanmış niceleyicilerimiz olacaklardır. Bunlardan herhangi birinin değillemesi öbürüdür. Bundan matematik derslerinde sıkça yararlanırız.

Örneğin $\mathfrak{R}$ yapısında çalışıyor olalım. $P^{\mathfrak{R}}(x) = (x > 0)$ olsun. $B := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ olmak üzere

$$\forall \varepsilon \in B\,\varphi := \forall \varepsilon\,(\varepsilon > 0 \Rightarrow \varphi) \text{ ve } \exists \varepsilon \in B\,\varphi := \exists \varepsilon(\varepsilon > 0 \wedge \varphi)$$

olarak kullanılırlar. Analiz derslerinde biz çoğu kez $\forall x \in B\,\varphi$ yerine $\forall x > 0\,\varphi$ ve $\exists \varepsilon \in B\,\varphi$ yerine $\exists \varepsilon > 0\,\varphi$ yazarız. Bu durumda elbette $\neg\,(\forall \varepsilon > 0\,\varphi) = \exists \varepsilon > 0\,\Delta N\varphi$ ve $\neg\,(\exists \varepsilon > 0\,\varphi) = \forall \varepsilon > 0\,\Delta N\varphi$ olur. Bilindiği gibi bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonun bir a noktasında sürekli olması aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\ \ (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon) \text{ veya}$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x (\neg(|x - a| < \delta) \vee |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Ayrıntısını geçerek $N\neg(|x - a| < \delta) = (|x - a| < \delta)$ ve $N(|f(x) - f(a)| < \varepsilon) = |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$ olduğunu belirtelim. Yukarıda f fonksiyonunun a noktasında sürekliliğini veren formülü φ ile gösterirsek, f fonksiyonunun a noktasında süreksizliğini belirten $\neg\varphi$ için

$$\neg\varphi \equiv \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x\ (|x - a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon)$$

geçerlidir. Elbette burada anlamsal denklik söz konusudur.

3.13 Yerine Koyma ve Değişken Değiştirmeler

Teorem 3.13.1 (Yerine Koyma Kuralı) *$i = 1, \ldots, n$ için* $\mathrm{Sb}(\varphi, x_i|t_i)$ *ise*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \vdash \varphi(x_1|t_1, \ldots, x_n|t_n).$$

Yalın gösterimle $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \vdash \varphi(t_1, \ldots, t_n)$.

Kanıt. $y_1, \ldots, y_n$ değişkenleri $t_1, \ldots, t_n$ terimlerinde bulunmadıkları gibi φ formülünde de, serbest veya bağlı bulunmasınlar. Tanım gereği

$$\varphi(x_1|t_1, \ldots, x_n|t_n) = \varphi(x_1|y_1, \ldots, x_n|y_n)\,(y_1|t_1) \cdots (y_n|t_n)$$

ve biz bu yerine koymayı, herhangi bir sırada her defasında bir y_i yerine t_i koyarak da elde edebileceğimizi biliyoruz.

(1)	$\varphi(x_1,\ldots,x_n)$	vrs
(2)	$\dot\forall x_1\varphi(x_1,\ldots,x_n)$	(Gen)
(3)	$\varphi(x_1\|y_1,x_2,\ldots,x_n)$	(3.11.10) özelleştirme
(4)	$\dot\forall x_2\varphi(x_1\|y_1,x_2,\ldots,x_n)$	(Gen)
(5)	$\varphi(x_1\|y_1,x_2\|y_2,x_3,\ldots,x_n)$	(3.11.10) özelleştirme
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
(a_1)	$\varphi(y_1,\ldots,y_n)$	(yalın yazılım)
(b_1)	$\dot\forall y_1\varphi(y_1,\ldots,y_n)$	(Gen)
(c_1)	$\varphi(y_1\|t_1,y_2,\ldots,y_n)$	(3.11.10) özelleştirme
(a_2)	$\dot\forall y_2\varphi(y_1\|t_1,y_2,\ldots,,y_n)$	(Gen)
(b_2)	$\varphi(y_1\|t_1,y_2\|t_2,\ldots,y_n)$	(3.11.10) özelleştirme
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
(a_n)	$\varphi\,(y_1\|t_1,y_2\|t_2,\ldots,y_{n-1}\|t_{n-1},y_n)$	(3.11.10) özelleştirme
(b_n)	$\dot\forall y_n\varphi\,(y_1\|t_1,y_2\|t_2,\ldots,y_{n-1}\|t_{n-1},y_n)$	(Gen)
(c_n)	$\varphi(y_1\|t_1,y_2\|t_2,\ldots,y_{n-1}\|t_{n-1},y_n\|t_n)$	(3.11.10) özelleştirme

■

Teorem 3.13.2 (Yerine Koyma Teoremi) *$i=1,\ldots,n$ için* $\mathrm{Sb}(\varphi,x_i|t_i)$ *ise*

(i) $\quad\vdash \dot\forall x_1\cdots\dot\forall x_n\varphi\to\varphi(x_1|t_1,\ldots,x_n|t_n).$

(ii) $\quad\vdash \varphi(x_1|t_1,\ldots,x_n|t_n)\to\dot\exists x_1\ldots\dot\exists x_n\varphi.$

Kanıt.

(1) $\vdash \dot\forall x_1\dot\forall x_2\cdots\dot\forall x_n\varphi\to\dot\forall x_2\cdots\dot\forall x_n\varphi(x_1|t_1,x_2,\ldots,x_n).$

(2) $\dot\forall x_2\cdots\dot\forall x_n\varphi(x_1|t_1,x_2,\ldots,x_n)\to\dot\forall x_3\cdots\dot\forall x_n\varphi(x_1|t_1,x_2|t_2,\ldots,x_n).$

(3) $\vdash \dot\forall x_1\dot\forall x_2\cdots\dot\forall x_n\varphi\to\dot\forall x_3\cdots\dot\forall x_n\varphi(x_1|t_1,x_2|t_2,\ldots,x_n).$

Burada (1) ve (2)'de σ_4 ilksavı, (3)'te ise (1), (2) ve (MP) kullanılmıştır. Bu şekilde devam ederek sonlu adımda $\vdash \dot\forall x_1\cdots\dot\forall x_n\varphi\to\varphi(x_1|t_1,\ldots,x_n|t_n)$ elde edilir. Bu (i)'yi kanıtlar. (i) sürekli $\dot\forall$ atmalarla kanıtlandı; (ii)'yi $\dot\exists$ katmalarla kanıtlamayı okura bırakıyoruz. ■

Lemma 3.13.3 *$y\notin\deg\varphi$ ise, dd. y değişkeni φ formülünde hiçbir yerde ne bağlı ne de serbest bulunmuyorsa $\varphi(x|y)\,(y|x)=\varphi$.*

Kanıt. (FTK) ile kanıtlayacağız. φ bir atomik formülse sav aşikârdır. $\varphi=\neg\psi$ veya $\varphi=\psi\to\eta$ ve sav ψ veya ψ ve η için kanıtlanmışsa, savın φ içinde doğru olduğunu görmeyi okura bırakıyoruz.

Şimdi $\varphi=\dot\forall z\psi$ olsun ve sav ψ için kanıtlanmış olsun. Bu durumda $z=x$ olabilir, ancak $y\neq z$! Eğer $z=x$ ise tanım gereği $\varphi(x|y)=\varphi$. Ayrıca $y\notin\mathrm{Sb}\,\varphi$ olduğundan $\varphi(x|y)(y|x)=\varphi(y|x)=\varphi$ olur.

Şimdi $z \neq x$ olsun. Tümevarım koşulumuzdan $\psi(x|y)(y|x) = \psi$.

$$\begin{aligned}\varphi(x|y)(y|x) &= (\dot{\forall} z\psi)(x|y)(y|x)\\ &= (\dot{\forall} z\psi\,(x|y))\,(y|x)\,, \quad y \neq z \text{ ve tanım}\\ &= \dot{\forall} z\psi(x|y)(y|x), \quad x \neq z \text{ ve tanım}\\ &= \dot{\forall} z\psi = \varphi, \quad \text{tvk.}\end{aligned}$$

■

Teorem 3.13.4 (Bağlı Değişken Değiştirme) *$y \notin \deg\varphi$ ise, dd. y değişkeni φ formülünde ne serbest ne de bağlı olarak bulunmuyorsa*

$$(a):\ \dot{\forall} x\varphi \equiv_{\vdash} \dot{\forall} y\varphi(x|y) \quad \textit{ve} \quad (b):\ \dot{\exists} x\varphi \equiv_{\vdash} \dot{\exists} y\varphi(x|y).$$

Yalın yazılımla $\dot{\forall} x\varphi(x) \equiv_{\vdash} \dot{\forall} y\varphi(y)$ ve $\dot{\exists} x\varphi(x) \equiv_{\vdash} \dot{\exists} y\varphi(y)$.

Kanıt. (a) $\Longrightarrow$: $\mathrm{Sb}(\varphi, x|y)$ ve $y \notin \mathrm{Sb}\,\dot{\forall} x\varphi$ olduğundan

$$\begin{array}{lll}(1) & \dot{\forall} x\varphi \to \varphi(x|y) & \sigma_4(\varphi, x, y)\\ (2) & \dot{\forall} x\varphi \to \dot{\forall} y\varphi(x|y) & \dot{\forall} K, (3.11.15)\end{array}$$

(a) $\Longleftarrow$: $x \notin \mathrm{Sb}\,\varphi(x|y)$ ve varsayımlarımızdan dolayı φ formülünde x değişkeninin serbest bulunduğu yerlerde şimdi $\varphi\,(x|y)$ formülünde y değişkeni serbest bulunmaktadır. Böylece $\mathrm{Sb}\,(\varphi\,(x|y)\,, y|x)$. $x \notin \mathrm{Sb}(\dot{\forall} y\varphi\,(x|y))$ olduğundan:

$$\begin{array}{lll}(1) & \dot{\forall} y\varphi(x|y) \to \varphi(x|y)(y|x) & \sigma_4\\ (2) & \dot{\forall} y\varphi(x|y) \to \varphi & (1)\ \textit{ve}\ (3.13.3)\\ (3) & \dot{\forall} y\varphi(x|y) \to \dot{\forall} x\varphi & \dot{\forall} K,\ (3.11.15).\end{array}$$

Böylece $\dot{\forall} x\varphi \equiv_{\vdash} \dot{\forall} y\varphi(x|y)$. Bu kez σ_4' ve $\dot{\exists} K$, (3.11.15) aracılığı ile savın ikinci yarısını kanıtlamayı okura bırakıyoruz. ■

$\eta := \dot{\forall} x\psi$ veya $\xi := \dot{\exists} x\psi$ formülü φ formülünün bir altformülü ve y değişkeni ne φ formülünde ne de $t_1, \ldots, t_n$ terimlerinde geçmeyen bir değişken olmak üzere $\eta' := \dot{\forall} y\psi(x|y)$ veya $\xi' := \dot{\exists} y\psi(x|y)$ olsun. $\eta \equiv_{\vdash} \eta'$ ve $\xi \equiv_{\vdash} \xi'$ olduğundan φ formülünde η veya ξ yerine η' veya ξ' yazarak elde ettiğimiz formülü φ' ile gösterirsek (3.12.7) Yerine Koyma Teoremi'nden dolayı $\varphi \equiv_{\vdash} \varphi'$ olur. Böyle bir geçişe **doğrudan** (veya **dolaysız**) **bağlı değişken değişimi** diyelim.

φ formülü verilsin. Her $1 \leq k \leq n$ için φ_k formülü φ_{k-1} formülünden dolaysız bağlı değişken değişimi ile edilmiş olmak üzere bir $\varphi = \varphi_0, \varphi_1, \ldots,$

$\varphi_n = \varphi'$ dizisi bulunabiliyorsa φ' formülüne φ f**ormülünün bağlı değişken değişmişi** denir.

Bir φ formülünün ifadesinde herhangi bir yerde serbest olan bir değişken, formülümüzde hiçbir yerde bağlı bulunmuyorsa, ayrıca her bağlı değişken yalnızca bir kez bir niceleyicinin gezen değişkeni ise φ formülü **temiz yazılmıştır** diyelim. Sonlu adımda dolaysız bağlı değişken değiştirmelerle aşağıdaki teoreme ulaşacağımız kolayca görülür.

Teorem 3.13.5 *1. φ' formülü φ formülünün bir bağlı değişken değişmişi ise $\varphi \equiv_{\vdash} \varphi'$.*
2. φ'_1 ve φ'_2 formülleri φ'nin bağlı değişken değişmişleri iseler $\varphi'_1 \equiv_{\vdash} \varphi'_2$.
3. Her φ formülünün temiz yazılmış bir bağlı değişken değişmişi vardır.
4. $y_1, \ldots, y_m$ değişkenleri nasıl verilirse verilsin φ formülünün bir φ' bağlı değişken değişmişi $y_1, \ldots, y_m \notin \operatorname{Bg}\varphi'$ olacak biçimde bulunabilir.

Bu teorem değişkenler yerine terimler koymada elimizi oldukça rahatlatır. Örneğin $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ formülünde x_i yerine t_i terimlerini koymak isteyelim. t_i terimleri φ formülünde x_i yerine koymaya izinli olmayabilirler. $\bigcup_{i=1}^n \deg t_i \subseteq \{y_1, \ldots, y_m\}$ ve $\bigcup_{i=1}^n \deg t_i \subseteq \{z_1, \ldots, z_k\}$ olsun. φ'nin φ' ve φ'' bağlı değişken değişmişleri ve $y_1, \ldots, y_m \notin \operatorname{Bg}\varphi'$ ve $z_1, \ldots z_k \notin \operatorname{Bg}\varphi''$ olsunlar. $\varphi \equiv_{\vdash} \varphi'$, $\varphi \equiv_{\vdash} \varphi''$ ve $\equiv_{\vdash}$ bir denklik bağıntısı olduğundan $\varphi' \equiv_{\vdash} \varphi''$ olur. Bu aşağıdaki tanımı, kanıtlanabilir denklik dışında tek olarak belirler.

Tanım 3.13.6 $\bigcup_{i=1}^n \deg t_i = \{y_1, \ldots, y_m\}$ *ve φ' ise φ formülünün $y_1, \ldots, y_m \notin \operatorname{Bg}\varphi'$ koşulunu sağlayan bir bağlı değişken değişmişi olmak üzere*

$$\varphi(x_1|t_1, \ldots, x_n|t_n) := \varphi'(x_1|t_1, \ldots, x_n|t_n)$$

Teorem 3.13.7 (Ayırt edilemezlik İlkesi) *1. $r \in \operatorname{Tm} L$ terimi $t \in \operatorname{Tm} L$ teriminin bir altterimi olsun. t' terimi t teriminde geçtiği bazı yerlerde r terimi yerine s terimi yazılarak elde edilsin. Bu durumda*

$$\vdash r \doteq s \to t \doteq t'$$

2. $t_1, \ldots t_n, t'_1, \ldots t'_n \in \operatorname{Tm} L$, $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ olsun ve her $i = 1, \ldots, n$ için $\operatorname{Sb}(\varphi, x_i|t_i)$ ve $\operatorname{Sb}(\varphi, x_i, t'_i)$ olsun. Bu durumda

$$\vdash t_1 \doteq t'_1 \curlywedge \cdots \curlywedge t_n \doteq t'_n \to \left(\varphi(t_1, \ldots, t_n) \leftrightarrow \varphi'(t'_1, \ldots, t'_n)\right).$$

Sonuç 3.13.8 *Teoremin koşulları altında*

$$\Gamma \vdash r \doteq s \text{ ise } \Gamma \vdash t \doteq t'.$$
$$\Gamma \vdash r \doteq s \text{ ve } \Gamma \vdash \varphi \text{ ise } \Gamma \vdash \varphi'.$$

Kanıt. İlk savı terimler üzerinden ikincisini formüller üzerinden tümevarımla kanıtlayacağız.

(1) Eğer t bir sabit veya değişken ise $r = t$ ve $t' = s$ olacağından sav $\vdash r \doteq s \to r \doteq s$ dosdoğrusudur. Şimdi $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ ve önerme $t_1, \ldots, t_n$ terimleri için kanıtlanmış olsun. Bu durumda $t' = f(t'_1, \ldots, t'_n)$; burada t'_k terimi t_k teriminden, geçtiği bazı yerlerde r terimi yerine s yazarak elde edilmişlerdir. Varsayımdan dolayı $k = 1, \ldots, n$ için $\vdash r \doteq s \to t_k \doteq t'_k$. Dolayısıyla $\vdash r \doteq s \to t_1 \doteq t'_1 \wedge \cdots \wedge t_n \doteq t'_n$. Diğer yandan (E4)'ten özelleştirme ile $\vdash t_1 \doteq t'_1 \wedge \cdots \wedge t_n \doteq t'_n \to f(t_1, \ldots, t_n) \doteq f(t'_1, \ldots, t'_n)$. Son iki tümceden (MP) ile $\vdash r \doteq s \to t \doteq t'$ olur.

Aşağıda herhangi bir κ formülü için κ' ile daima κ formülünde geçtiği bazı yerlerde r terimi yerine s terimi yazılarak elde edilen bir formül kastedilsin.

(2) φ bir atomik formül olsun. $\doteq$ de bir ikili bağıntı olduğundan tüm atomik formüllerimiz $R(x_1, \ldots, x_n)$ tipindedir. (E5)'ten özelleştirme ile doğrudan $\vdash t_1 \doteq t'_1 \wedge \cdots \wedge t_n \doteq t'_n \to (R(t_1, \ldots, t_n) \leftrightarrow R(t'_1, \ldots, t'_n))$.

Eğer $\varphi = \neg\psi$ ve sav ψ için kanıtlanmışsa veya $\varphi = \psi \to \eta$ ve sav ψ ve η için kanıtlanmışsa savın φ için de doğru olduğunu görmeyi okura bırakıyoruz. Bunların ilki için $\vdash_{\text{om}} p \to (q \leftrightarrow q')$ ise $\vdash_{\text{om}} p \to (\neg q \leftrightarrow \neg q')$ ikincisi içinse $\vdash_{\text{om}} p \to (q_1 \leftrightarrow q'_1)$ ve $\vdash_{\text{om}} p \to (q_2 \leftrightarrow q'_2)$ ise $\vdash_{\text{om}} p \to ((q_1 \to q_2) \leftrightarrow (q'_1 \to q'_2))$ olduğunu bilmek yeterlidir.

Şimdi $\varphi = \forall x\psi$ ve önerme ψ için kanıtlanmış olsun. t_i ve t'_i terimleri φ formülünde x_i yerine konabildiğinden $x \notin \operatorname{Sb} t_i$ ve $x \notin \operatorname{Sb} t'_i$. Varsayımdan

$$\vdash t_1 \doteq t'_1 \wedge \cdots \wedge t_n \doteq t'_n \to (\psi(t_1, \ldots, t_n) \leftrightarrow \psi(t'_1, \ldots, t'_n)).$$

$x \notin \operatorname{Sb}(t_1 \doteq t'_1 \wedge \cdots \wedge t_n \doteq t'_n)$ olduğundan σ_5 ilksavı ile

$$\vdash t_1 \doteq t'_1 \wedge \cdots \wedge t_n \doteq t'_n \to \dot\forall x(\psi(t_1, \ldots, t_n) \leftrightarrow \psi(t'_1, \ldots, t'_n)). \tag{3.30}$$

(3.11.16)'dan dolayı $\vdash \dot\forall x\,(\xi \leftrightarrow \eta) \to \left(\dot\forall x\xi \leftrightarrow \dot\forall x\eta\right)$ olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla $\theta := \dot\forall x(\psi(t_1, \ldots, t_n) \leftrightarrow \psi(t'_1, \ldots, t'_n))$ olmak üzere

$$\vdash \theta \to (\dot\forall x\psi(t_1, \ldots, t_n) \leftrightarrow \dot\forall x\psi(t'_1, \ldots, t'_n)) \tag{3.31}$$

(3.30) ve (3.31)'den (MP) ile

$$\vdash t_1 \doteq t'_1 \wedge \cdots \wedge t_n \doteq t'_n \to (\varphi(t_1, \ldots, t_n) \leftrightarrow \varphi(t'_1, \ldots, t'_n))$$

elde edilir.

Sonuç teoremden ayırma kuralı ile doğrudan çıkar. ■

- Ayırte dilemezlik ilkesi eşitlik üzerine söylenecek en önemli şeydir. Matematikte *eşitlik* çok *seyrek olarak özdeşlik olarak* kullanılır; örneğin abecemizin sözcükleri, özellikle terimlerimiz ve formüllerimiz için eşitlik özdeşlik olarak kullanılmıştır. Genelde ise eşitlik (E1), (E2) ve (E3)'ten dolayı bir *denklik bağıntısıdır* ve (E4) ve (E5) ile ayrıca bu bağıntının kullandığımız alanın temel temel kavramlarına göre bir *benzeşme* olmasını isteriz.

- (3.13.7)(2)'ye Leibniz eşitlik ilkesi olarak bakabiliriz. Herhangi bir $\mathfrak{A}$ yapısında $a, b \in A$ öğelerinin eşitliğinden Leibniz'in anladığı, *bu yapıda* A *evreninin öğelerine ilişkin* her $P(x)$ *özelliği için* $P(a) \iff P(b)$ *olmasıdır.* O dönem için kabul edilebilir olan bu tanımda bugün yaptığımız "özellik" kavramını $\varphi \in \operatorname{Fm} L^{\mathfrak{A}}$ formüllerine kısıtlayarak netleştirmek olmuştur.

Seçme Kuralı (S Kuralı)

İçeriksel çıkarımlarımızda başvurduğumuz yöntemlerden birisi de şudur: Elimizde $\exists x\varphi$ gibi bir kanıtlanmış teoremimiz olduğunda "d sabiti için $\varphi(d)$ olsun" diyerek bir d sabiti seçer ve bu bilgiyi kanıtta kullanırız. $\dot{\exists}x\varphi$ formülünden $\varphi(d) = \varphi(x \,|\, d)$ formülüne geçtiğimizde "**S Kuralı**" uygulanmıştır ve $\varphi(d)$ *formülü* $\dot{\exists}x\varphi$ *formülünden S Kuralı ile elde edilmiştir* diyeceğiz. d sabitine *yardımcı sabit* de denir. Burada da tümüyle özgür olmadığımızı örnekleyelim.

Örneğin R bir ikili bağıntı olmak üzere en az bir c sabiti ile $\vdash \dot{\forall}x\dot{\exists}yR(x,y) \to \dot{\forall}xR(x,c)$ olduğunu kanıtlayalım.

(1)	$\dot{\forall}x\dot{\exists}yR(x,y)$	varsayım.
(2)	$\dot{\exists}yR(x,y)$	(1) ve özelleştirme
(3)	$R(x,c)$	(2) ve S Kuralı
(4)	$\dot{\forall}xR(x,c)$	(3), (Gen)

x değişkeni varsayımda serbest olmadığından Çıkarım Teoremi ile

$$\vdash \dot{\forall}x\dot{\exists}yR(x,y) \to \dot{\forall}xR(x,c)$$

elde edilir. Ancak $\mathfrak{R}_<$ yapısında $R(x,y)$ atomik formülü $x < y$ olacak biçimde yorumlanırsa $\mathfrak{R}_< \not\models \dot{\forall}x\dot{\exists}yR(x,y) \to \dot{\forall}xR(x,c)$! Doğruluk Teoremi'nden dolayı yukarıdaki kanıt doğru olamaz! Yanlış (4)'tedir. $R(x,c)$ formülündeki serbest bulunan x değişkeni aslında c seçimiyle bir anlamda *kısıtlanmıştır.* Anlamsal kanıtlarımızda, eğer titizsek, c yerine $c(x)$ yazarız. Çünkü bu sabitin seçimi genelde x'e bağlıdır. Bu örnekten çıkaracağımız sonuç şudur: *S Kuralı ile elde edilen* φ *formüllerinin serbest değişkenleri üzerinden (Gen) uygulanmaz!*

$\varphi(c) = \varphi(x \mid c)$ ve $\psi(c) = \psi(x \mid c)$ olmak üzere aşağıdaki kanıtı inceleyelim.

(1)	$\dot{\exists}x\varphi \curlywedge \dot{\exists}x\psi$	vrs
(2)	$\dot{\exists}x\varphi$	(1) ve $\curlywedge A$.
(3)	$\varphi(c)$	(2) ve S Kuralı.
(4)	$\dot{\exists}x\psi$	(1) ve $\curlywedge A$.
(5)	$\psi(c)$	(4) ve S Kuralı.
(6)	$\varphi(c) \curlywedge \psi(c)$	(3), (5),
(7)	$\dot{\exists}x\,(\varphi(x) \curlywedge \psi(x))$	(6), σ_4' $(\dot{\exists}K)$.

Çıkarım kuralı ile $\vdash \dot{\exists}x\varphi \curlywedge \dot{\exists}x\psi \to \dot{\exists}x(\varphi \curlywedge \psi)$ elde ederiz. Ancak bu sonuç doğru olamaz! Örneğin $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ formülleri $\mathfrak{N}$ yapısında yorumları sırasıyla "x çifttir" ve "x tektir" olan formüllerse $\mathfrak{N} \not\models \dot{\exists}x\varphi \curlywedge \dot{\exists}x\psi \to \dot{\exists}x(\varphi \curlywedge \psi)$! Yanlış beşinci adımdadır: Orada S Kuralı'nı uygularken, daha önce yine S Kuralı ile seçilmiş aynı c sabitini seçtik. İkinci kural: *Bir kanıtta S Kuralı birden fazla uygulanırsa, her uygulamada farklı* yeni *sabitler seçilmelidir.* Özel durumlarda aynı sabitin seçilebilir olması bizi ırgalamaz. Şimdi aşağıdaki kanıta bakalım. φ formülü c sabitini içersin ve $x \notin \operatorname{Sb}\varphi$ olsun.

(1)	$\varphi \curlywedge \dot{\exists}x\psi$	vrs
(2)	φ	(1) ve $\curlywedge A$
(3)	$\dot{\exists}x\psi$	(1) ve $\curlywedge A$
(4)	$\psi(c)$	(3), S Kuralı
(5)	$\varphi \curlywedge \psi(c)$	(2), (4), ön. man.

Çıkarım kuralı ile $\vdash \varphi \curlywedge \dot{\exists}x\psi \to \varphi \curlywedge \psi(c)$ elde edilir. Ancak bu doğru olamaz. Örneğin φ ve $\dot{\exists}x\psi$ formülleri $\mathfrak{R}$ yapısında yorumları sırasıyla $c^2 = 2$ ve $\exists x\,(x + x = 4)$ olan formüller olduğunda $\mathfrak{R}$ yapısında $\varphi \curlywedge \dot{\exists}x\psi$ formülü doğru iken $\varphi \curlywedge \psi(c)$, dd. $(c^2 = 2) \wedge (c + c = 4)$ formülü yanlıştır. Buradaki yanlış (4). adımda S kuralı ile seçtiğimiz c sabitinin üst satırlardaki φ formülünde geçmesidir. Bu örnekler ışığında aşağıdaki tanımın mantığı apaçıktır.

Tanım 3.13.9 *$\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi \in \operatorname{Fm} L$ olmak üzere, aşağıdaki koşullar sağlandığında, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ dizisine ψ formülünün Γ'dan bir* ***seçmeli biçimsel kanıtı*** *(veya kısaca* ***S biçimsel kanıtı****) denir ve bu $\Gamma \vdash^S \psi$ ile gösterilsin:*

1. *$\varphi_n = \psi$,*
2. *Her i için φ_i formülü*
   - *(a) bir ilksavdır,veya*
   - *(b) $\varphi_i \in \Gamma$, veya*
   - *(c) φ_i kendinden önce gelenlerden (MP) veya (Gen) ile kazanılmıştır, veya*

(d) kendinden önce gelen bir $\dot{\exists}x\varphi$ tipinde bir formülden S Kuralı ile elde edilmiş $\varphi(c)$ tipinde bir formüldür; bu son durumda c sabitinin kendinden önce gelen formüllerdeki ve ψ formülündeki tüm sabitlerden farklı olmasını isteyeceğiz,

3. Herhangi bir yerde (Gen) kullanılacaksa, kendinden önce gelen ve S Kuralı'nda kullanılan $\dot{\exists}x\varphi$ tipindeki formüllerin serbest değişkenleri üzerinden (Gen) kullanılamaz.

Teorem 3.13.10 (S Kuralı) $\Gamma \vdash^S \psi$ *ise* $\Gamma \vdash \psi$.

Kanıt. ψ formülünün bir Γ seçmeli biçimsel kanıtı verilsin. Bu dizide S Kuralı'nın uygulandığı formüller soldan sağa geçiş sıralarına göre $\dot{\exists}x_1\eta_1$,..., $\dot{\exists}x_k\eta_k$ ve seçilen yeni sabitlerimiz ise sırasıyla d_1,..., d_k olsun. Bu durumda $\Gamma, \eta_1(d_1), \ldots, \eta_k(d_k) \vdash \psi$. (3.13.9) tanımından dolayı çıkarım kuralı uygulanabilir ve $\Gamma, \eta_1(d_1), \ldots, \eta_{k-1}(d_{k-1}) \vdash \eta_k(d_k) \to \psi$ elde edilir. z değişkeni bu kanıtta geçmeyen herhangi bir değişken olmak üzere, bu kanıtta geçtiği her yerde d_k yerine z yazarsak

$$\Gamma, \eta_1(d_1), \ldots, \eta_{k-1}(d_{k-1}) \vdash \eta_k(z) \to \psi$$

ve buradan (Gen) ile

$$\Gamma, \eta_1(d_1), \ldots, \eta_{k-1}(d_{k-1}) \vdash \dot{\forall}z(\eta_k(z) \to \psi$$

elde edilir. (3.12.2) ve (3.12.15)(iii)'ten

$$\Gamma, \eta_1(d_1), \ldots, \eta_{k-1}(d_{k-1}) \vdash \dot{\exists}z\eta_k(z) \to \psi$$

Buradan (3.12.7) ve (3.13.4) ile

$$\Gamma, \eta_1(d_1), \ldots, \eta_{k-1}(d_{k-1}) \vdash \dot{\exists}x_k\eta_k(x_k) \to \psi$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\Gamma, \eta_1(d_1), \ldots, \eta_{k-1}(d_{k-1}) \vdash \dot{\exists}x_k\eta_k(x_k)$$

olduğundan son iki formülden (MP) ile

$$\Gamma, \eta_1(d_1), \ldots, \eta_{k-1}(d_{k-1}) \vdash \psi$$

elde edilir. Bu işlem sürdürülerek sonlu adımda $\Gamma \vdash \psi$ elde edilir. ■

Örnek 3.13.11 S Kuralı oldukça kullanışlıdır ve varlık niceleyicisini içeren varsayımların olduğu biçimsel kanıtları, sezgisel kanıtlarımıza yaklaştırır. Bir örnek olmak üzere

$$\vdash \dot{\exists}x(\varphi \to \psi) \to (\dot{\forall}x\varphi \to \dot{\exists}x\psi)$$

olduğunu kanıtlayalım. Çıkarım Teoremi'nden dolayı $\dot{\exists}x(\varphi \to \psi), \dot{\forall}x\varphi \vdash \dot{\exists}x\psi$ olduğunu göstermek yeterlidir.

1.	$\dot{\exists}x(\varphi \to \psi)$	vrs
2.	$\dot{\forall}x\varphi$	vrs
3.	$\varphi(x \mid c) \to \psi(x \mid c)$	1, ve S Kuralı
4.	$\varphi(x \mid c)$	2., özelleştirme
5	$\psi(x \mid c)$	3., 4. ve (MP)
6.	$\dot{\exists}x\psi$	$\dot{\exists}K$

Bu $\dot{\exists}x(\varphi \to \psi), \dot{\forall}x\varphi \vdash^S \dot{\exists}\psi$ demektir. Seçme Kuralı ile buradan $\dot{\exists}x(\varphi \to \psi), \dot{\forall}x\varphi \vdash \dot{\exists}\psi$ elde ederiz ve işimiz biter.

Bu örnekten de görüldüğü gibi herhangi bir özelleştirmede, örneğimizde 4. adımda, daha önce S kuralı ile seçilmiş bir c sabitini seçmemizi engelleyen bir şey yoktur. ▲

3.14 Biçimsel Tutarlılık

Bu kesimde, yedinci kesimde verdiğimiz anlamsal tutarlılık ve anlamsal tamlık kavramlarını biçimselleştireceğiz. Oradaki tanım ve teoremler buradakine ışık tutacaktır. Bu kesimde daima $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ olacaktır.

Tanım 3.14.1 Γ ***biçimsel tutarlı(çelişkisiz):*** $\iff \Gamma \nvdash \bot$. *Eğer* $\Gamma \vdash \bot$ *ise ve ancak bu durumda* Γ ***biçimsel tutarsızdır (çelişkilidir)*** *denir.* Γ *biçimsel tutarlı(veya tutarsız) ise* $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ *kuramı biçimsel tutarlı(veya tutarsızdır) denir.*

Önerme 3.14.2 *Modeli olan* $\mathcal{K}$ *biçimsel kuramları biçimsel tutarlıdır.*

Kanıt. $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramının bir $\mathfrak{A}$ modeli bulunsun. $\mathcal{K}$'nin her biçimsel teoremi $\mathfrak{A}$ modelinde doğrudur. $\bot$ her modelde yanlış olduğundan $\Gamma \nvdash \bot$, dolayısıyla $\mathcal{K}$ biçimsel tutarlıdır. ■

Eğer biçimsel tutarlılık kavramı anlamsal tutarlılığı tam olarak yansıtacaksa bu önermenin tersinin de doğru olması gerekir, dd. Γ *biçimsel tutarlı ise bir modeli* olmalıdır. Bu doğrudur ve Gödel Tamlık Teoremi'dir. İlerde kanıtlanacaktır.

Önerme 3.14.3 Γ*'nın biçimsel tutarsız olması için gerek ve yeter koşul her* $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ *için* $\Gamma \vdash \varphi$*, dd. ile* $\operatorname{Fm} L = \operatorname{Bc} \Gamma$ *olmasıdır.*

Kanıt. Γ biçimsel tutarsız, dd. $\Gamma \vdash \bot$ olsun. $\bot \to p$ bir önermemantıksal hepdoğru olduğundan her φ için $\vdash \bot \to \varphi$, özellikle $\Gamma \vdash \bot \to \varphi$. (MP) ile $\Gamma \vdash \varphi$.

Tersine $\operatorname{Fm} L = \operatorname{Bc} \Gamma$ ise özellikle $\Gamma \vdash \bot$, dolayısıyla tanım gereği Γ biçimsel tutarsızdır. ■

Sonuç 3.14.4 *Γ'nın biçimsel tutarsız olması için gerek ve yeter koşul en az bir φ için $\Gamma \vdash \varphi$ ve $\Gamma \vdash \neg\varphi$ olmasıdır.*

Kanıt. Γ biçimsel tutarsızsa $\mathrm{Bc}\,\Gamma = \mathrm{Fm}\,L$ olacağından her φ için $\Gamma \vdash \varphi$ ve $\Gamma \vdash \neg\varphi$ olur. Tersine bir φ için $\Gamma \vdash \varphi$ ve $\Gamma \vdash \neg\varphi$ olsun ve $\psi \in \mathrm{Fm}\,L$ formülü keyfi verilsin. $\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$ bir dosdoğru olduğundan $\Gamma \vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$. (3.11.3) ayırma kuralı iki kez art arda uygulanarak $\Gamma \vdash \psi$. Dolayısıyla Γ biçimsel tutarsızdır. ■

Teorem 3.14.5 (Biçimsel Sonluluk Teoremi) *Γ'nın biçimsel tutarlı olması için gerek ve yeter koşul her* sonlu $\Delta \subseteq \Gamma$ *altkümesinin biçimsel tutarlı olmasıdır.*

Kanıt. Γ'nın biçimsel tutarsız olması $\Gamma \vdash \bot$ olması demektir. Bu ise sonlu bir $\Delta \subseteq \Gamma$ ile $\Delta \vdash \bot$ olması, dd. en az sonlu bir Δ altkümesinin biçimsel tutarsız olması demektir. ■

Not 3.14.6 Biçimsel tutarlılık için, teorem ismini hak etmeyecek kadar kolayca elde edilen bu sonuç, "*Her biçimsel tutarlı Γ'nın bir modeli olduğunu* " kanıtladığımızda son derece önemli bir teoreme dönüşür: *Γ'nın bir modeli olması için gerek ve yeter koşul her sonlu $\Delta \subseteq \Gamma$ altkümesinin bir modeli olmasıdır.* ▲

Önerme 3.14.7 *$\mathrm{Fm}\,L$'nin biçimsel tutarlı altkümelerinin $\subseteq$ bağıntısına göre doğrusal sıralanmış her $\mathfrak{Z}$ kolleksiyonu için $\bigcup\mathfrak{Z}$ biçimsel tutarlıdır.*

Sonuç 3.14.8 *Her n doğal sayısı için $\Gamma_n \subseteq \mathrm{Fm}\,L$, her Γ_n biçimsel tutarlı ve $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \cdots$ ise $\Gamma := \cup_{n=0}^{+\infty}\Gamma_n$ biçimsel tutarlıdır.*

Kanıt. $\Delta \subseteq \bigcup\mathfrak{Z}$ sonlu bir altkümeyse, $\mathfrak{Z}$ kolleksiyonu $\subseteq$ bağıntısına göre doğrusal sıralanmış olduğundan $\Delta \subseteq \Omega$ olacak biçimde bir $\Omega \in \mathfrak{Z}$ bulunabilir. Ω biçimsel tutarlı olduğundan (3.14.5) ile Δ biçimsel tutarlıdır. $\bigcup\mathfrak{Z}$'nin her sonlu Δ altkümesi biçimsel tutarlı olduğundan yine (3.14.5) ile $\bigcup\mathfrak{Z}$ biçimsel tutarlıdır. ■

Önerme 3.14.9 *$\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}\,L$ için aşağıdakiler denktir:*

1. *Γ biçimsel tutarlıdır.*
2. *$\mathrm{Bc}\,\Gamma$ biçimsel tutarlıdır.*
3. *Her $\sigma \in \mathrm{Sav}\,L$ için: $\sigma \notin \mathrm{Bc}\,\Gamma$ veya $\neg\sigma \notin \mathrm{Bc}\,\Gamma$.*

Kanıt. (1) $\Longrightarrow$ (2): $\mathrm{Bc}\,\Gamma$ biçimsel tutarsız olsun, bu $\mathrm{Bc}\,\Gamma \vdash \bot$ demektir. $\mathrm{Bc}\,\Gamma = \mathrm{Bc}(\mathrm{Bc}\,\Gamma)$ olduğundan $\Gamma \vdash \bot$ ve Γ biçimsel tutarsız olur.

(2) $\Longrightarrow$ (1): $\Gamma \subseteq \mathrm{Bc}\,\Gamma$ olduğundan $\mathrm{Bc}\,\Gamma \nvdash \bot$ ise $\Gamma \nvdash \bot$.

(3.14.4) şöyle de okunabilir: Γ biçimsel tutarlıdır $\Longleftrightarrow$ Her φ için $\varphi \notin \mathrm{Bc}$ veya $\neg\varphi \notin \mathrm{Bc}\,\Gamma$.

(1)$\Longrightarrow$(3): Yukarıda söylenenden aşikârdır.

(3)$\Longrightarrow$(1): (1) doğru olmasın. En az bir φ için $\Gamma \vdash \varphi$ ve $\Gamma \vdash \neg\varphi$ olur. Bunun sonucu olarak (3.14.4)'ün kanıtına gösterildiği gibi her ψ için $\Gamma \vdash \psi$ ve $\Gamma \vdash \neg\psi$ olur. Öyleyse (3) yanlıştır ve bkb. ■

Önerme 3.14.10 *Her $\varphi \in \mathrm{Fm}\,L$ ve her $\sigma \in \mathrm{Sav}\,L$ için:*

1. $\Gamma \vdash \varphi \implies \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *ve* $\Gamma \cup \{\neg\varphi^{\dot\forall}\}$ *biçimsel tutarsızdır.*

2. $\Gamma \vdash \sigma \iff \Gamma \cup \{\neg\sigma\}$ *biçimsel tutarsızdır.*

3. $\Gamma \nvdash \sigma \iff \Gamma \cup \{\neg\sigma\}$ *biçimsel tutarlı.*

4. $\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi^{\dot\forall}\}$ *biçimsel tutarsızdır.*

Kanıt. 1.: $\Gamma \vdash \varphi$ olsun. O zaman $\Gamma \vdash \varphi^{\dot\forall}$, dolayısıyla $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi, \neg\varphi$ ve $\Gamma \cup \{\neg\varphi^{\dot\forall}\} \vdash \varphi^{\dot\forall}, \neg\varphi^{\dot\forall}$ olur. Bu nedenle $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ ve $\Gamma \cup \{\neg\varphi^{\dot\forall}\}$ biçimsel tutarsızdır.

2.: $\Longrightarrow$ yönü 1.'de kanıtlandı.

$\Longleftarrow$: $\Gamma \cup \{\neg\sigma\}$ biçimsel tutarsız olsun. (3.14.3)'ten dolayı $\Gamma \cup \{\neg\sigma\} \vdash \sigma$. (3.11.7) Çıkarım Teoremi'nden dolayı $\Gamma \vdash \neg\sigma \to \sigma$. Bu ve $(\neg p \to p) \to p$ hepdoğrusundan elde edilen $\Gamma \vdash (\neg\sigma \to \sigma) \to \sigma$ biçimsel çıkarımı (MP) ile $\Gamma \vdash \sigma$'yi verir.

3. Bu 2.'den başka bir şey değildir.

4.. $\Longrightarrow$ yönü 1.'de kanıtlandı.

$\Longleftarrow$: $\Gamma \cup \{\neg\varphi^{\dot\forall}\}$ biçimsel tutarsız olsun. 2.'ten $\Gamma \vdash \varphi^{\dot\forall}$ olur bu ise $\Gamma \vdash \varphi$'ye denktir (bkz. (3.11.11)(1)) ■

Önerme 3.14.11 $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}\,L$ *ve* $\sigma, \tau \in \mathrm{Sav}\,L$ *olsunlar. Bu durumda*

(a) $\Gamma \cup \{\sigma \curlyvee \tau\}$ *biçimsel tutarlıdır.* $\iff$ $\Gamma \cup \{\sigma\}$ *veya* $\Gamma \cup \{\tau\}$ *biçimsel tutarlıdır.*

(b) Γ *biçimsel tutarlı ise* $\Gamma \cup \{\sigma\}$ *veya* $\Gamma \cup \{\neg\sigma\}$ *biçimsel tutarlıdır.*

Kanıt. (a) İki tarafın olumsuzlarına geçersek önermemiz şu şekli alır: $\Gamma \cup \{\sigma \curlyvee \tau\}$ biçimsel tutarsızdır $\iff$ $\Gamma \cup \{\sigma\}$ ve $\Gamma \cup \{\tau\}$ biçimsel tutarsızdır, dd. $\Gamma \cup \{\sigma \curlyvee \tau\} \vdash \bot \iff \Gamma \cup \{\sigma\} \vdash \bot$ ve $\Gamma \cup \{\tau\} \vdash \bot$. Çıkarım Teoremi'nden dolayı bu

$$\Gamma \vdash \sigma \curlyvee \tau \to \bot \iff \Gamma \vdash \sigma \to \bot \text{ ve } \Gamma \vdash \tau \to \bot \qquad (3.32)$$

önermesine denktir. Her η formülü için $\neg\eta \to (\eta \to \bot)$ bir dosdoğru olduğundan (3.32)'yi kanıtlamak içinse

$$\Gamma \vdash \neg(\sigma \curlyvee \tau) \iff \Gamma \vdash \neg\sigma \text{ ve } \Gamma \vdash \neg\tau$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Bu ise $\neg(\sigma \curlyvee \tau) \leftrightarrow (\neg\sigma \curlywedge \neg\tau)$ dosdoğrusundan aşikârdır.

(b) Önermemiz (a)'dan dolayı "Γ biçimsel tutarlıysa $\Gamma \cup \{\sigma \curlyvee \neg\sigma\}$ biçimsel tutarlıdır" önermesine denktir. Eğer $\Gamma \cup \{\sigma \curlyvee \neg\sigma\} \vdash \bot$ olsaydı Çıkarım Teoremi ile $\Gamma \vdash (\sigma \curlyvee \neg\sigma) \to \bot$ olurdu. Buradan, $\sigma \curlyvee \neg\sigma$ dosdoğru olduğundan $\Gamma \vdash \sigma \curlyvee \neg\sigma$ olduğunu gözetirsek, (MP) ile $\Gamma \vdash \bot$ olurdu ki bu Γ'nın biçimsel tutarlı olmasıyla çelişir ve bkb. ■

Tanım 3.14.12 *$\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ olsun. Her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ için $\Gamma \nvdash \varphi$ olduğunda $\Gamma \cup \{\varphi\}$ biçimsel tutarsızsa ve ancak bu durumda Γ* ***biçimsel tamdır*** *denir.*

Önerme 3.14.13 *$\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ için aşağıdaki önermeler denktirler:*

1. *Γ biçimsel tamdır.*
2. *$\operatorname{Bc}\Gamma$ biçimsel tamdır.*
3. *Her $\sigma \in \operatorname{Sav} L$ için: $\Gamma \vdash \sigma$ veya $\Gamma \vdash \neg\sigma$.*

Kanıt. (1) $\Longrightarrow$ (2): Γ biçimsel tam olsun. $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ keyfi verilsin ve $\operatorname{Bc}\Gamma \nvdash \varphi$ olsun. $\Gamma \subseteq \operatorname{Bc}\Gamma$ olduğundan $\Gamma \nvdash \varphi$. Varsayımdan dolayı $\Gamma \cup \{\varphi\}$ biçimsel tutarsızdır. Dolayısıyla $\operatorname{Bc}\Gamma \cup \{\varphi\}$ biçimsel tutarsızdır.

(2) $\Longrightarrow$ (3): $\operatorname{Bc}\Gamma$ biçimsel tam olsun ve $\sigma \in \operatorname{Sav} L$ keyfi verilsin. $\Gamma \nvdash \sigma$ olsun. $\operatorname{Bc}\Gamma = \operatorname{Bc}(\operatorname{Bc}\Gamma)$ olduğundan $\operatorname{Bc}\Gamma \nvdash \sigma$ olur. Varsayımımızdan $\operatorname{Bc}\Gamma \cup \{\sigma\}$ biçimsel tutarsızdır. $\Gamma, \sigma \vdash \operatorname{Bc}\Gamma \cup \{\sigma\}$ ve $\operatorname{Bc}\Gamma \cup \{\sigma\}$ biçimsel tutarsız olduğundan $\operatorname{Bc}\Gamma \cup \{\sigma\} \vdash \neg\sigma$. Bu iki biçimsel çıkarımdan geçişlilik ile $\Gamma, \sigma \vdash \neg\sigma$. Buradan Çıkarım Teoremi ile $\Gamma \vdash \sigma \to \neg\sigma$ elde edilir. Bundan ve $(\sigma \to \neg\sigma) \to \neg\sigma$ dosdoğrusundan (MP) ile $\Gamma \vdash \neg\sigma$. (3) kanıtlanmıştır.

(3) $\Longrightarrow$ (1): (3) sağlansın. $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ keyfi verilsin ve $\Gamma \nvdash \varphi$ olsun. $\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vdash \varphi^{\dot\forall}$ olduğundan, $\sigma := \varphi^{\dot\forall} \in \operatorname{Sav} L$ olmak üzere $\Gamma \nvdash \sigma$ olur. Varsayımımızdan dolayı $\Gamma \vdash \neg\sigma$, buradan da $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\sigma$ olur. Diğer yanda $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$ olduğundan $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \sigma$. (3.14.4) ile $\Gamma \cup \{\varphi\}$ biçimsel tutarsızdır ve bkb. ■

Not 3.14.14 (3.14.13)(3)'te "Her $\sigma \in \operatorname{Sav} L$" yerine "Her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$" alamayız. Örneğin aritmetiğin $\varphi(x) := x > 3$ formülü için $\mathcal{K}_a \vdash \varphi$ veya $\mathcal{K}_a \vdash \neg\varphi$ olmasını istemek GEN ile $\mathcal{K}_a \vdash \dot\forall x(x > 3)$ veya $\mathcal{K}_a \vdash \dot\forall x\neg(x > 3)$ olmasını istemektir $\sigma := \dot\forall x(x > 3)$ ve $\tau := \dot\forall x\neg(x > 3)$ savlarının $\mathfrak{N}$'deki yorumları yanlış olduklarından bunların $\mathcal{K}_a$'de kanıtlanmaları söz konusu değildir. Burada $\tau \neq \neg\sigma$ olduğuna dikkat ediniz. ▲

Tanım 3.14.15 Γ *biçimsel tutarlı ve* $\Gamma \subseteq \Omega \subseteq \operatorname{Fm} L$ *koşulunu sağlayan her biçimsel tutarlı* Ω *için* $\Gamma = \Omega$ *ise* Γ ***maksimal biçimsel tutarlıdır*** *diyeceğiz. Benzer biçimde* $\Sigma \subseteq \operatorname{Sav} L$ *biçimsel tutarlı ve* $\Sigma \subseteq \Omega \subseteq \operatorname{Sav} L$ *koşulunu sağlayan her biçimsel tutarlı* Ω *için* $\Sigma = \Omega$ *ise* Σ *kümesi* $\operatorname{Sav} L$ ***'de maksimal biçimsel tutarlıdır*** *diyeceğiz.*

Teorem 3.14.16 Γ maksimal *biçimsel tutarlı ve* $\sigma, \tau \in \operatorname{Sav} L$ *olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler geçerlidirler:*

(a) ***Çıkarımsal kapalılık:*** $\Gamma \vdash \sigma \iff \sigma \in \Gamma$, *dd.* $\Gamma = \operatorname{Bc} \Gamma$.

(b) $\sigma \in \Gamma \iff \Gamma \cup \{\sigma\}$ *biçimsel tutarlıdır.*

(c) $\sigma \curlyvee \tau \in \Gamma \iff \sigma \in \Gamma$ *veya* $\tau \in \Gamma$.

(d) $\sigma \curlywedge \tau \in \Gamma \iff \sigma \in \Gamma$ *ve* $\tau \in \Gamma$.

(e) $\neg\sigma \in \Gamma \iff \sigma \notin \Gamma$.

(f) $\sigma \to \tau \in \Gamma \iff \neg\sigma \in \Gamma$ *veya* $\tau \in \Gamma$.

(g) Γ *biçimsel tamdır.*

Kanıt. (b) Aşikâr.

(a) $\Gamma \vdash \sigma \iff \Gamma \cup \{\neg\sigma\}$ biçimsel tutarsız $\iff \Gamma \cup \{\sigma\}$ biçimsel tutarlı $\iff \sigma \in \Gamma$. Bu denkliklerde sırasıyla (3.14.10)(2), (3.14.11)(b) ve teoremimizin (b) şıkkı kullanılmıştır.

(c) $\sigma \curlyvee \tau \in \Gamma \overset{(b)}{\iff} \Gamma \cup \{\sigma \curlyvee \tau\}$ biçimsel tutarlı $\overset{(3.14.11)}{\iff} \Gamma \cup \{\sigma\}$ veya $\Gamma \cup \{\tau\}$ biçimsel tutarlı $\iff \sigma \in \Gamma$ veya $\tau \in \Gamma$.

(d), (c)'ye benzer biçimde kanıtlamayı okura bırakıyoruz.

(e) Γ biçimsel tutarlı olduğundan σ ve $\neg\sigma$ savlarının ikisini birden içeremez. Dolayısıyla $\sigma \notin \Gamma \overset{(b)}{\iff} \Gamma \cup \{\sigma\}$ biçimsel tutarsız $\overset{(3.14.11)}{\iff} \Gamma \cup \{\neg\sigma\}$ biçimsel tutarlı $\overset{(b)}{\iff} \neg\sigma \in \Gamma$.

(f) $\sigma \curlyvee \neg\sigma$ dosdoğru olduğundan $\Gamma \vdash \sigma \curlyvee \neg\sigma$. Buradan Γ'nın çıkarımsal kapalılığından $\sigma \curlyvee \neg\sigma \in \Gamma$. Teoremin (c) ve (e) şıklarından dolayı ya $\sigma \in \Gamma$ ya da $\neg\sigma \in \Gamma$.

$\Longrightarrow$: $\sigma \to \tau \in \Gamma$ olsun. $\neg\sigma \in \Gamma$ ise işimiz biter. $\neg\sigma \notin \Gamma$ ise $\sigma \in \Gamma$. Bu ise $\sigma \to \tau \in \Gamma$ ile bize önce $\Gamma \vdash \tau$'yı, ardından çıkarımsal kapalılıkla $\tau \in \Gamma$'yı verir.

$\Longleftarrow$: $\neg\sigma \in \Gamma$ veya $\tau \in \Gamma$ olsun. $\neg\sigma \in \Gamma$ ise $\neg\sigma \to (\sigma \to \tau)$ dosdoğrusu ile önce $\Gamma \vdash \sigma \to \tau$, ardından (a) ile $\sigma \to \tau \in \Gamma$ kazanılır. Eğer $\tau \in \Gamma$ ise bu kez $\Gamma \vdash \tau$ ve $\tau \to (\sigma \to \tau)$ dosdoğrusundan $\Gamma \vdash \sigma \to \tau$ elde edilir. Bu (a) ile $\sigma \to \tau \in \Gamma$ demektir.

(g) Doğrudan (e) ve (3.14.13)'ten çıkar. ■

Önerme 3.14.17 $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ *biçimsel tutarlı ise maksimal biçimsel tutarlı* $\Gamma^* \subseteq \operatorname{Fm} L$ *kuramı* $\Gamma \subseteq \Gamma^*$ *olacak biçimde bulunabilir. Benzer biçimde* $\Sigma \subseteq \operatorname{Sav} L$ *biçimsel tutarlı ise* $\operatorname{Sav} L$*'de maksimal biçimsel tutarlı* $\Sigma^* \subseteq \operatorname{Sav} L$ *kuramı* $\Sigma \subseteq \Sigma^*$ *olacak biçimde bulunabilir.*

Kanıt. $\mathfrak{T} := \{\Omega \mid \Gamma \subseteq \Omega \subseteq \operatorname{Fm} L \text{ ve } \Omega \text{ biçimsel tutarlı}\}$ olsun. $\mathfrak{T}$ ailesi $\subseteq$ ile kısmi sıralanmıştır ve (3.14.7)'den dolayı her $\mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{T}$ zinciri için $\bigcup \mathfrak{Z} \in \mathfrak{T}$ bu zincirin bir üst sınırıdır. Zorn Lemması'ndan dolayı $(\mathfrak{T}, \subseteq)$'de en az bir Γ^* büyük öğesi vardır. Böyle bir Γ^* aranan özelliklere sahiptir. Diğer sav benzer biçimde kanıtlanır. ■

3.15 Tutucu Kuram Genişletmeleri

Tanım 3.15.1 $\mathcal{K} := (L, \Gamma)$ *ve* $\mathcal{K}' := (L', \Gamma')$ *biçimsel kuramları verilsin.*

1. $L \subseteq L'$ *ve* $\operatorname{Bc} \mathcal{K} \subseteq \operatorname{Bc} \mathcal{K}'$ *ise* $\mathcal{K}'$ *kuramı* $\mathcal{K}$ *kuramının bir* ***genişlemesi*** *denir ve bu durum* $\mathcal{K} \leq \mathcal{K}'$ *ile gösterilir.*

2. $\mathcal{K} \leq \mathcal{K}'$ *genişlemesine her* $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ *için* $\vdash_{\mathcal{K}} \varphi \iff \vdash_{\mathcal{K}'} \varphi$ *ise ve ancak bu durumda bir* ***tutucu genişleme*** *denir.*

3. $\mathcal{K}$ *biçimsel kuramı* $\mathcal{K}'$ *biçimsel kuramına* ***denktir*** $: \iff \mathcal{K} \leq \mathcal{K}'$ *ve* $\mathcal{K}' \leq \mathcal{K}$.

$\mathcal{K} \leq \mathcal{K}'$ olması için $\Gamma \subseteq \Gamma'$ olması gerekmez. $L \subseteq L'$ iken $\mathcal{K} \leq \mathcal{K}'$ olması için $\Gamma \subseteq \operatorname{Bc} \mathcal{K}'$ olması gerek ve yeterlidir. $\mathcal{K}$ ve $\mathcal{K}'$ kuramlarının denk olması için gerek ve yeter koşul dillerinin ve biçimsel çıkarımlarının aynı olmasıdır; bu durumda bunlar birbirlerinin tutucu genişlemeleridir.

Teorem 3.15.2 $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ *ve* $\mathcal{C}'$ *kümesi* $\mathcal{C}' \cap L = \emptyset$ *koşulunu sağlayan herhangi bir* yeni *sabitler kümesi olsun. Bu durumda* $\mathcal{K}' = (L \cup \mathcal{C}', \Gamma)$ *kuramı* $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ *kuramının bir tutucu genişlemesidir.*

Kanıt. Kanıta geçmeden önce bu teoremde $\mathcal{K}$ ve $\mathcal{K}'$ kuramlarının öz ilksavlarının *aynı* olduğunu belirtelim. Buna karşın L diline bir tek c' sabiti bile eklenmişse L' diline ilişkin mantık ilksavları L dilinin mantık ilksavlarından daha fazladır. Örneğin her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ için $\dot{\forall} x \varphi \to \varphi(x|c')$ formülü $\mathcal{K}'$ kuramının bir mantık ilksavı iken $\mathcal{K}$ kuramının bir mantık ilksavı değildir.

1. $\vdash_{\mathcal{K}} \varphi$ ise $\vdash_{\mathcal{K}'} \varphi$ olduğu apaçıktır.

2. Şimdi $\vdash_{\mathcal{K}'} \varphi$ olsun. $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_k$ dizisi $\varphi'_k = \varphi$ formülünün $\mathcal{K}'$ kuramında bir biçimsel kanıtı olsun. Bu kanıtta geçen tüm farklı *yeni* sabitler $c'_1, \ldots, c'_n$ olsunlar. $y_1, \ldots, y_n$ değişkenleri birbirlerinden ve bu kanıtta geçen tüm değişkenlerden farklı olsunlar. φ'_i formülünde geçen her bir c'_j yerine geçtiği

her yerde y_j yazarak elde edilen formülü φ_i ile gösterirsek $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ dizisi φ formülünün $\mathcal{K}$ kuramında bir biçimsel kanıtı olduğunu savunuyoruz. $L' := L \cup \mathcal{C}'$ olsun.

Her şeyden önce $\varphi_i \in \operatorname{Fm} L$ olduğu aşikârdır. Diğer yandan φ hiçbir yeni sabit içermediğinden $\varphi_k = \varphi$. Önce $\varphi'_i \in \Lambda_{mL'}$ ise $\varphi_i \in \Lambda_m$ olduğunu göstereceğiz. φ'_i bir dosdoğru ise açıkça φ_i de bir dosdoğrudur. Dolayısıyla φ'_i formülü $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ şemalarından herhangi biri ile $\operatorname{Fm} L'$'den elde edilmiş bir ilksav ise φ_i formülü aynı biçimde $\operatorname{Fm} L$'den elde edilmiş bir ilksavdır. $\psi' \in \operatorname{Fm} L'$, $t' \in \operatorname{Tm} L'$ ve $\operatorname{Sb}(\psi', x|t')$ olmak üzere φ'_i formülü $\dot\forall x\psi' \to \psi'(x|t')$ tipinde bir ilksav ise ψ formülü ve t terimi sırasıyla ψ' ve t' de c'_j'ler yerine y_j yazılarak elde edilmişlerse $\operatorname{Sb}(\psi, x|t)$ ve φ_i formülü L diline ilişkin $\dot\forall x\psi \to \psi(x|t)$ ilksavıdır. Benzer biçimde φ'_i formülü σ_5 ile $\operatorname{Fm} L'$'den elde edilmişse φ_i formülü σ_5 ile $\operatorname{Fm} L$'den elde edilmiştir.

Eğer φ'_i kendinden önce gelen φ'_j, φ'_l formüllerinden (MP) ile elde edilmişse φ_i formülünün kendinden önce gelen φ_j, φ_l formüllerinden (MP) ile elde edildiği açıktır. Son olarak φ'_i kendinden önce gelen bir φ'_j den (Gen) ile elde edilmişse, dd. $\varphi'_i = \dot\forall x\varphi'_j$ ise $\varphi_i = \dot\forall x\varphi_j$. Böylece $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ dizisi bir $\mathcal{K}$ biçimsel kanıttır, dolayısıyla $\vdash_{\mathcal{K}} \varphi$ olur. ■

Önerme 3.15.3 (Sabitler Teoremi) *$\varphi \in \operatorname{Fm} L$ ve $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ olsun. $d_1, \ldots, d_n$ birbirinden farklı L dilinde olmayan sabitler ve $L' = L \cup \{d_1, \ldots, d_n\}$, $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ ve $\mathcal{K}' = (L', \Gamma)$ olmak üzere*

$$\vdash_{\mathcal{K}'} \varphi(d_1, \ldots, d_n) \iff \vdash_{\mathcal{K}} \varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

Kanıt. Kanıta başlamadan önce bu teoremin bir öncekinden farkını belirtelim. Bir önceki teoremde her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ için $\vdash_{\mathcal{K}} \varphi \iff \vdash_{\mathcal{K}'} \varphi$ olduğunu gösterdik. Bu önermede ise $\varphi' := \varphi(d_1, \ldots, d_n)$ formülü L' dilinin bir formülü, ancak L dilinin bir formülü değildir!

$\Longrightarrow$: $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_k$ dizisi $\mathcal{K}'$ kuramında $\varphi'_k = \varphi(d_1, \ldots, d_n)$ formülünün bir biçimsel kanıtı olsun. $y_1, \ldots, y_n$ değişkenleri bu kanıtta geçmeyen değişkenler olmak üzere φ_i formülü φ'_i formülünde geçtiği her yerde $d_1, \ldots, d_n$ sabitleri yerine sırasıyla $y_1, \ldots, y_n$ yazarak elde edilen formüller olmak üzere $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ dizisi $\varphi(y_1, \ldots, y_n)$ formülünün $\mathcal{K}$ kuramında bir biçimsel kanıtıdır; bu aynen bir önceki teorem gibi kanıtlanır. Buradan ardışık (Gen) uygulamaları ile $\dot\forall y_1 \cdots \dot\forall y_n \varphi(y_1, \ldots, y_n)$ formülü $\mathcal{K}$ kuramının bir biçimsel teoremi olur. Diğer yandan $i = 1, \ldots, n$ için $\operatorname{Sb}(\varphi, y_i|x_i)$ olduğundan (3.13.2)(ii)'den $\dot\forall y_1 \cdots \dot\forall y_n \varphi(y_1, \ldots, y_n) \to \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ elde edilir. Son iki tümceden (MP) ile $\vdash_{\mathcal{K}} \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ elde edilir.

$\Longleftarrow$: Şimdi $\vdash_{\mathcal{K}} \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ olsun. Ancak her $\mathcal{K}$ biçimsel kanıt bir $\mathcal{K}'$ biçimsel kanıt olduğundan $\vdash_{\mathcal{K}'} \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ elde ederiz. Buradan (3.13.1)

ile $\vdash_{\mathcal{K}'} \varphi(d_1, \ldots, d_n)$ olur. ■

Not 3.15.4 Kanıttan anlaşılacağı üzere $d_1, \ldots, d_n$ sabit imlerinin *yeni olması zorunlu değildir.* Bu sabit imlerinin Γ öz ilksavlarında ve φ formülünde geçmemesi yeterlidir. Eğer $d_1, \ldots, d_n$ sabitleri birbirinden farklı ve φ formülünde geçmiyorlarsa

$$\varphi(x_1|d_1, \ldots, x_n|d_n)\,(d_1|x_1, \ldots, d_n|x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

olduğu aşikârdır. ▲

- Sabitler Teoremi kanıtlarda sıkça başvurduğumuz bir kanıt yönteminin biçimselleştirilmesinden başka bir şey değildir. $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ formülünü kanıtlamak istediğimizde "$d_1, \ldots, d_n$ sabitleri *keyfi* verilsinler" diyerek yola koyulur ve $\varphi(d_1, \ldots, d_n)$ formülünü kanıtlarız. $d_1, \ldots, d_n$ sabitleri keyfi olduğundan φ formülü kanıtlanmıştır deriz. Elbette bu keyfi sabitler Γ öz ilksavlarımız ve φ ile kısıtlanmamış olmalılar, dd. Γ ve φ'de geçemezler. Çoğu matematikçi keyfi $d_1, \ldots, d_n$ sabitlerini seçmek yerine şu söylemi yeğlerler:"$x_1, \ldots, x_n$'ler keyfi verilsinler ve sabit tutulsunlar"! Bu yaklaşımda x_i'ler artık değişken değil sabit olarak düşünülmektedirler.

Örnek 3.15.5 $\varphi, \psi \in \operatorname{Fm} L$, $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$, $\operatorname{Sb}\varphi = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ve L'de olmayan $d_1, \ldots, d_n$ sabitleriyle $\mathcal{D} = \{d_1, \ldots, d_n\}$ olmak üzere $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ ve $\mathcal{K}' = (L \cup \mathcal{D}, \Gamma)$ olsunlar. Bu durumda

$$\vdash_{\mathcal{K}} (\varphi \to \psi) \iff \varphi(x_1|d_1, \ldots, x_n|d_n) \vdash_{\mathcal{K}'} \psi(x_1|d_1, \ldots, x_n|d_n)$$

olduğunu savunuyoruz. $\varphi(x_1|d_1, \ldots x_n|d_n)$ bir sav olduğundan yalın yazılımlarla

$$\begin{aligned} \varphi(\overline{d_n}) \vdash_{\mathcal{K}'} \psi(\overline{d_n}) \quad &\overset{(1)}{\iff} \quad \vdash_{\mathcal{K}'} \varphi(\overline{d_n}) \to \psi(\overline{d_n}) \\ &\iff \quad \vdash_{\mathcal{K}'} (\varphi \to \psi)(\overline{d_n}) \\ &\overset{(2)}{\iff} \quad \vdash_{\mathcal{K}} (\varphi \to \psi)(\overline{x_n}) \iff \vdash_{\mathcal{K}} (\varphi \to \psi)\,. \end{aligned}$$

(1)'de Çıkarım Teoremi, (2)'de Sabitler Teoremi kullanılmıştır. ▲

Teorem 3.15.6 (İndirgeme Teoremi) *$\mathcal{K} = (L, \Sigma)$ kuramı ve $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ verilsin ve $\mathcal{K}' = \mathcal{K}[\Gamma] = (L, \Sigma \cup \Gamma)$ olsun. $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ formülünün $\mathcal{K}'$ kuramının bir biçimsel teoremi olması için gerek ve yeter koşul $\psi_1^{\dot\forall} \to \cdots \to \psi_n^{\dot\forall} \to \varphi$ formülünün $\mathcal{K}$ kuramının biçimsel teoremi olacak biçimde sonlu sayıda $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma$ formülünün bulunabilmesidir.*

Kanıt. (3.11.11)(3)'ten dolayı $\Sigma, \psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \varphi \iff \Sigma, \psi_1^{\dot\forall}, \ldots, \psi_n^{\dot\forall} \vdash \varphi$. Şimdi $\varphi \in \operatorname{Bc}\mathcal{K}'$ olsun. Bu durumda $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma$ formülleri $\Sigma, \psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \varphi$ olacak biçimde vardır. Dolayısıyla $\Sigma, \psi_1^{\dot\forall}, \ldots, \psi_n^{\dot\forall} \vdash \varphi$. Buradan Çıkarım Teoremi ile sonlu adımda $\Sigma \vdash \psi_1^{\dot\forall} \to \cdots \to \psi_n^{\dot\forall} \to \varphi$ elde edilir. Bu savın bir yönünü kanıtlar. Tersine $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma$ formülleri ile $\psi_1^{\dot\forall} \to \cdots \to \psi_n^{\dot\forall} \to \varphi$ formülü $\operatorname{Bc}\mathcal{K}$'de olsun. Bu durumda (3.11.11)(1)'den $\psi_1^{\dot\forall}, \ldots, \psi_n^{\dot\forall} \in \operatorname{Bc}\mathcal{K}'$ ve $\operatorname{Bc}\mathcal{K} \subseteq \operatorname{Bc}\mathcal{K}'$ olduğundan aynı zamanda $\psi_1^{\dot\forall} \to \cdots \to \psi_n^{\dot\forall} \to \varphi \in \operatorname{Bc}\mathcal{K}'$ olur. n kez ayırma ile $\varphi \in \operatorname{Bc}\mathcal{K}'$ elde edilir. ■

İndirgeme Teoremi $\mathcal{K}' = \mathcal{K}[\Gamma]$ kuramının biçimsel teoremlerini bulmayı $\mathcal{K}$ kuramının belli tipte biçimsel teoremlerini bulmaya indirger. Özellikle öz ilksavları Σ olan *herhangi* bir $\mathcal{K}$ kuramı aynı zamanda $\mathcal{K} = \mathcal{L}[\Sigma]$ olduğundan herhangi bir $\mathcal{K}$ kuramının biçimsel teoremlerini bulmak $\mathcal{L}$ kuramının belli tipten biçimsel teoremlerini bulmaya indirgenmiştir.

Not 3.15.7 $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramının herhangi bir $\mathcal{K}' = (L', \Gamma')$ genişlemesi biçimsel tutarlı ise $\mathcal{K}$ kuramı da biçimsel tutarlıdır. Gerçekten de $\operatorname{Bc}\mathcal{K} \subseteq \operatorname{Bc}\mathcal{K}'$ olduğundan $\Gamma \vdash \bot$ olsaydı $\Gamma' \vdash \bot$ olurdu ki bu $\mathcal{K}'$ kuramının biçimsel tutarlı olmasıyla çelişir. ▲

Önerme 3.15.8 *Biçimsel tutarlı $\mathcal{K}$ kuramlarının tutucu $\mathcal{K}'$ genişlemeleri de biçimsel tutarlıdır. Özellikle $L \cap \mathcal{C}' = \emptyset$ ve $\mathcal{C}'$ yeni sabit imleri olmak üzere $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ biçimsel tutarlı ise $\mathcal{K}' = (L \cup \mathcal{C}', \Gamma)$ da biçimsel tutarlıdır.*

Kanıt. $\vdash_{\mathcal{K}'} \bot$ olsaydı, $\bot \in \operatorname{Fm} L$ ve $\mathcal{K}'$ bir tutucu genişleme olduğundan $\vdash_{\mathcal{K}} \bot$ olurdu; bu savın birinci kısmını kanıtlar. Savın ikinci kısmı (3.15.2)'den çıkar. ■

3.16 Gödel Tamlık Teoremi

Elbette $\operatorname{Fm} L = \operatorname{Omf} P_L$ olarak bakarsak, elimizde ikinci bölümde olduğu gibi önermemantıksal tutarlılık ve önermemantıksal biçimsel tutarlılık kavramları var ve orada kazandığımız tüm teoremler bu tanım çerçevesinde doğrudur. $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ kümesi $\Gamma \Vdash_{\text{om}} \psi$ ve $\Gamma \Vdash_{\text{om}} \neg\psi$ olacak biçimde bir $\psi \in \operatorname{Fm} L$ yoksa önermemantıksal tutarlıdır. Γ kümesinin her sonlu altkümesi önermemantıksal tutarlı ise Γ kümesine sonlu önermemantıksal tutarlıdır. Her $\varphi \in \Gamma$ için $d(\varphi) = 1$ koşulunu sağlayan bir $d : P_L \to \{0, 1\}$ değerlemesine Γ kümesinin bir önermemantıksal modeli denir. Bu hatırlatmalarla ikinci bölümdeki iki önemli teoremimizi $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ için verelim.

Teorem 3.16.1 (Önermemantıksal Kompaktlık Teoremi) $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ *kümesinin önermemantıksal tutarlı olması için gerek ve yeter koşul sonlu önermemantıksal tutarlı olmasıdır.*

Teorem 3.16.2 (Önermemantıksal Tamlık Teoremi) $\Gamma \vdash_{\mathrm{om}} \psi \iff \Gamma \Vdash_{\mathrm{om}} \psi$.

Sonuç 3.16.3 $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ *kümesinin önermemantıksal biçimsel tutarlı olması için gerek ve yeter koşul bir önermemantıksal modelinin olmasıdır, dd. anlamsal tutarlı olmasıdır.*

Biçimsel kuramlara geçişteki asıl amaç öz ilksavları Γ olan birinci dereceden bir kuramın tüm teoremlerini, dd. $\operatorname{Mc}\Gamma$ kümesinin tüm öğelerini ve yalnız bunları, yaratıcı düşünceler gerektirmeyen sonlu ve kontrol edilebilir mekanik işlemlerle kazanmak olmuştur. Buna Γ-bkanıtlarıyla ulaşmaya çalışıyoruz ve işimiz $\operatorname{Mc}\Gamma = \operatorname{Bc}\Gamma$ olduğunu kanıtlamaktır. Şimdiden $\operatorname{Bc}\Gamma \subseteq \operatorname{Mc}\Gamma$ olduğunu biliyoruz (Doğruluk Teoremi). (3.6) Temel Doğrular ve (3.7) Mantıksal Çıkarımlar kesimlerindeki anlamsal gerçeklerin, seçtiğimiz ilksavlar ve tanımlarla (3.8)–(3.11) kesimlerinde biçimsel karşılıklarını kazanabildik. Bu her ne kadar yöntemimize güvenimizi artırsa da önümüzde işin zor kısmı kalmıştır: $\operatorname{Mc}\Gamma \subseteq \operatorname{Bc}\Gamma$ olduğunu göstermek. Bu ise $\varphi \notin \operatorname{Bc}\Gamma$ ise $\varphi \notin \operatorname{Mc}\Gamma$ olduğunu, dd. $\Gamma \nvdash \varphi \implies \Gamma \nVdash \varphi$ olduğunu göstermeye denktir.

Herhangi bir $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ için $\varphi \notin \operatorname{Bc}\Gamma$, dd. $\Gamma \nvdash \varphi$ ne zaman olasıdır? İlk olarak böyle bir durum, eğer bir " karşı örneğimiz" varsa söz konusudur. Karşı örnekten anladığımız ise $\mathfrak{A} \not\models \varphi$ koşulunu sağlayan bir $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod}\Gamma$ yapısıdır; bu durumda elbette $\Gamma \nVdash \varphi$. Böyle bir durumda Doğruluk Teoremi'nden dolayı $\Gamma \vdash \varphi$ olamaz, dd. $\Gamma \nvdash \varphi$. Bu noktada okura Öklid Geometrisinde Paralel Doğrular İlksavı'nın diğer ilksavlardan kazanılamayacağının nasıl gösterildiğini anımsatmak isteriz. Matematikçiler, Paralel Doğrular İlksavı'nı diğer ilksavlardan kazanmak için başarısızlıkla sonuçlanan uzun uğraşlardan sonra, bunun olamayacağını Paralel Doğrular İlksavının yanlış ancak Öklid'in diğer ilksavlarının doğru olduğu bir model vererek kanıtlamışlardır.

İkinci bir durum karşı örneğin olmadığı bir durumdur, dd. her $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod}\Gamma$ için $\mathfrak{A} \models \varphi$. Böyle bir durumda $\Gamma \nvdash \varphi$ ancak biçimsel kanıtlarda seçtiğimiz ilksavların ve(ya) çıkarım kurallarının yetersizliğinden kaynaklanıyor olabilir. Ancak şimdiye kadar kazandığımız biçimsel teoremler ve türetilmiş biçimsel çıkarım kurallarımız böyle bir yetersizliğin olmadığını düşündürüyor ve bunun böyle olduğunu kanıtlayacağız. Özetle $\Gamma \nvdash \varphi$ ise bir karşı örneğin varlığını, dd. $\mathfrak{A} \not\models \varphi$ olan bir $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod}\Gamma$ modelinin varlığını kanıtlayacağız.

Her şeyden önce Γ biçimsel tutarsızsa (3.11.6)'dan dolayı $\operatorname{Bc}\Gamma = \operatorname{Fm} L$ olacağından elbette $\operatorname{Mc}\Gamma \subseteq \operatorname{Bc}\Gamma$ olur ve kanıtlanacak hiçbir şey yoktur. Öyleyse *biçimsel tutarlı* Γ ilksavlarına odaklanacağız.

İkinci bölümde benzeri bir durumda yaptıklarımız bize kısmen yol gösterecektir. Orada P asal önermeler kümesi olmak üzere $\Phi \subseteq \operatorname{Omf} P$ önermemantıksal biçimsel tutarlı altkümesi verildiğinde $\subseteq$ bağıntısına göre maksimal biçimsel tutarlı Φ_m kümesini $\Phi \subseteq \Phi_m$ olacak biçimde seçmiştik. $d : P \to \{0,1\}$ değerlemesini her $p \in P$ için $p \in \Phi_m$ ise $d(p) = 1$ ve $p \notin \Phi_m$ ise $d(p) = 0$ olarak açıkladığımızda bu d değerlemesinin Φ_m'nin, dolayısıyla da Φ'nin, bir modeli olduğunu görmüştük. $\Phi \nvdash_{\text{om}} \varphi$ ise $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ kümesinin önerme mantıksal biçimsel tutarlı olduğunu kanıtlamış ve $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$'nin varlığı kanıtlanan bir d modeli için $d \models_{\text{om}} \Phi$ ancak $d \not\models_{\text{om}} \varphi$ olacağından $\Phi \nvdash_{\text{om}} \varphi$ elde etmiştik.

Şimdi $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ biçimsel tutarlı ve $\Gamma \nvdash \varphi$ olsun. $\mathfrak{A} \not\models \varphi$ olacak biçimde bir $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod}\Gamma$ modelini nasıl kazanabiliriz? Önermeler mantığında biçimsel tutarlı Φ'yi kapsayan maksimal Φ_m kümesinin bir d modelini aramıştık. Ancak d modeli P tanım bölgesi ve $\{0,1\}$ değer bölgesi belli olan bir fonksiyon olduğundan işimiz nispeten kolaydı. Burada ise Γ kümesini içeren ve $\subseteq$ bağıntısına göre maksimal biçimsel tutarlı olan bir Γ_m işimize yaramayacaktır. Γ_m kümesinin başka bir takım özellikleri olmasını isteyeceğiz; bu ise L dilini bir L' diline genişletmemizi zorunlu kılacaktır. İkinci zorluk, bir şekilde oluşturduğumuz Γ'_m için bir $\mathfrak{A}$ modelinin nasıl tanımlanacağıdır. Burada izleyeceğimiz yol, matematikte başka durumlarda da başvurduğumuz "*elimizdekiyle yetinelim*" yöntemidir[16]. Elimizde L' dilimiz, dolayısıyla elimizde bu dilin $\mathcal{C}'$ sabitler kümesi ve $\operatorname{Tmc} L'$ sabit terimler kümesi vardır. Aradığımız $\mathfrak{A}$ yapısının A evrenini $\mathcal{C}'$ veya $\operatorname{Tmc} L'$ kümesinden kazanacağız. Bu kesimde bunu gerçekleştireceğiz.

L dilinin $n \in \mathbb{N}^*$ serbest değişkeni olan formüllerinin kümesi

$$\Phi^n_s := \{\varphi \in \operatorname{Fm} L \mid \varphi\text{'nin } n \text{ serbest değişkeni var}\}$$

olarak açıklansın; L dili ile ilişkisini vurgulamak gerektiğinde ise bunu $\Phi^n_s(L)$ yazarak vurgulayacağız. $\varphi \in \Phi^1_s$ ise φ'nin serbest değişkenini x_φ ile göstereceğiz. Kısaca bu $\varphi = \varphi(x_\varphi)$ ile belirtilmiş olur. Elbette bu tipten farklı φ, ψ formülleri için $x_\varphi = x_\psi$ olabilir. $\varphi \in \Phi^1_s$ ise elbette $\dot\exists x_\varphi \varphi$ bir savdır. Biz daha çok Φ^1_s ile ilgileneceğiz. $\varphi = \varphi(x) \in \Phi^1_s$ ise $\varphi(x|t)$ ve $\varphi(x|c)$ gösterimlerinin yerine $\varphi(t)$ ve $\varphi(c)$ gösterimlerini kullanmayı yeğleyeceğiz. Bu kesimde yapacaklarımızı önce yalın bir durumda örnekleyelim.

[16] Örneğin tam olmayan bir (X, d) metrik uzayının tamlaştırılmasında da aynı yönteme başvurulur.

Tanım 3.16.4 *Aşağıdaki koşullar sağlandığında* $\Sigma \subseteq \operatorname{Sav} L$ *kümesine* ***uygun*** *diyelim:* $T := \operatorname{Tmc} L$; $s,t \in T$, $\sigma,\tau \in \Sigma$ *olmak üzere*

(uy1) Σ *biçimsel tutarlıdır.*
(uy2) $\forall \sigma \in \operatorname{Sav} L \ (\neg\sigma \in \Sigma \Longleftrightarrow \sigma \notin \Sigma)$
(uy3) $\forall \sigma,\tau \in \operatorname{Sav} L \ (\sigma \to \tau \in \Sigma \Longleftrightarrow \neg\sigma \notin \Sigma$ *veya* $\tau \in \Sigma)$
(uy4) *Her* $\varphi(x) \in \Phi^1_s$ *için:* $\dot\forall x\varphi \in \Sigma \Longleftrightarrow \forall t \in T : \varphi(t) \in \Sigma$
(uy5) $\forall s,t \in T \ (s \sim t :\Longleftrightarrow (s \doteq t) \in \Sigma)$ *ise* $\sim$, T*'de denk. bağıntısıdır.*
(uy6) $s \sim t$, $\varphi \in \Phi^1_s$ *atomik ve* $\varphi(s) \in \Sigma$ *ise* $\varphi(t) \in \Sigma$.

$\Sigma \subseteq \operatorname{Sav} L$ uygun ve L dilinin $\mathcal{C}$ sabitler kümesi boş olmasın. Bu durumda $t \in T$ için

$$t^* := \{s \in T \mid s \sim t\} \text{ ve } T^* := T/\sim$$
$$\mathfrak{T} := (T^*, L^{\mathfrak{T}}),\ A := T^*,\ \forall c \in \mathcal{C} \text{ için } c^{\mathfrak{T}} := c^*,$$
$$f^{\mathfrak{T}}(t_1^*,\dots,t_n^*) := (ft_1\cdots t_n)^*,\ f \in \mathcal{F}_n$$
$$(t_1^*,\dots,t_n^*) \in R^{\mathfrak{T}} :\Longleftrightarrow Rt_1\cdots t_n \in \Sigma,\ R \in \mathcal{R}_n$$

olarak açıklansın.

Teorem 3.16.5 $T = \operatorname{Tmc} L \neq \emptyset$ *olmak üzere* $\Sigma \subset \operatorname{Sav} L$ *uygunsa* $\mathfrak{T}$ *yapısı* Σ*'nın bir modelidir; daha fazlası geçerlidir:*

1. $\forall t \in T : t^{\mathfrak{T}} = t^*$,
2. $\forall \sigma \in \operatorname{Sav} L : \mathfrak{T} \models \sigma \Longleftrightarrow \sigma \in \Sigma$, *dd.* $\operatorname{Th}\mathfrak{T} = \Sigma$.

Kanıt. Her şeyden önce yukarıda verdiğimiz $f^{\mathfrak{T}}$ ve $R^{\mathfrak{T}}$ tanımlarının kusursuz olduklarını görelim. $f \in \mathcal{F}_n$, $R \in \mathcal{R}_n$ ve $1 \le i \le n$ için $s_i, t_i \in T$ ve $s_i \sim t_i$ olsun. Bu durumda

(a) $f^{\mathfrak{T}}(s_1^*,\dots,s_n^*) = f^{\mathfrak{T}}(t_1^*,\dots,t_n^*)$, dd. $(fs_1\cdots s_n)^* = (ft_1\cdots t_n)^*$, ve

(b) $Rs_1\cdots s_n \in \Sigma \Longleftrightarrow Rt_1\cdots t_n \in \Sigma$

olduğunu göstermeliyiz. $\varphi_1(x) := (fs_1\cdots s_n \doteq fxs_2\cdots s_n)$ olmak üzere (uy5) ile $\varphi(s_1) = (fs_1\cdots s_n \doteq fs_1\cdots s_n) \in \Sigma$ olur. φ_1 atomik olduğundan (uy6) ile $\varphi(t_1) = (fs_1s_2\cdots s_n \doteq ft_1s_2\cdots s_n) \in \Sigma$ olur. Benzer biçimde $\varphi_2(x) = (fs_1s_2\cdots s_n \doteq ft_1xs_3\cdots s_n) \in \Phi^1_s$ atomik formülünden yola çıkarak önce $(fs_1s_2s_3\cdots s_n \doteq ft_1t_2s_3\cdots s_n) \in \Sigma$ elde eder ve böyle devam ederek n adımda $(fs_1\cdots s_n \doteq ft_1\cdots t_n) \in \Sigma$ elde ederiz ki bu (a) demektir.

Simetri nedeniyle (b)'nin $\Longrightarrow$ yönünü göstermek yeterlidir. $Rs_1\cdots s_n \in \Sigma$ olsun. Bu kez $\psi(x) := Rxs_2\cdots s_n \in \Phi^1_s$ atomik formülünden yola çıkar, önce $\psi(t_1) = Rt_1s_2\cdots s_n \in \Sigma$ elde ederiz. Benzer biçimde devam ederek n adımda $Rt_1\cdots t_n \in \Sigma$ elde ederiz.

(1) $t = c \in \mathcal{C}$ ise tanım gereği $t^{\mathfrak{T}} = c^* = t^*$. Şimdi $t = ft_1 \cdots t_n$, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $t_i \in T$ ve sav t_i için kanıtlanmış olsun. Bu durumda

$$t^{\mathfrak{T}} = (ft_1 \cdots t_n)^{\mathfrak{T}} \overset{def}{=} f^{\mathfrak{T}}(t_1^{\mathfrak{T}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{T}}) \overset{tvk}{=} f^{\mathfrak{T}}(t_1^*, \ldots, t_n^*) \overset{def}{=} (ft_1 \cdots t_n)^* = t^*$$

(2) FTK ile kanıtlayacağız. $s, t, t_1, \ldots, t_n \in T$, $\sigma, \tau \in \operatorname{Sav} L$ ve $\varphi(x) \in \Phi_s^1$ olsun.
(i) $\mathfrak{T} \models s \dot{=} t \iff s^{\mathfrak{T}} = t^{\mathfrak{T}} \overset{(a)}{\iff} s^* = t^* \iff s \sim t \iff s \dot{=} t \in \Sigma$.
(ii) $\mathfrak{T} \models Rt_1 \cdots t_n \iff \left(t_1^{\mathfrak{T}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{T}}\right) \in R^{\mathfrak{T}} \overset{(a)}{\iff} (t_1^*, \ldots, t_n^*) \in R^{\mathfrak{T}} \iff Rt_1 \cdots t_n \in \Sigma$.
(iii) Sav $\sigma \in \operatorname{Sav} L$ için kanıtlanmış olsun. Bu durumda $\mathfrak{T} \models \neg\sigma \iff \mathfrak{T} \not\models \sigma \overset{tvk}{\iff} \sigma \notin \Sigma \iff \neg\sigma \in \Sigma$. Buradaki son denklik (uy2)'den çıkar.
(iv) Sav σ, τ için kanıtlanmış olsun. $\mathfrak{T} \models \sigma \to \tau \iff \mathfrak{T} \not\models \sigma$ veya $\mathfrak{T} \models \tau \iff \sigma \notin \Sigma$ veya $\tau \in \Sigma \iff \sigma \to \tau \in \Sigma$, son denklik (uy3)'ten çıkar.
(v) $\psi = \dot{\forall} x\varphi(x)$ ve her $t \in T$ için $\mathfrak{T} \models \varphi(t) \iff \varphi(t) \in \Sigma$ kanıtlanmış olsun. $\beta \in D^{\mathfrak{T}}$ keyfi verilsin. Bu durumda

$$\mathfrak{T} \models \psi \iff \forall t \in T\ (\mathfrak{T} \models \varphi\left[\beta_x^{t^*}\right]) \iff \forall t \in T\ (\mathfrak{T} \models \varphi\left[\beta_x^{t^{\mathfrak{T}}}\right]))$$
$$\iff \forall t \in T\ (\mathfrak{T} \models \varphi(t)) \iff \forall t \in T\ \ (\varphi(t) \in \Sigma) \iff \psi \in \Sigma$$

olur ve bkb. ■

Bize biçimsel tutarlı $\Sigma \subseteq \operatorname{Sav} L$ verildiğinde bunun uygun olması gerekmez. Bir an için L diline yeni sabitler ekleyerek bir L^* diline ve uygun bir $\Sigma^* \subseteq \operatorname{Sav} L^*$ kümesine ulaşmış olalım ve ayrıca $\Sigma \subseteq \Sigma^*$ sağlanmış olsun. (3.16.5)'ten Σ^*'ın bir $\mathfrak{T}^*$ modeline ulaşırız ve elbette $\mathfrak{T} := \mathfrak{T}^* \restriction L \in \operatorname{Yap} L$ yapısı Σ'nin bir modeli olacaktır. Bu kesimde bunların gerçeklenebilir olduğunu kanıtlayacağız; yaklaşımız gereği biçimsel tutarlı $\Gamma \subseteq \operatorname{Sav} L$ ile çalışacağız.

Önerme 3.16.6 *$\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$, $\varphi \in \operatorname{Fm} L$, $t \in \operatorname{Tmc} L$ ve $\operatorname{Sb}\varphi = \{x\}$ olsun. $\Gamma \cup \{\varphi(t)\}$ biçimsel tutarlı ise $\Gamma \cup \{\dot{\exists} x\varphi\}$ de biçimsel tutarlıdır. Özellikle $t = c$ bir sabit olduğunda $\Gamma \cup \{\varphi(c)\}$ biçimsel tutarlı ise $\Gamma \cup \{\dot{\exists} x\varphi\}$ de biçimsel tutarlıdır.*

Kanıt. $\Gamma \cup \{\dot{\exists} x\varphi\}$'nin biçimsel tutarsız olduğunu varsayalım. Bu durumda $\Gamma \cup \{\dot{\exists} x\varphi\} \vdash \bot$ olur. $\dot{\exists} x\varphi$ bir sav olduğundan Çıkarım Teoremi'nden $\Gamma \vdash \dot{\exists} x\varphi \to \bot$ elde edilir. t bir sabit terim olduğundan $\operatorname{Sb}(\varphi, x|t)$, dolayısıyla $\Gamma \vdash \varphi(t) \to \dot{\exists} x\varphi$. Son iki çıkarımdan zincir kuralı ile $\Gamma \vdash \varphi(t) \to \bot$ ve buradan çıkarım kuralı ile $\Gamma \cup \{\varphi(t)\} \vdash \bot$ elde edilir ki bu $\Gamma \cup \{\varphi(t)\}$'nin biçimsel tutarlı olmasıyla çelişir. ■

Teorem 3.16.7 *$\Phi \subseteq \Phi^1_s$ olsun. L diline her $\varphi \in \Phi$ için yeni bir c_φ sabiti eklensin. $L' := L \cup \{c_\varphi \,|\, \varphi \in \Phi\}$ olmak üzere $\Gamma \cup \{\dot\exists x_\varphi \varphi \,|\, \varphi \in \Phi\}$ formül kümesi L-biçimsel tutarlı ise $\Gamma \cup \{\varphi(c_\varphi) \,|\, \varphi \in \Phi\}$ formül kümesi L'-biçimsel tutarlıdır.*

Kanıt. $\Gamma \cup \{\varphi(c_\varphi) \,|\, \varphi \in \Phi\} \vdash_{L'} \bot$ olduğunu varsayalım. Sonlu sayıda $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Phi$ ile $\Gamma, \varphi_1(c_{\varphi_1}), \ldots, \varphi_n(c_{\varphi_n}) \vdash_{L'} \bot$ olur. $\varphi_k(c_{\varphi_k})$ formülleri birer sav olduğundan Çıkarım Teoremi ile

$$\Gamma, \varphi_1(c_{\varphi_1}), \ldots, \varphi_{n-1}(c_{\varphi_{n-1}}) \vdash_{L'} \varphi_n(c_{\varphi_n}) \to \bot$$

elde edilir. Bundan ve $\dot\exists K$'den geçişlilik ile

$$\Gamma, \varphi_1(c_{\varphi_1}), \ldots, \varphi_{n-1}(c_{\varphi_{n-1}}) \vdash_{L'} \dot\exists x_{\varphi_n} \varphi_n \to \bot$$

elde edilir. Buradansa çıkarım kuralı ile

$$\Gamma, \varphi_1(c_{\varphi_1}), \ldots, \varphi_{n-1}(c_{\varphi_{n-1}}), \dot\exists x_{\varphi_n} \varphi_n \vdash_{L'} \bot$$

elde ederiz. Bu işlem n kez yinelenerek sonunda

$$\Gamma, \dot\exists x_{\varphi_1} \varphi_1, \ldots, \dot\exists x_{\varphi_{n-1}} \varphi_{n-1}, \dot\exists x_{\varphi_n} \varphi_n \vdash_{L'} \bot$$

elde edilir. Bu son çıkarımın sol yanındaki formüllerin tümü L dilinin formülleridir. (3.15.2)'den dolayı

$$\Gamma, \dot\exists x_{\varphi_1} \varphi_1, \ldots, \dot\exists x_{\varphi_{n-1}} \varphi_{n-1}, \dot\exists x_{\varphi_n} \varphi_n \vdash_{L} \bot$$

olur ve bu $\Gamma \cup \{\dot\exists x_\varphi \varphi \,|\, \varphi \in \Phi\}$'nin biçimsel tutarlı olmasıyla çelişir. ■

Tanım 3.16.8 *$\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}\, L$ kümesine $\dot\exists x_\varphi \varphi \in \Gamma$ olan her $\varphi \in \Phi^1_s$ için $\varphi(c) \in \Gamma$ olacak biçimde bir $c \in \mathcal{C}$ bulunabiliyorsa ($L = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ **diline ilişkin bir**) **Henkin kuramı** denir. Bu c sabitine $\dot\exists x_\varphi \varphi$ savının bir **tanığı** denir.*

Önerme 3.16.9 *Maksimal biçimsel tutarlı $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}\, L$'nin bir Henkin kuramı olması için gerek ve yeter koşul her $\dot\exists x \varphi \in \Gamma$ savı için $\dot\exists x \varphi \to \varphi(c) \in \Gamma$ olacak biçimde bir $c \in \mathcal{C}$ sabitinin bulunmasıdır.*

Kanıt. Γ maksimal biçimsel tutarlı olsun.

$\Longrightarrow$: Γ bir Henkin kuramı ve $\dot\exists x \varphi \in \Gamma$ bir sav olsun. Tanımdan dolayı $\varphi(c) \in \Gamma$ olacak biçimde bir c sabiti vardır. $p \to (p \to q)$ hepdoğrusundan $\vdash \dot\exists x \varphi \to (\dot\exists x \varphi \to \varphi(c))$ dosdoğrusu elde edilir. $\Gamma \vdash \dot\exists x \varphi$ ve (MP) ile buradan $\Gamma \vdash \dot\exists x \varphi \to \varphi(c)$ elde edilir. Γ maksimal biçimsel tutarlı olduğundan $\dot\exists x \varphi \to \varphi(c) \in \Gamma$ olur.

$\Longleftarrow$: $\dot\exists x \varphi \in \Gamma$ bir sav olsun. Varsayımdan bir c sabiti ile $\dot\exists x \varphi \to \varphi(c) \in \Gamma$ olur ki bu verilerden (MP) ile $\Gamma \vdash \varphi(c)$ ve Γ maksimal biçimsel tutarlı olduğundan $\varphi(c) \in \Gamma$ olur. ■

Önerme 3.16.10 $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ *maksimal biçimsel tutarlı Henkin kuramı olsun. Bu durumda* $\operatorname{Sb}\varphi = \{x\}$ *koşulunu sağlayan her* $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ *için*

$$\dot{\exists}x\varphi \in \Gamma \iff \varphi(c) \in \Gamma \text{ olacak biçimde bir } c \in L \text{ sabiti vardır.}$$

Kanıt. $\varphi = \varphi(x)$ olsun. Önermenin $\Longrightarrow$ yönü Henkin kuramının tanımından çıkar. Şimdi $\varphi(c) \in \Gamma$ olsun. (3.14.16)'dan $\Gamma \cup \{\varphi(c)\}$ biçimsel tutarlıdır. (3.16.6)'dan dolayı $\Gamma \cup \{\dot{\exists}x\varphi\}$ biçimsel tutarlıdır. Bir kez daha (3.14.16) ile $\dot{\exists}x\varphi \in \Gamma$ elde edilir. ■

Önerme 3.16.11 $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ *maksimal biçimsel tutarlı bir Henkin kuramı ise her* $\dot{\forall}x\varphi \in \operatorname{Sav} L$ *için:*

$$\dot{\forall}x\varphi \in \Gamma \iff \text{Her } c \in \mathcal{C} \text{ için } \varphi(c) \in \Gamma.$$

Kanıt. Γ maksimal biçimsel tutarlı bir Henkin kuramı ve $\dot{\forall}x\varphi$ bir sav olsun.

$\Longrightarrow$: $\dot{\forall}x\varphi \in \Gamma$ olsun. $\Gamma \vdash \dot{\forall}x\varphi$ ve $\dot{\forall}A$ ile her $c \in \mathcal{C}$ için $\Gamma \vdash \varphi(c)$. Buradan ve Γ'nın çıkarımsal kapalı olmasından her $c \in \mathcal{C}$ için $\varphi(c) \in \Gamma$ olur.

$\Longleftarrow$: $\dot{\forall}x\varphi$ bir sav ve $\dot{\forall}x\varphi \notin \Gamma$ olsun. (3.14.16)(e)'den $\neg\dot{\forall}x\varphi \in \Gamma$ olur. $\neg\neg\varphi \to \varphi$ bir dosdoğru olduğundan $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ olur. Buradan önce çıkarım kuralı ile $\Gamma \cup \{\neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$ ve buradan da (3.11.11) ile $\Gamma \cup \{\dot{\forall}x\neg\neg\varphi\} \vdash \dot{\forall}x\varphi$. Ön koşulumuzdan $\dot{\forall}x\varphi$ bir savdır, dolayısıyla $\dot{\forall}x\neg\neg\varphi$ bir savdır. Dolayısıyla çıkarım kuralıyla $\Gamma \vdash \dot{\forall}x\neg\neg\varphi \to \dot{\forall}x\varphi$ olur. Buradan karşı konumla $\Gamma \vdash \neg\dot{\forall}x\varphi \to \neg\dot{\forall}x\neg\neg\varphi$ elde edilir. Buradansa, $\Gamma \vdash \neg\dot{\forall}x\varphi$ ve (MP) ile $\Gamma \vdash \neg\dot{\forall}x\neg\neg\varphi$ olur. Bu ise Γ çıkarımsal kapalı olduğundan $\dot{\exists}$'ın tanımı ile $\dot{\exists}x\neg\varphi \in \Gamma$ demektir. Γ bir Henkin kuramı olduğundan $\dot{\exists}x\neg\varphi$ savının en az bir $c \in \mathcal{C}$ tanığı vardır, dd. en az bir c ile $\neg\varphi(c) \in \Gamma$. (3.14.16)(e) ile $\varphi(c) \notin \Gamma$ ve bkb. ■

Tanım 3.16.12 *Daima sonsuz olmasını istediğimiz* $\mathcal{V}$ *değişkenler kümemizin çokluk sayısını* $\aleph$ *ile göstereceğiz, dd.* $|\mathcal{V}| = \aleph$. $\mathcal{V}$ *değişkenler kümemizin sayılabilir sonsuz olması durumunda ise* $|\mathcal{V}| = \aleph_0$ *yazacağız.* $L = \mathcal{R} \sqcup \mathcal{F} \sqcup \mathcal{C}$ *için* $\|L\| := \max\{|L|, \aleph\}$ *olsun.*

Önerme 3.16.13 $|\operatorname{Fm} L| = |\operatorname{Sav} L| = \|L\|$ *ve* $L = \mathcal{R} \sqcup \mathcal{F} \sqcup \mathcal{C}$ *ise* $|\operatorname{Tm} L| = \max\{|\mathcal{V}|, |\mathcal{F}|, |\mathcal{C}|\} \leq \|L\|$. *Özellikle* L *ve* $\mathcal{V}$ *sayılabilirse* L *dilinin formülleri ve savları sayılabilir sonsuzdur.*

Kanıt. $\kappa := \|L\|$ sonsuzdur ve $W = L \sqcup \mathcal{V} \sqcup \{\neg, \to, \dot{\forall}, (,)\}$ abecesi için $|W| = \kappa$. κ sonsuz olduğundan her $n \geq 1$ için W^n kümesinin çokluk sayısı $\kappa^n = \kappa$. Bu nedenle $\operatorname{Sz} W = \bigcup_{n=0}^{+\infty} W^n$ için, $\kappa \geq \aleph_0$ olduğundan

$|\mathrm{Sz}\, W| \leq |W| \cdot \aleph_0 = \kappa \cdot \aleph_0 = \kappa$. Diğer yandan $\mathrm{Fm}\, L$, $\mathrm{Tm}\, L$ ve $\mathrm{Sav}\, L$ kümeleri $\mathrm{Sz}\, W$ kümesinin altkümeleri olduğundan bunların çokluk sayıları en fazla κ kadardır. Şimdilik

$$|\ \mathrm{Tm}\, L| \leq \kappa \text{ ve } |\mathrm{Sav}\, L| \leq |\mathrm{Fm}\, L| \leq \kappa = \|L\|\,. \tag{3.33}$$

$M := \mathcal{V} \sqcup \mathcal{C} \sqcup \mathcal{F}$ bir sonsuz kümedir ve $\mu := |M|$ olsun. Elbette $\mu = \max\{|\mathcal{V}|\,, |\mathcal{F}|\,, |\mathcal{C}|\}$. $\mathrm{Tm}\, L \subseteq \mathrm{Sz}\, M$ olduğundan $|\ \mathrm{Tm}\, L| \leq \mu$ olur. Diğer yandan $\mathcal{V} \sqcup \mathcal{C} \subseteq \mathrm{Tm}\, L$ olduğundan $|\mathcal{V}|\,, |\mathcal{C}| \leq |\ \mathrm{Tm}\, L|$. Ayrıca her $f \in \mathcal{F}_n$ için $f(x, \ldots, x) \in \mathrm{Tm}\, L$ olduğundan $|\mathcal{F}| \leq |\ \mathrm{Tm}\, L|$ olur. Sonuçta $\mu \leq |\ \mathrm{Tm}\, L|$, dolayısıyla $\mu = |\ \mathrm{Tm}\, L|$ elde ederiz.

Her $t = t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Tm}\, L$ için $\dot{\forall} x_1, \ldots, x_n\ t \doteq t$ bir sav olduğundan $|\ \mathrm{Tm}\, L| \leq |\mathrm{Sav}\, L|$ olur. Her $R \in \mathcal{R}_n$ için $\dot{\forall} x R(x, \ldots x)$ bir sav olduğundan $|\mathcal{R}| \leq |\mathrm{Sav}\, L|$. Sonuçta $\kappa = \|L\| = \max\{|\mathcal{V}|\,, |\mathcal{F}|\,, |\mathcal{R}|\,, |\mathcal{C}|\} \leq |\mathrm{Sav}\, L|$ elde ederiz ve bu (3.33) ile birlikte $\|L\| = |\mathrm{Sav}\, L| = |\mathrm{Fm}\, L|$ eşitliklerini verir. ■

Teorem 3.16.14 $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}\, L$ *biçimsel tutarlı ise* L *diline* yeni sabitler *eklenerek kazanılmış bir* L^* *dili ve* L^* *diline ilişkin maksimal biçimsel tutarlı bir* Γ^* *Henkin kuramı* $\Gamma \subseteq \Gamma^*$ *ve* $\|L\| = \|L^*\|$ *olacak biçimde bulunabilir.*

Sonuç 3.16.15 $\Sigma \subseteq \mathrm{Sav}\, L$ *biçimsel tutarlı ise* L *diline* yeni sabitler *eklenerek kazanılmış bir* L^* *dili ve* L^* *diline ilişkin* $\mathrm{Sav}\, L$*'de maksimal biçimsel tutarlı bir* Σ^* *Henkin kuramı* $\Sigma \subseteq \Sigma^*$ *ve* $\|L\| = \|L^*\|$ *olacak biçimde bulunabilir.*

Kanıt. n doğal sayıları üzerinden tümevarımla bir $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ biçimsel diller dizisi ve bir $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kuramlar dizisini her $\Gamma_n \subseteq \mathrm{Fm}\, L_n$ kuramı L_n diline göre maksimal biçimsel tutarlı ve

$$L = L_0 \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq \cdots \quad \text{ve} \quad \Gamma \subseteq \Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \cdots$$

olacak biçimde tanımlayacağız.

$L_0 := L$ olsun. (3.14.17)'ye göre $\Gamma \subseteq \Gamma_0$ koşulunu sağlayan bir $\Gamma_0 \subseteq \mathrm{Fm}\, L_0$ maksimal biçimsel tutarlı kuramını seçelim.

L_n ve Γ_n istenen özelliklerle seçilmiş olsunlar. $\Phi^1_{sn} := \Phi^1_{sn}(L_n)$, dd. Φ^1_{sn} kümesi L_n dilinin bir serbest değişkenli formüllerinin kümesi olsun. L_{n+1} dili L_n diline her $\varphi \in \Phi^1_{sn}$ için bir yeni c_φ sabiti ekleyerek oluşturulsun. Her $\varphi \in \Phi^1_{sn}$ için $\dot{\exists} x_\varphi \varphi \in \mathrm{Sav}\, L_n$ olduğunu belirtelim.

$$\Gamma'_{n+1} := \Gamma_n \cup \{\varphi(c_\varphi)\,|\,\dot{\exists} x_\varphi \varphi \in \Gamma_n\}$$

kuramı (3.16.7)'den dolayı L_{n+1} diline göre biçimsel tutarlıdır. Γ_{n+1} kuramını (3.14.17)'ye göre $\Gamma'_{n+1} \subseteq \Gamma_{n+1} \subseteq \mathrm{Fm}\, L_{n+1}$ koşulunu sağlayanlar

arasında maksimal biçimsel tutarlı olacak biçimde seçelim. Şimdi

$$L^* := \bigcup_{n=0}^{+\infty} L_n \quad \text{ve} \quad \Gamma^* := \bigcup_{n=0}^{+\infty} \Gamma_n$$

olsun. Γ^* *kuramının* L^* *diline ilişkin maksimal tutarlı bir Henkin kuramı olduğunu savunuyoruz.* (3.15.8)'den dolayı her Γ_n kuramı L^*-biçimsel tutarlıdır. (3.14.8)'den dolayı Γ^* kuramı L^* biçimsel tutarlıdır.

Şimdi Γ^*'ın maksimal biçimsel tutarlı olduğunu görelim. $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ keyfi verilsin. $\varphi \notin \Gamma^*$ ise $\Gamma^* \cup \{\varphi\}$'nın biçimsel tutarsız olduğunu göstereceğiz. $\varphi \notin \Gamma^*$ olsun. n doğal sayısı $\varphi \in \operatorname{Fm} L_n$ olacak biçimde seçilsin. $\varphi \notin \Gamma_n$ ve Γ_n maksimal biçimsel tutarlı olarak (3.14.16)'ya göre biçimsel tam olduğundan $\Gamma_n \cup \{\varphi\}$ biçimsel tutarsızdır. Dolayısıyla $\Gamma^* \cup \{\varphi\}$ biçimsel tutarsızdır.

Şimdi $\varphi \in \operatorname{Fm} L^*$, $\operatorname{Sb} \varphi = \{x\}$ ve $\dot{\exists} x\varphi \in \Gamma^*$ olsun. n doğal sayısını $\dot{\exists} x\varphi \in \Gamma_n$ olacak biçimde seçelim. L_{n+1} ve Γ_{n+1} kümelerinin tanımından bir $c_\varphi \in L_{n+1} \subseteq L^*$ ile $\varphi(c_\varphi) \in \Gamma_{n+1} \subseteq \Gamma^*$, dolayısıyla Γ^* bir Henkin kuramıdır.

$\kappa := \|L\|$ olsun. n üzerinden tümevarımla kolayca her $n \in \mathbb{N}$ için $\|L_n\| = \kappa$ olduğu görülür. Gerçekten de $L_0 = L$ olduğundan $\|L_0\| = \kappa$. Şimdi $\|L_n\| = \kappa$ olsun. L_{n+1} dili her $\varphi \in \Phi^1_{sn}$ için L_n diline yeni bir c_φ sabiti ekleyerek elde edilmiştir. Diğer yandan (3.16.13)'ten dolayı $\left|\Phi^1_{sn}\right| \leq \kappa$. Dolayısıyla, $L_n \subseteq L_{n+1}$ ve κ çokluk sayısının sonsuz olduğundan $\kappa \leq |L_{n+1}| \leq |L_n| + \left|\Phi^1_{sn}\right| \leq \kappa + \kappa = \kappa$. Tanım gereği $L^* = \bigcup_{n=0}^{+\infty} L_n$ olduğundan $\kappa \leq |L^*| \leq \kappa \cdot \aleph_0 = \kappa$.

Sonucun kanıtı kelimesi kelimesine aynıdır. Bu kez (Γ_n) dizisi yerine $\Sigma_n \subseteq \operatorname{Sav} L_n$ olmak üzere (Σ_n) dizisi oluşturulur. İşe maksimal biçimsel tutarlı $\Sigma_0 \subseteq \operatorname{Sav} L_0$ savlar kümesini $\Sigma \subseteq \Sigma_0$ olacak biçimde seçerek başlanır. $\Sigma'_{n+1} := \Sigma_n \cup \{\varphi(c_\varphi) \mid \dot{\exists} x_\varphi \varphi \in \Sigma_n\} \subseteq \operatorname{Sav} L_{n+1}$ olduğundan Σ_{n+1} kuramı $\operatorname{Sav} L_{n+1}$'de maksimal biçimsel tutarlı ve $\Sigma'_{n+1} \subseteq \Sigma_{n+1} \subseteq \operatorname{Sav} L_{n+1}$ olacak biçimde seçilebilir. Gerisi aynen kalır. ■

- **Cebirden Anımsama:** $L_g = \{\bullet, \mathbf{e}\}$ ve $L_c = \{\dot{+}, \bullet, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ sırasıyla gruplar ve cisimler kuramının dilleri, $\mathcal{C}_g = \{\mathbf{e}\}$ ve $\mathcal{C}_c = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ bu dillerin sabitler kümeleri ve son olarak Λ_g ve Λ_c ise bu kuramların ilksavları olsunlar. Grup ve cisim tanımını verdikten sonra verdiğimiz ilk modeller bir anlamda minimal olan $\mathfrak{E}_g = (\mathcal{C}_g, L^{\mathfrak{E}_g})$ ve $\mathfrak{E}_c = (\mathcal{C}_c, L^{\mathfrak{E}_c})$ modelleridir. $\bullet^{\mathfrak{E}_g}$ yorumunu yalın olarak $\cdot$ ile gösterir ve $\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} := \mathbf{e}$ olarak açıklarsak $\mathfrak{E}_g$ bir gruptur. $\dot{+}^{\mathfrak{E}_c}$ ve $\bullet^{\mathfrak{E}_c}$ yerine yalın olarak $+$ ve $\cdot$ yazar ve $\mathbf{0} + \mathbf{0} := \mathbf{0}$, $\mathbf{0} + \mathbf{1} := \mathbf{1} + \mathbf{0} := \mathbf{1}$, $\mathbf{1} + \mathbf{1} := \mathbf{0}$, $\mathbf{0} \cdot \mathbf{0} := \mathbf{0}$, $\mathbf{0} \cdot \mathbf{1} := \mathbf{1} \cdot \mathbf{0} := \mathbf{0}$, $\mathbf{1} \cdot \mathbf{1} := \mathbf{1}$ olarak açıklarsak $\mathfrak{E}_c$ bir cisimdir ve bu cisim cebir derslerinde genel olarak $\mathbb{F}_2$ ile gösterilir.

Şimdi bize $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramı verildiğinde benzer bir yol izleyemez miyiz? Elbette ilk zorluk $\mathcal{C} = \emptyset$ ile başlar. Ancak bu o kadar önemli değildir. Böyle bir durumda L diline herhangi bir $\mathcal{C}' \neq \emptyset$ yeni sabitler kümesi ekleyerek L' dili üzerinden $\mathcal{K}' = (L', \Gamma)$ kuramına geçeriz. $\mathcal{K}'$ kuramı $\mathcal{K}$ kuramının tutucu bir genişlemesi olduğundan eğer $\mathfrak{A}' \in \operatorname{Yap} L'$ yapısı $\mathcal{K}'$'nün bir modeli ise $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \restriction L \in \operatorname{Yap} L$ yapısı $\mathcal{K}$'nın bir modelidir.

$\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ maksimal tutarlı bir Henkin kuramı olsun. Biz $L = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ dilinin $\mathcal{C}$ sabitler kümesinden yola çıkarak bir $\mathfrak{A}$ modeli oluşturmak istiyoruz. Her şeyden önce $\mathcal{C} \neq \emptyset$ olduğunu görelim. $x \in \mathcal{V}$ değişkeni keyfi verilsin. $\varphi(x) = (x \doteq x)$ olmak üzere $\varepsilon_1(x) = \dot{\forall} x \varphi(x)$ bir savdır ve bir mantık ilksavı olduğundan $\Gamma \vdash \varepsilon_1(x)$. Özelleştirme ile $\varepsilon_1(x) \vdash \varphi(x)$. Geçişlilikle $\Gamma \vdash \varphi(x)$. Bundan ve $\vdash \varphi(x) \to \dot{\exists} x \varphi(x)$ ile $\Gamma \vdash \dot{\exists} x \varphi(x)$. Γ maksimal biçimsel tutarlı olduğundan $\dot{\exists} x \varphi(x) \in \Gamma$. Γ bir Henkin kuramı olduğu için ise $\varphi(c)$ olan bir $c \in \mathcal{C}$ tanığımız vardır, dolayısıyla $\mathcal{C} \neq \emptyset$.

Her $t \in \operatorname{Tmc} L$ sabit teriminin her $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$'deki $t^{\mathfrak{A}}$ yorumu A evrenin bir öğesi olacaktır. Biz tanımlayacağımız $\mathfrak{A}$ modelinin A evrenin $\mathcal{C}^{\mathfrak{A}}$ olmasını, dd. $A = \{c^{\mathfrak{A}} \mid c \in \mathcal{C}\}$ olmasını isteyeceğiz; böyle bir durumda elbette $A = \{t^{\mathfrak{A}} \mid t \in \operatorname{Tmc} L\}$ olacaktır. $c, d \in \mathcal{C}$ için eğer $c \doteq d \in \Gamma$ ise Γ'nın her $\mathfrak{B}$ modelinde $c^{\mathfrak{B}} = d^{\mathfrak{B}}$, özellikle $c^{\mathfrak{A}} = d^{\mathfrak{A}}$ olmalıdır. Bu durumda her $c, d \in \mathcal{C}$ için $c \doteq d \in \Gamma$ ise bu c, d öğelerine aynı gözü ile bakmak zorundayız. Bu ise bizi $\mathcal{C}$ kümesinde bir $\backsim$ denklik bağıntısına yönlendirir; bu denklik bağıntısında $c \doteq d \in \Gamma$ ise $c \backsim d$ olmalıdır. Bu durumda her $c, d \in \mathcal{C}$ için

$$c \backsim d : \iff c \doteq d \in \Gamma \iff \Gamma \vdash c \doteq d \tag{3.34}$$

olarak açıklanan $\backsim$ bağıntısı bir denklik bağıntısı ise $A := \mathcal{C}/\backsim$ alır ve c^* ile $c \in \mathcal{C}$ öğesinin denklik sınıfını göstermek üzere $c^{\mathfrak{A}} := c^*$ olarak açıklarsak en azından her $c \doteq d \in \Gamma$ formülü için $\mathfrak{A} \models c \doteq d$ bağıntısına ulaşmış oluruz. Umudumuz L dilinin fonksiyon ve bağıntı imlerini de uygun biçimde yorumlarsak $\mathfrak{A} \models \Gamma$ bağıntısına ulaşacağımızdır.

Teorem 3.16.16 *Her maksimal biçimsel tutarlı $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ Henkin kuramının*

$$\Gamma = \operatorname{Bc} \Gamma = \operatorname{Dog} \mathfrak{A} \quad \textit{ve} \quad \operatorname{Bt} \Gamma = \operatorname{Th} \mathfrak{A}$$

koşullarını sağlayan bir $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ modeli vardır ve $\mathcal{C}$ kümesi L dilinin sabitler kümesi olmak üzere $|A| \leq |\mathcal{C}|$.

Sonuç 3.16.17 *$\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ biçimsel tutarlıdır $\iff$ Γ'nın bir modeli vardır.*

Kanıt. $L = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ olsun. Her $c, d \in \mathcal{C}$ için $\backsim$ bağıntısı (3.34)'teki gibi açıklansın. Bu bağıntının $\mathcal{C}$ kümesinde bir denklik bağıntısı olduğunu savunuyoruz. Her şeyden önce Γ maksimal biçimsel tutarlı olduğundan her σ

savı için $\Gamma \vdash \sigma$ ise $\sigma \in \Gamma$ olur. ε_k Eşitlik İlksavları için bir yandan $\Gamma \vdash \varepsilon_k$, diğer yandan her $c, d, e \in \mathcal{C}$ için (3.13.1) ve geçişlilik ile $\Gamma \vdash \varepsilon_1(c)$, $\Gamma \vdash \varepsilon_2(c,d)$ ve $\Gamma \vdash \varepsilon_3(c,d,e)$ elde edilir: açık yazılımla her $c, d, e \in \mathcal{C}$ için

$$\begin{array}{ll} (1) & \Gamma \vdash c \doteq c \\ (2) & \Gamma \vdash c \doteq d \to d \doteq c \\ (3) & \Gamma \vdash (c \doteq d) \curlywedge (d \doteq e) \to (c \doteq e) \end{array}$$

elde ederiz. Γ maksimal biçimsel tutarlı olduğundan $\varepsilon_1(c)$, $\varepsilon_2(c,d)$, $\varepsilon_3(c,d,e)$ $\in \Gamma$ olur.

Böylece $\varepsilon_1(c) \in \Gamma$'dan her $c \in \mathcal{C}$ için $c \backsim c$. Şimdi $c \backsim d$, dd. $c \doteq d \in \Gamma$ olsun. (2) ve (MP) ile $\Gamma \vdash d \doteq c$, dolayısıyla $d \doteq c \in \Gamma$, bu ise $d \backsim c$ demektir. Son olarak $c \backsim d$ ve $d \backsim e$ olsun. Bu $c \doteq d, d \doteq e \in \Gamma$ demektir. Dolayısıyla $\Gamma \vdash (c \doteq d) \curlywedge (d \doteq e)$. Buradan (3) ile $\Gamma \vdash c \doteq e$, dolayısıyla $c \doteq e \in \Gamma$, yani $c \backsim e$ olur. Böylece $\backsim$ ile $\mathcal{C}$ kümesinde bir denklik bağıntısı açıklanmıştır. c^* ile c öğesinin denklik sınıfını gösterelim. $A := \mathcal{C}/\backsim = \{c^* \mid c \in \mathcal{C}\}$ olsun.

Bir $\mathfrak{A} = \left(A, L^{\mathfrak{A}}\right) \in \operatorname{Yap} L$ yapısı tanımlayacağız. Her $c \in \mathcal{C}$ için beklenildiği gibi $c^{\mathfrak{A}} := c^*$ olarak açıklanacaktır. Şimdi sırasıyla $R \in \mathcal{R}$ bağıntı imleriyle $f \in \mathcal{F}$ fonksiyon imlerinin $\mathfrak{A}$ yapısındaki yorumlarını açıklayacağız.

$R \in \mathcal{R}_n$ ise

$$R^{\mathfrak{A}} := \{(c_1^*, \ldots, c_n^*) \mid c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{C} \text{ ve } R(c_1, \cdots, c_n) \in \Gamma\} \tag{3.35}$$

olarak açıklıyoruz. Her şeyden önce bu tanımın kusursuz olduğunu göstermeliyiz, dd. $c_1, \cdots, c_n, d_1, \cdots, d_n \in \mathcal{C}$ ve $i = 1, \cdots, n$ için $c_i \backsim d_i$ ise

$$R(c_1, \cdots, c_n) \in \Gamma \iff R(d_1, \cdots, d_n) \in \Gamma \tag{3.36}$$

olduğunu kanıtlamalıyız. (3.36)'nın önce $\Longrightarrow$ yönünü kanıtlayacağız.

$\Gamma \vdash \varepsilon_5(\overline{x_n}, \overline{y_n}, R)$ ve (3.15.2) ile $\varepsilon_5(\overline{x_n}, \overline{y_n}, R) \vdash \varepsilon_5(\overline{c_n}, \overline{d_n}, R)$. Bu çıkarımlardan geçişlilik ile $\Gamma \vdash \varepsilon_5(\overline{c_n}, \overline{d_n}, R)$, açık yazılımla

$$\Gamma \vdash (c_1 \doteq d_1 \curlywedge \cdots \curlywedge c_n \doteq d_n) \to \left(R(\overline{c_n}) \to R(\overline{d_n})\right) \tag{3.37}$$

elde edilir. $c_i \backsim d_i$ olduğundan tanım gereği $c_i \doteq d_i \in \Gamma$, dolayısıyla $\Gamma \vdash c_1 \doteq d_1 \curlywedge \cdots \curlywedge c_n \doteq d_n$ olur. Bu son bağıntı ve (3.37)'den (MP) ile

$$\Gamma \vdash R(c_1, \ldots, c_n) \to R(d_1, \cdots, d_n)$$

Buradan da eğer $R(c_1, \cdots, c_n) \in \Gamma$ ise $\Gamma \vdash R(c_1, \cdots, c_n)$ ve (MP) ile $\Gamma \vdash R(d_1, \cdots, d_n)$ elde edilir. Γ maksimal biçimsel tutarlı olduğundan $R(\overline{d_n}) \in \Gamma$ olur.

(3.36)'nın $\Longleftarrow$ yönü benzer biçimde kanıtlanır. $\backsim$ bir denklik bağıntısı olduğundan önce $c_i \backsim d_i$ bağıntısından $d_i \backsim c_i$ bağıntısına geçilir ve bu kez $\varepsilon_5(x_1, \ldots, y_n, R)$ ilksavında x_i'ler yerine d_i'ler ve y_i'ler yerine ise c_i'ler konarak aynı argümanlar tekrarlanır.

Şimdi $f \in \mathcal{F}_n$ olsun. $f^{\mathfrak{A}}$ yorumu bir $f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$ fonksiyonu olacaktır. Şimdi $c_1, \cdots, c_n \in \mathcal{C}$ ve $t = f(c_1, \cdots, c_n)$ olsun. Her şeyden önce $\varepsilon_1(x)$ Eşitlik İlksavından (3.13.1) ve geçişlilik ile $\vdash \varepsilon_1(t)$, dd. $\vdash t \doteq t$ elde edilir. $\psi(x)$ formülü ise $x \doteq t$ formülü olsun. $\dot{\exists} K$ ile $\vdash \psi(x|t) \to \dot{\exists} x \psi$, açık yazılımla

$$\vdash t \doteq t \to \dot{\exists} x x \doteq f(c_1, \ldots, c_n))$$

(MP) ile $\vdash \dot{\exists} x \left(x \doteq f(c_1, \ldots, c_n)\right)$ özellikle $\Gamma \vdash \dot{\exists} x \left(x \doteq f(c_1, \ldots, c_n)\right)$ ve bir kez daha Γ'nın maksimal biçimsel tutarlılığından

$$\sigma := \dot{\exists} x \psi(x) = \dot{\exists} x \left(x \doteq f(c_1, \ldots, c_n)\right) \in \Gamma$$

olur. $\operatorname{Sb} \psi = \{x\}$ ve Γ bir Henkin kuramı olduğu için bir $c \in \mathcal{C}$ ile $\psi(c) \in \Gamma$, açık yazılımla $c \doteq f(c_1, \ldots, c_n) \in \Gamma$ olur.

$$f^{\mathfrak{A}}(c_1^*, \ldots, c_n^*) := c^* \tag{3.38}$$

olarak açıklıyoruz. Bu tanım terimlerin $f^{\mathfrak{A}}$ üzerinden yorumlarının tanımı ile uyumludur, dd.

$$(f(c_1, \ldots, c_n))^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{A}}(c_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, c_n^{\mathfrak{A}})$$

Şimdi bu tanımın kusursuz olduğunu görelim. $c_1, \cdots, c_n, d_1, \cdots, d_n \in \mathcal{C}$ ve $i = 1, \cdots, n$ için $c_i \backsim d_i$ olsun. $s = f(d_1, \cdots, d_n)$ ve benzer bir irdelemeyle bir $d \in \mathcal{C}$ ile $d \doteq f(d_1, \ldots, d_n) \in \Gamma$. Bu durumda $c^* = d^*$ olduğunu kanıtlamalıyız. Az önceki irdelemelerde gördüğümüz gibi bir yandan $\Gamma \vdash c_1 \doteq d_1 \curlywedge \cdots \curlywedge c_n \doteq d_n$, diğer yandan $\Gamma \vdash \varepsilon_5(c_1, \cdots, d_n, R)$ çıkarımını elde ettiğimiz irdelemelerin benzerleriyle $\Gamma \vdash \varepsilon_4(c_1, \cdots, d_n, f)$ olduğundan (MP) ile $\Gamma \vdash f(c_1, \cdots, c_n) \doteq f(d_1, \ldots, d_n)$ elde ederiz. Γ maksimal biçimsel tutarlı olduğundan $f(c_1, \cdots, c_n) \doteq f(d_1, \ldots, d_n) \in \Gamma$, dolayısıyla $f(c_1, \cdots, c_n^*) \sim f(d_1, \ldots, d_n^*)$, dd. $c^* = d^*$ olur ve

$$f^{\mathfrak{A}}(c_1^*, \ldots, c_n^*) = f^{\mathfrak{A}}(d_1^*, \ldots, d_n^*)$$

elde ederiz ki bu (3.38) tanımının kusursuz olması demektir. Böylece $L^{\mathfrak{A}}$ dilinin, dolayısıyla $\mathfrak{A} = (A, L^{\mathfrak{A}})$ yapısının tanımı tamamlanmıştır. Geriye $\Gamma = \operatorname{Dog} \mathfrak{A}$ olduğunu göstermek kalıyor.

Her $t \in \operatorname{Tmc} L$ sabit terimi için $t^{\mathfrak{A}} \in A$ olduğundan $t^{\mathfrak{A}} = c^*$ olacak biçimde bir $c \in \mathcal{C}$ sabiti vardır. Biz önce TTK ile her $c \in \mathcal{C}$ ve her sabit $t \in \operatorname{Tmc} L$ için

$$c \doteq t \in \Gamma \iff c^{\mathfrak{A}} = t^{\mathfrak{A}} \iff c^* = t^{\mathfrak{A}} \tag{3.39}$$

olduğunu kanıtlayacağız; burada tanım gereği $c^* = c^{\mathfrak{A}}$ olduğunu anımsatalım. t bir $d \in \mathcal{C}$ sabiti ise tanım gereği

$$c \doteq d \in \Gamma \iff c \backsim d \iff c^* = d^* \iff c^{\mathfrak{A}} = d^{\mathfrak{A}}.$$

Şimdi $t_1, \ldots, t_n, t \in \operatorname{Tmc} L$, $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ ve önerme $t_1, \ldots, t_n$'ler için kanıtlanmış olsun. c_i sabitlerimizi $c_i^* = t_i^{\mathfrak{A}}$ olacak biçimde seçelim; tümevarım koşulumuzdan $c_i \doteq t_i \in \Gamma \iff c_i^* = t_i^{\mathfrak{A}}$.

Önce $c \doteq t \in \Gamma$ varsayalım. $c_i \doteq t_i \in \Gamma$, $i = 1, \ldots, n$, dolayısıyla $\Gamma \vdash t_1 \doteq c_1 \curlywedge \cdots \curlywedge t_n \doteq c_n$ ve $\varepsilon_4(t_1, \ldots, c_n, f)$, dd.

$$\vdash t_1 \doteq c_1 \curlywedge \cdots \curlywedge t_n \doteq c_n \to f(t_1, \ldots, t_n) \doteq f(c_1, \ldots, c_n)$$

çıkarımlarından modus ponens ile $\Gamma \vdash f(t_1, \ldots, t_n) \doteq f(c_1, \ldots, c_n)$, dd. $\Gamma \vdash t \doteq f(c_1, \ldots, c_n)$. Buradan $\Gamma \vdash c \doteq t$ ile $\Gamma \vdash c \doteq f(c_1, \ldots, c_n)$ elde ederiz. Γ çıkarımsal kapalı olduğundan $c \doteq f(c_1, \ldots, c_n) \in \Gamma$ olur ve $f^{\mathfrak{A}}$'nin tanımından

$$c^* \overset{(3.38)}{=} f^{\mathfrak{A}}(c_1^*, \ldots, c_n^*) = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}) \overset{def}{=} t^{\mathfrak{A}}.$$

Tersine $c^* = t^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}) = f^{\mathfrak{A}}(c_1^*, \ldots, c_n^*)$ olsun. $f^{\mathfrak{A}}$ fonksiyonunun tanımından $c \doteq f(c_1, \ldots, c_n) \in \Gamma$. Buradan ve yukarıda elde ettiğimiz $f(c_1, \ldots, c_n) \doteq f(t_1, \ldots, t_n) \in \Gamma$ bağıntılarından $c \doteq f(t_1, \ldots, t_n) \in \Gamma$, dd. $c \doteq t \in \Gamma$ elde edilir ki bu göstermemiz gerekendir.

Önce her $\sigma \in \operatorname{Sav} L$ için

$$\Gamma \vdash \sigma \iff \mathfrak{A} \models \sigma$$

olduğunu, dd. $\operatorname{Bt} \Gamma = \operatorname{Th} \mathfrak{A}$ olduğunu kanıtlayacağız. Bunu formüller üzerinden tümevarımla kanıtlayacağız. $\sigma \in \operatorname{Sav} L$ olsun. Γ maksimal biçimsel tutarlı olduğundan $\Gamma \vdash \sigma \iff \sigma \in \Gamma$ olduğunu biliyoruz.

(i) σ formülü $s, t \in \operatorname{Tmc} L$ ile $t \doteq s$ olsun. c sabiti $c^* = t^{\mathfrak{A}}$ olacak biçimde seçilsin. (3.39)'dan $c \doteq t \in \Gamma$.

Şimdi $\sigma \in \Gamma$ varsayalım. Defalarca uygulanan yöntemle $\varepsilon_3(c, t, s)$ ve Γ'nın çıkarımsal kapalılığından $c \doteq s \in \Gamma$, buradan da (3.39) ile $c^* = s^{\mathfrak{A}}$ olur. Sonuçta $s^{\mathfrak{A}} = t^{\mathfrak{A}}$ elde ederiz ki bu $\mathfrak{A} \models s \doteq t$, dd. $\mathfrak{A} \models \sigma$ demektir.

Tersine $\mathfrak{A} \models \sigma$, dd. $\mathfrak{A} \models s \doteq t$ olsun. Bu durumda $c^* = t^{\mathfrak{A}} = s^{\mathfrak{A}}$ olur ve (3.39) ile $c \doteq s \in \Gamma$ olur.

(ii) Bir $R \in \mathcal{R}_n$ ve $t_1, \ldots, t_n$ kapalı terimleriyle $\sigma = R(t_1, \ldots, t_n)$ olsun. $c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{C}$ sabitleri $c_k^* = t_k^{\mathfrak{A}}$, $k = 1, \ldots, n$ olacak biçimde seçilsinler. Bu durumda her k için $c_k \doteq t_k \in \Gamma$.

$\mathfrak{A} \models \sigma$ olsun. Bu durumda elbette $\mathfrak{A} \models R(c_1, \ldots, c_n)$ olur. $R^{\mathfrak{A}}$'nın tanımından ((3.35)) $R(c_1, \ldots, c_n) \in \Gamma$, dolayısıyla $\Gamma \vdash R(c_1, \ldots, c_n)$ olur. $\Gamma \vdash$

$c_1 \dot{=} t_1 \curlywedge \cdots \curlywedge c_n \dot{=} t_n$ ve $\varepsilon_5\,(c_1, \ldots t_n, R)$'den $\Gamma \vdash R\,(c_1, \ldots, c_n) \to R(t_1, \ldots, t_n)$ elde edilir. Buradan (MP) ile $\Gamma \vdash R(t_1, \ldots, t_n)$, dd. $\Gamma \vdash \sigma$ bağıntısı kazanılır.

Şimdi $R\,(t_1, \ldots, t_n) \in \Gamma$ olsun. ε_5 üzerinden bu kez $R\,(c_1, \ldots, c_n) \in \Gamma$, dolayısıyla $(c_1^*, \ldots, c_n^*) \in R^{\mathfrak{A}}$, dd. $\mathfrak{A} \models R\,(c_1, \ldots, c_n)$. Buradan da $c_k^* = t_k^{\mathfrak{A}}$, $k = 1, \ldots, n$ olduğundan $\mathfrak{A} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ elde edilir.

(iii) $\sigma = \neg\tau$ olsun ve önerme τ için kanıtlanmış olsun. Bu durumda (3.14.16) ile

$$\mathfrak{A} \models \sigma \iff \mathfrak{A} \not\models \tau \iff \Gamma \not\vdash \tau \iff \Gamma \vdash \neg\tau \Longleftrightarrow \Gamma \vdash \sigma.$$

(iv) $\sigma = \tau \to \theta$, $\tau, \theta \in \operatorname{Sav} L$ ve önerme τ ve θ için kanıtlanmış olsun. Bu durumda

$$\mathfrak{A} \models \sigma \iff \mathfrak{A} \models \neg\tau \text{ veya } \mathfrak{A} \models \theta \iff \neg\tau \in \Gamma \text{ veya } \theta \in \Gamma$$
$$\overset{(3.14.16)}{\Longleftrightarrow} \tau \to \theta \in \Gamma \iff \Gamma \vdash \sigma.$$

(v) $\sigma = \dot{\forall} x \psi$, $\psi = \psi(x)$, $\operatorname{Sb} \psi = \{x\}$ ve her $c \in \mathcal{C}$ için $\mathfrak{A} \models \psi(c) \iff \Gamma \vdash \psi(c)$ kanıtlanmış olsun.

$$\mathfrak{A} \models \sigma \iff \text{Her } c \in \mathcal{C} \text{ için } \mathfrak{A} \models \psi(c) \overset{tvk}{\Longleftrightarrow} \text{Her } c \in \mathcal{C} \text{ için } \Gamma \vdash \psi(c).$$
$$\iff \text{Her } c \in \mathcal{C} \text{ için } \psi(c) \in \Gamma \iff \sigma \in \Gamma \iff \Gamma \vdash \sigma.$$

Sondan bir önceki denklikte (3.16.11) kullanılmıştır. Böylece $\operatorname{Bt} \Gamma = \operatorname{Th} \mathfrak{A}$ kanıtlanmıştır.

Şimdi her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ için $\varphi^{\dot{\forall}}$ bir sav olduğundan biraz önce kanıtlananla

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vdash \varphi^{\dot{\forall}} \iff \mathfrak{A} \models \varphi^{\dot{\forall}} \iff \mathfrak{A} \models \varphi$$

ve Γ çıkarımsal kapalı olduğundan $\varphi \in \Gamma \iff \Gamma \vdash \varphi \iff \varphi \in \operatorname{Dog} \mathfrak{A}$ olur.

$A = \mathcal{C}/\sim$ olduğundan elbette $|A| \leq |\mathcal{C}|$.

Sonucun kanıtı: (3.14.2)'de Γ'nın bir modeli varsa biçimsel tutarlı olduğunu kanıtladık. Şimdi Γ biçimsel tutarlı olsun. Γ biçimsel tutarlı kuramına karşılık, (3.16.14)'te olduğu gibi, Bir $L^* = L \cup \mathcal{C}'$ dili ve maksimal tutarlı bir Henkin $\Gamma^* \subseteq \operatorname{Fm} L^*$ kuramı $\Gamma \subseteq \Gamma^*$ olacak biçimde bulunabilir. Teoremimizden dolayı Γ^*'ın bir $\mathfrak{A}^* \in \operatorname{Yap} L^*$ modeli vardır. Ancak (L^*, Γ^*) biçimsel kuramı (L, Γ) kuramının bir tutucu genişlemesi olduğundan $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^* \restriction L \in \operatorname{Yap} L$ yapısı Γ'nın bir modelidir. ■

Bu teoremler, genelde savlarla çalışıldığından, karşımıza şu şekilde çıkarlar:

Teorem 3.16.18 Sav L*'de maksimal biçimsel her tutarlı* Σ *Henkin kuramının*

$$\mathrm{Bc}\,\Sigma = \mathrm{Dog}\,\mathfrak{A} \quad \textit{ve} \quad \Sigma = \mathrm{Bt}\,\Sigma = \mathrm{Th}\,\mathfrak{A}$$

koşullarını sağlayan bir $\mathfrak{A} \in \mathrm{Yap}\,L$ *modeli vardır.*

Sonuç 3.16.19 $\Sigma \subseteq \mathrm{Sav}\,L$ *biçimsel tutarlıdır* $\iff$ Γ*'nın bir modeli vardır.*

Kanıt. Kelimesi kelimesine (3.16.16) ve (3.16.17) teoremlerinin kanıtlarının aynıdır. ■

Teorem 3.16.20 (Gödel Tamlık Teoremi) $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}\,L$ *ve* $\varphi \in \mathrm{Fm}\,L$ *için*

$$\Gamma \Vdash \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi.$$

Kanıt. $\Gamma \Vdash \varphi$ olsun. Γ biçimsel tutarsızsa elbette $\Gamma \vdash \varphi$. Şimdi Γ'nın biçimsel tutarlı olduğunu varsayalım. $\varphi^{\dot\forall}$ bir sav olduğundan hiçbir modelde hem $\varphi^{\dot\forall}$ hem de $\neg\varphi^{\dot\forall}$ doğru olamaz. $\Gamma \Vdash \varphi$ olduğundan $\Gamma \Vdash \varphi^{\dot\forall}$. Bu nedenle $\Gamma \cup \{\neg\varphi^{\dot\forall}\}$'in bir modeli olamaz. (3.16.17)'den dolayı $\Gamma \cup \{\neg\varphi^{\dot\forall}\}$ biçimsel tutarsızdır. (3.14.10)(2)'den dolayı $\Gamma \vdash \varphi^{\dot\forall}$ ve buradan özelleştirme ile $\Gamma \vdash \varphi$. ■

Gödel'in Tamlık Teoremi, Doğruluk Teoremi ile birlikte **Birinci Dereceden Mantığın Ana Teoremi** diyeceğimiz aşağıdakini verir.

Teorem 3.16.21 (Ana Teorem) *Her* $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}\,L$ *ve her* $\varphi \in \mathrm{Fm}\,L$ *için*

$$\Gamma \Vdash \varphi \iff \Gamma \vdash \varphi.$$

Sonuç 3.16.22 $\mathcal{L} := (L, \emptyset) = (L, \Lambda_m)$ *birinci dereceden bir mantık olmak üzere* $\mathrm{Bc}\,\mathcal{L} = \mathrm{Dog}\,L$.

Kanıt. Her $\varphi \in \mathrm{Fm}\,L$ için: $\mathcal{L} \vdash \varphi \iff \vdash_L \varphi \iff \Vdash_L \varphi \iff \models_L \varphi \iff \varphi \in \mathrm{Dog}\,L$. ■

Bu teoremle birlikte şimdiye kadar titizlikle ayrı isimlendirdiğimiz anlamsal ve biçimsel kavramlarımız örtüşür. Bunlardan bazıları aşağıdadır:

Anlamsal	**Biçimsel**
$\Gamma \Vdash \varphi$ φ mantıksal olarak Γ'dan çıkar	$\Gamma \vdash \varphi$ φ biçimsel olarak Γ'dan çıkar
$\mathrm{Mc}\,\Gamma = \{\varphi \mid \Gamma \Vdash \varphi\}$ Γ'nın mantıksal çıkarım kümesi	$\mathrm{Bc}\,\Gamma = \{\varphi \mid \Gamma \vdash \varphi\}$ Γ'nın biçimsel çıkarım kümesi
$\Vdash \varphi$ φ mantıksal olarak doğrudur	$\vdash \varphi$ φ biçimsel kanıtlanabilir
$\Gamma \nVdash \bot$ Γ anlamsal tutarlı	$\Gamma \nvdash \bot$ Γ biçimsel tutarlı
$\sigma \in \mathrm{Sav}\,L$ ise $\Gamma \Vdash \sigma$ veya $\Gamma \Vdash \neg\sigma$ Γ anlamsal tam	$\sigma \in \mathrm{Sav}\,L$ ise $\Gamma \vdash \sigma$ veya $\Gamma \vdash \neg\sigma$ Γ biçimsel tam
$\varphi \equiv \psi$ φ ve ψ anlamsal denk	$\varphi \equiv_{\vdash} \psi$ φ ve ψ biçimsel denk

Önerme 3.16.23 *(3.16.17) ve (3.16.21) birbirine denktir, dd.* $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}\,L$ *olmak üzere aşağıdakiler denktir:*

1. Γ *biçimsel tutarlıdır* $\iff$ Γ*'nın bir modeli vardır.*
2. *Her* $\varphi \in \mathrm{Fm}\,L$ *için:* $\Gamma \Vdash \varphi \iff \Gamma \vdash \varphi$.

Kanıt. (1) $\implies$ (2) biraz önce kanıtlandı.

(2) $\implies$ (1): Γ biçimsel tutarlı $\implies$ $\Gamma \nvdash \varphi$ olacak biçimde bir $\varphi \in \mathrm{Fm}\,L$ vardır $\overset{vrş}{\implies}$ $\Gamma \nVdash \varphi$ $\implies$ Γ'nın bir $\mathfrak{A}$ modeli $\mathfrak{A} \not\models \varphi$ olacak biçimde vardır $\implies$ Γ'nın bir $\mathfrak{A}$ modeli vardır. Γ'nın bir modeli varsa (3.14.2)'den biliyoruz ki Γ biçimsel tutarlıdır. ■

Bundan sonra "φ mantıksal olarak Γ'dan çıkar" veya "φ biçimsel olarak Γ'dan çıkar" yerine kısaca "φ, Γ'dan çıkar" da diyeceğiz. Yine "Γ-biçimsel tutarlıdır" veya "Γ anlamsal tutarlıdır" yerine kısaca "Γ tutarlıdır" diyeceğiz. Bu yaklaşımı tüm diğer kavramlar için de sürdüreceğiz.

(3.16.16) teoreminde maksimal biçimsel tutarlı Γ için tanımladığımız $\mathfrak{A} = (A, L^{\mathfrak{A}})$ modeli için $A = \mathcal{C}^{\mathfrak{A}}$. L dilinin bu türden modellerine onun **kanonik modelleri** denir.

Not 3.16.24 (3.16.20)'nin kanıtında çoğu zaman $\mathcal{C}$ sabitler kümesi yerine $\mathrm{Tmc}\,L$ sabit terimler kümesinden yola çıkılır. Her iki yaklaşımında aynı kapıya çıktığını görelim. $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}\,L$ maksimal biçimsel tutarlı bir Henkin kuramı ve $L = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ olsun. $s, t \in \mathrm{Tmc}\,L$ olmak üzere

$$s \backsim' t :\iff \Gamma \vdash s \doteq t \iff s \doteq t \in \Gamma$$

açıklanan $\backsim$ bağıntısının $\mathrm{Tmc}\,L$'de bir denklik bağıntısı olduğu aynen $\backsim$'nin $\mathcal{C}$'de denklik bağıntısı olduğunun gösterildiği gibi gösterilir. Yukarıdaki son

denklik bilindiği gibi Γ'nın çıkarımsal kapalılığının sonucudur. Herhangi bir $t \in \operatorname{Tmc} L$ sabit teriminin $\backsim'$ bağıntısına göre denklik sınıfını t' ile gösterelim. $\mathfrak{A} = (A, L^{\mathfrak{A}})$ yapısı (3.16.20)'nin kanıtında tanımlanan L yapısı olsun. $A = \{c^* \mid c \in \mathcal{C}\}$ olduğunu biliyoruz. Şimdi bir başka L yapısı olan $\mathfrak{A}' = (A', L^{\mathfrak{A}'})$ yapısın benzer biçimde tanımlayacağız. $A' := \{t' \mid t \in \operatorname{Tmc} L\}$. Şimdi $R \in \mathcal{R}_n$ bağıntı imi ile $f \in \mathcal{F}_n$ fonksiyon imlerinin $\mathfrak{A}'$'deki yorumlarını tanımlayalım. $t'_1, \ldots, t'_n \in A'$ olmak üzere

$$\left(t'_1, \ldots, t'_n\right) \in R^{\mathfrak{A}'} :\iff \Gamma \vdash R(t_1, \ldots, t_n) \iff R\left(\overline{t_n}\right) \in \Gamma \tag{3.40}$$

$$f^{\mathfrak{A}'}(t'_1, \ldots, t'_n) := (f(t_1, \ldots, t_n))' \tag{3.41}$$

olarak tanımlanır. Bu tanımların kusursuz olduğu, dd. $s_1, \ldots, s_n \in \operatorname{Tmc} L$ olmak üzere $s_1 \backsim' t'_1$, …, $s_n \backsim' t_n$ ise

$$\begin{aligned} \Gamma \vdash R\left(s_1, \ldots, s_n\right) &\iff \Gamma \vdash R(t_1, \ldots, t_n) \text{ ve} \\ &(f(s_1, \ldots, s_n))' = (f(t_1, \ldots, t_n))' \end{aligned}$$

olduğu benzer biçimde kanıtlanır. Hatta f için kanıt bu kez daha kısadır; nedeni ise bu kez $t \in \operatorname{Tmc} L$ için $t^{\mathfrak{A}'} = c'$ olacak biçimde bir $c \in \mathcal{C}$ sabitinin varlığını kanıtlamak gerekmemektedir.

(3.16.20)'de $\Gamma = \operatorname{Dog} \mathfrak{A}$ olduğunu kanıtlamıştık. Şimdi ise $\Gamma = \operatorname{Dog} \mathfrak{A}'$ olduğunu, dd. her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ için $\varphi \in \Gamma \iff \varphi \in \operatorname{Dog} \mathfrak{A}'$ olduğunu savunuyoruz. (3.16.20)'nin kanıtında gösterdiğimiz gibi her $\sigma \in \operatorname{Sav} L$ için $\sigma \in \Gamma \iff \sigma \in \operatorname{Dog} \mathfrak{A}'$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunu FTK ile kanıtlayacağız. $\sigma \in \operatorname{Sav} L$ keyfi verilsin.

σ bir atomik sav ve $\sigma = (s \doteq t)$ savı olsun. Bu durumda $s \doteq t \in \operatorname{Dog} \mathfrak{A}' \iff s^{\mathfrak{A}'} = t^{\mathfrak{A}'} \iff s \backsim' t \iff \Gamma \vdash s \doteq t \iff s \doteq t \in \Gamma$. Şimdi $\sigma = R(t_1, \ldots, t_n)$ atomik savı olsun. Bu durumda $\sigma \in \operatorname{Dog} \mathfrak{A}' \iff (t'_1, \ldots, t'_n) \in R^{\mathfrak{A}'} \iff \Gamma \vdash R(t_1, \ldots, t_n) \iff R(t_1, \ldots, t_n) \in \Gamma \iff \sigma \in \Gamma$. FTK ile kanıtın kalan kısmı (3.16.20)'dekinin aynıdır.

$\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{A}'$ eşyapılıdır. Her şeyden önce $a, b \in \mathcal{C}$ için

$$a^* = b^* \iff a \backsim b \iff a \doteq b \in \Gamma \iff a \backsim' b \iff a' = b'.$$

Bu nedenle her $c^* \in A$ için $h(a^*) := a'$ ile gerçekten bir $h : A \to A'$ dönüşümü tanımlanmıştır ve bu dönüşüm birebirdir. Diğer yandan her $t \in \operatorname{Tmc} L$ için $c^* = t^{\mathfrak{A}}$ olacak biçimde c sabitlerinin varlığını kanıtladık. Ayrıca $c^* = t^{\mathfrak{A}} \iff c \doteq t \in \Gamma \iff c' = t'$ olduğundan $h(c^*) = t'$ olur; bu ise t keyfi seçildiğinden h dönüşümünün örten olması demektir. Böylece h dönüşümü bir tameşlemedir.

Şimdi $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ dönüşümünün $\mathfrak{A}$ yapısından $\mathfrak{A}'$ yapısına bir eşyapı dönüşümü olduğunu savunuyoruz. $a_1, \ldots, a_n \in A$ keyfi verilsinler ve $c_1, \ldots,$

$c_n \in L$ sabitleri her $i = 1, \ldots, n$ için $c_i^* = a_i$ olacak biçimde seçilsinler. Şimdi $f, R \in L$ ise sırasıyla bir n değişkenli fonksiyon imi ve n basamaklı bir bağıntı imi olsunlar. Bu durumda (3.40) ile

$$\begin{aligned} R^{\mathfrak{A}'}(h(a_1), \ldots, h(a_n)) &\iff R^{\mathfrak{A}'}(h(c_1^*), \ldots, h(c_n^*)) \iff R^{\mathfrak{A}'}(c_1', \ldots, c_n') \\ &\iff R(c_1, \ldots, c_n) \in \Gamma \iff R^{\mathfrak{A}}(c_1^*, \ldots, c_n^*) \\ &\iff R^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots a_n). \end{aligned}$$

Benzer biçimde a_i ve c_i'ler yukarıdaki gibi olsun. Bir c sabiti ile $c = f(c_1, \ldots, c_n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) &= h(f^{\mathfrak{A}}(c_1^*, \ldots, c_n^*)) = h(c^{\mathfrak{A}}) = h(c^*) \\ &= c' = (f(c_1, \ldots, c_n))' = f^{\mathfrak{A}'}(c_1', \ldots, c_n') \\ &= f^{\mathfrak{A}'} h((a_1), \ldots, h(a_n)) \end{aligned}$$

elde ederiz ve h tameşlemesi gömme olan bir yapı dönüşümü olur, dd. $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ bir eşyapı dönüşümüdür. ▲

Son olarak Γ biçimsel tutarlı ise bir modelinin olduğunun bir başka kanıtını vereceğiz. Yalınlık açısından $\Gamma \subset \operatorname{Sav} L$ ve $\mathcal{V}$ *sayılabilir* olsun. Bu durumda eğer $|L| = \kappa$ ise $|\operatorname{Fm} L| = |\operatorname{Sav} L| = \kappa$ olur. Biz bu durumda gücü κ olan herhangi A kümesi verildiğinde Γ'nın evreni bir $A' \subseteq A$ olan bir modelinin olduğunu kanıtlayacağız.

A gücü κ olan herhangi bir küme olsun. L dilinden L_A diline geçeceğiz. $|L_A| = \kappa$ olacağından

$$|\operatorname{Fm} L_A| = |\operatorname{Sav} L_A| = \left|\Phi_s^1(L_A)\right| = \kappa$$

olur. $\Phi_s^1(L_A)$ kümesini, her bir öğesi κ kez geçmek üzere $(\varphi_\alpha)_{1 \le \alpha < \kappa}$ olarak sıralayalım. φ_a'nın serbest değişkenini x_α olarak gösterelim ve $\tau_a := \dot{\exists} x_\alpha \varphi_a$ olsun. A kümesini bir biçimde iyi sıralansın ve $\operatorname{Sav} L_A$ kümesini ise $(\sigma_a)_{\alpha < \kappa}$ olarak iyi sıralayalım. Elimizde

$$\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_\xi < \cdots, \quad \xi < \kappa \tag{3.42}$$

$$\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \cdots < \tau_\xi < \cdots, \quad \xi < \kappa \tag{3.43}$$

dizilerimiz var; bir farkla ki ilk dizide her bir σ savı tam bir kez geçerken, ikinci dizideki, $\dot{\exists} x \varphi$ tipinde olan savlarımızın her biri κ kez geçiyor.

Teorem 3.16.25 *$\mathcal{V}$ sayılabilir olmak üzere $|L| = \kappa$ ve $\Gamma \subseteq \operatorname{Sav} L$ biçimsel tutarlı olsun. Bize $|A| = \kappa$ olan herhangi bir küme verildiğinde Γ'nın evreni bir $A' \subseteq A$ olan bir $\mathfrak{A} = (A', L^{\mathfrak{A}})$ modeli vardır.*

Kanıt. $|A| = \kappa$ olan bir A kümesi verilsin. Yukarıda belirttiğimiz gibi A kümesi iyi sıralasın ve (3.42) ve (3.43) dizileri oluşturulsun. $\mathcal{K} := (L, \Gamma)$ olsun.

Şimdi sonluötesi tümevarımla, biçimsel tutarlı $\Gamma_\alpha \subset \operatorname{Sav} L_A$ kümelerini tanımlayacağız. $\Gamma_0 := \Gamma$ olarak açıklanır. $\beta \in \kappa$ için Γ_β tanımlanmş ve biçimsel tutarlı olsun.

$$\Delta_\beta := \begin{cases} \Gamma_\beta \cup \{\sigma_\beta\}, & \text{eğer } \Gamma_\beta \nvdash \neg\sigma_\beta \\ \Gamma_\beta, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

$\Delta_\beta \nvdash \tau_{\beta+1}$ ise $\Gamma_{\beta+1} := \Delta_\beta$. Eğer $\Delta_\beta \vdash \tau_{\beta+1}$ ise

$$\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_\beta, \tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{\beta+1} \tag{3.44}$$

formül dizisinde geçmeyen $\mathbf{a}$ imlerine odaklanacağız. $\beta \in \kappa$ olduğundan $\beta < \kappa$ ve κ bir güç sayısı olduğundan $|\beta| < \kappa$. Diğer yandan her bir formül ancak sonlu sayıda $\mathbf{A}$ kümesinin öğesini içereceğinden bu kümenin (3.44) dizisinde geçmeyen öğeleri vardır. Dolayısıyla

$$a_{\beta+1} := \min \{a \in A \mid \mathbf{a} \text{ (3.44)'te geçmez } \}$$

tanımı kusursuzdur ve biz $\Delta_\beta \vdash \tau_{\beta+1}$ durumunda

$$\Gamma_{\beta+1} = \Delta_\beta \cup \{\varphi_{\beta+1}(\mathbf{a}_{\beta+1})\} \tag{3.45}$$

olarak açıklıyoruz; elbette okur artık $\mathbf{a}_{\beta+1}$'nın $\tau_{\beta+1}$ savının bir Henkin tanığı olduğunu biliyordur. Son olarak $\beta \in \kappa$ bir limit sıra sayısı ve her $\alpha < \beta$ için Γ_α tanımlanmışsa

$$\begin{aligned} \Gamma_\beta &:= \cup_{\alpha<\beta}\Gamma_\alpha, \qquad \beta \text{ limit sıra sayısı} \\ \Gamma_\kappa &:= \cup_{\alpha<\kappa}\Gamma_\alpha \end{aligned}$$

olarak açıklansın.

(i) : Γ_κ *kümesi* $\operatorname{Sav} L_A$*'de maksimal biçimsel tutarlı ve biçimsel tam Henkin kuramıdır.* Her şeyden önce $(\Gamma_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ dizisi $\subseteq$ bağıntısına göre monotondur. Önce sonlu ötesi tümevarımla her $\beta < \kappa$ için Γ_β'nın biçimsel tutarlı olduğunu görelim; o durumda Γ_κ'nın biçimsel tutarlı olacağı apaçıktır.

Varsayımdan dolayı $\Gamma_0 = \Gamma$ biçimsel tutarlıdır. $\beta < \kappa$ için Γ_β'nın biçimsel tutarlı olduğu kanıtlanmış olsun. Δ_β'nın tanımı ve (3.14.10)(3)'ten Δ_β biçimsel tutarlıdır. $\Gamma_{\beta+1} = \Delta_\beta$ durumunda elbette $\Gamma_{\beta+1}$ de biçimsel tutarlıdır. Diğer durumda $\Delta_\beta \vdash \tau_{\beta+1}$ durumundayız. Δ_β biçimsel tutarlı olduğundan $\Delta_\beta \nvdash \neg\tau_{\beta+1}$ ve yine (3.14.10)(3)'ten $\Delta_\beta \cup \{\tau_{\beta+1}\}$ biçimsel tutarlıdır. Buradan ise (3.16.7) ile $\Gamma_{\beta+1} = \Delta_\beta \cup \{\varphi_{\beta+1}(\mathbf{a}_{\beta+1})\}$ biçimsel tutarlıdır. Eğer

$\beta \in \kappa$ bir limit sıra sayısı ve her $\alpha < \beta$ için Γ_α biçimsel tutarlı ise elbette Γ_β biçimsel tutarlıdır; çünkü herhangi bir $\Gamma_\beta \vdash \bot$ çıkarımı sonlu sayıda formül içerdiğinden aslında bir $\alpha < \beta$ ile $\Gamma_\alpha \vdash \bot$ çıkarımıdır ki bu Γ_α'nın biçimsel tutarlılığıyla çelişir. Aynı mantıkla Γ_κ biçimsel tutarlıdır.

Şimdi Γ_κ'nın $\operatorname{Sav} L_A$'de maksimal biçimsel tutarlı olduğunu görelim. $\sigma \in \operatorname{Sav} L_A \backslash \Gamma_\kappa$ olsun. Bir $\beta \in \kappa$ ile $\sigma = \sigma_\beta$ olacaktır. Δ_β'nın tanımından $\Gamma_\beta \vdash \neg\sigma$ olacağından $\Gamma_\kappa \cup \{\sigma\} \vdash \sigma, \neg\sigma$ olur, dolayısıyla $\Gamma_\kappa \cup \{\sigma\}$ biçimsel tutarsızdır.

Şimdi $\sigma \in \operatorname{Sav} L_A$ keyfi verilsin ve $\sigma = \sigma_\beta$ olsun; ya $\sigma \in \Delta_\beta \subseteq \Gamma_\kappa$ ve dolayısıyla $\Gamma_\kappa \vdash \sigma$, ya da $\sigma \notin \Delta_\beta$ ve $\Gamma_\beta \vdash \neg\sigma$ ve dolayısıyla $\Gamma_\kappa \vdash \neg\sigma$ ve σ keyfi seçildiğinden Γ_κ biçimsel tamdır.

Şimdi Γ_κ'nın bir Henkin kuramı olduğunu görelim. $\varphi(x) \in \Phi_s^1(L_A)$ ve $\Gamma_\kappa \vdash \dot{\exists} x\varphi(x)$ olsun. Bir $\alpha < \kappa$ ile $\Delta_a \vdash \dot{\exists} x\varphi(x)$ olacaktır. $\tau := \dot{\exists} x\varphi(x)$ savı (3.43) dizisinde κ kez geçtiğinden bir β sırasayısı $\alpha \leq \beta < \kappa$, $\tau = \tau_{\beta+1}$ ve $\Delta_\beta \vdash \tau_{\beta+1}$ olacak biçimde bulunabilir. Dolayısıyla $\Delta_\beta \cup \{t_{\beta+1}\}$ biçimsel tutarlıdır, buradan ise (3.45) ile $\varphi(\mathbf{a}_{\beta+1}) \in \Gamma_{\beta+1} \subseteq \Gamma_\kappa$. Dolayısıyla $\mathbf{a}_{\beta+1} \in L_A$ sabit imi τ'nın bir tanığıdır. $\mathcal{K}_\kappa := (L_A, \Gamma_\kappa)$ kuramı olsun.

(ii) : A' *kümesinin tanımı:* A kümesinde bir $\sim$ bağıntısı her $a_1, a_2 \in A$ için

$$a_1 \sim a_2 :\Longleftrightarrow \Gamma_\kappa \vdash \mathbf{a}_1 \doteq \mathbf{a}_2$$

ile açıklansın. $\sim$ bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğu aynen (3.16.16)'nın kanıtında olduğu gibi gösterilir. Bir $f : A \to A$ fonksiyonu her $a \in A$ için

$$a' = f(a) := \min \{b \in A \mid b \sim a\}$$

olarak açıklansın ve $A' := f(A)$ olsun. Bu A' kümesi Γ'nın bir modelinin evreni olacaktır.

(iii) : $\mathcal{K}'_\kappa := (L_{A'}, \Gamma'_\kappa)$ *kuramının tanımı:* Her $\varphi \in \operatorname{Fm} L_A$ formülüne bir $\varphi' \in \operatorname{Fm} L_{A'}$ formülü karşılık getireceğiz: φ'de geçen her $\mathbf{a}$ sabit imi yerine geçtiği her yerde $\mathbf{a}'$ yazarak φ' formülünü elde edeceğiz. Her $a' \in A'$ için elbette $a' \sim a$ ve $a'' := f(a') = a'$ olduğundan

$$\forall \varphi \in \operatorname{Fm} L_{A'} : \varphi' = \varphi$$

olduğu aşikârdır.

$$\Gamma'_\kappa := \left\{\sigma' \mid \sigma \in \Gamma_\kappa\right\} \tag{3.46}$$

olsun.

(iv) : *Her* $\varphi \in \operatorname{Fm} L_A$ *için*

$$\mathcal{K}_\kappa \vdash \varphi \Longrightarrow \mathcal{K}'_\kappa \vdash \varphi'. \tag{3.47}$$

(a) Bu her $\varphi \in \Gamma_\kappa$ için (3.46)'dan dolayı doğrudur. (b) Şimdi $\varphi, \psi \in \operatorname{Fm} L_A$ olmak üzere savımız $\varphi, \varphi \to \psi$ formülleri için kanıtlanmış olsun, dd. $\mathcal{K}_\kappa \vdash \varphi$ ise $\mathcal{K}'_\kappa \vdash \varphi'$ ve $\mathcal{K}_\kappa \vdash \varphi \to \psi$ ise $\mathcal{K}'_\kappa \vdash \varphi' \to \psi'$ olsun. Buradan da (MP) ile $\mathcal{K}_\kappa \vdash \psi$ ise $\mathcal{K}'_\kappa \vdash \psi'$ olur ve savımız ψ için de kanıtlanmıştır. (c) Şimdi savımız φ için kanıtlanmış olsun, dd. $\mathcal{K}_\kappa \vdash \varphi$ ise $\mathcal{K}'_\kappa \vdash \varphi'$. Buradan (Gen) ile $\mathcal{K}_\kappa \vdash \dot\forall x\varphi$ ise $\mathcal{K}'_\kappa \vdash \dot\forall x\varphi'$ elde edilir. Böylece sav φ için kanıtlanmışsa $\forall x\varphi$ içinde kanıtlanmıştır. Böylece FTK ile sav her $\varphi \in \operatorname{Fm} L_A$ için kanıtlanmış olur.

(*v*) $\mathcal{K}_\kappa = (L_A, \Gamma_\kappa)$ *kuramı* $\mathcal{K}'_\kappa = (L_{A'}, \Gamma'_\kappa)$ *kuramının bir tutucu genişlemesidir:* $\Gamma_\kappa \vdash \mathbf{a}\dot= \mathbf{a}'$ olduğundan (3.13.7) ayırt edilmezlik teoremiyle her $\varphi \in \operatorname{Fm} L_A$ için

$$\mathcal{K}_\kappa \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$$

elde edilir. Bu ve Γ'_κ'nın tanımından $\mathcal{K}_\kappa \vdash \Gamma'_\kappa$ ve dolayısıyla $\mathcal{K}'_\kappa \le \mathcal{K}_\kappa$ olur. Ayrıca $\varphi \in \operatorname{Fm} L_{A'}$ için $\varphi = \varphi'$ olduğunu ve (3.47)'yi gözetirsek $\mathcal{K}_\kappa$ kuramı $\mathcal{K}'_\kappa$ kuramının bir tutucu genişlemesidir.

(*vi*) $\mathcal{K}'_\kappa = (L_{A'}, \Gamma'_\kappa)$ *biçimsel tutarlı ve biçimsel tam Henkin kuramıdır ve* Γ'_κ *kuramı* $\operatorname{Sav} L_A$*'de maksimal biçimsel tutarlıdır:* $\mathcal{K}_\kappa$ biçimsel tutarlı ve $\mathcal{K}'_\kappa \le \mathcal{K}_\kappa$ tutucu genişleme olduğundan $\mathcal{K}'_\kappa$ biçimsel tutarlıdır.

$\sigma \in \operatorname{Sav} L_{A'}$ keyfi verilsin. Elbette aynı zamanda $\sigma \in \operatorname{Sav} L_A$ olacağından (*i*)'den $\mathcal{K}_\kappa \vdash \sigma$ veya $\mathcal{K}_\kappa \vdash \neg\sigma$ ve buradan ise (*iv*) ile $\sigma' = \sigma$ olduğunu da gözetirsek $\mathcal{K}'_\kappa \vdash \sigma$ veya $\mathcal{K}'_\kappa \vdash \neg\sigma$ elde ederiz, böylece $\mathcal{K}'_\kappa$ biçimsel tamdır.

$\sigma \in \operatorname{Sav} L_{A'} \backslash \Gamma'_\kappa$ olsun. (*ii*)'deki irdelemelerden $\Gamma_\kappa \vdash \neg\sigma$ ve buradan da (3.47) ile $\Gamma'_\kappa \vdash \neg\sigma$ olur ($\sigma' = \sigma$!). Dolayısıyla $\Gamma'_\kappa \cup \{\sigma\}$ biçimsel tutarsızdır. Bu Γ'_κ'nın $\operatorname{Sav} L_{A'}$'de maksimal biçimsel tutarlı olduğunu kanıtlar.

Şimdi $\varphi \in \Phi^1_s(L_{A'})$ ve $\mathcal{K}'_\kappa \vdash \dot\exists x_\varphi\varphi$ olsun. $\psi := \dot\exists x_\varphi\varphi$ olmak üzere $\mathcal{K}'_\kappa \le \mathcal{K}_\kappa$ olduğundan $\mathcal{K}_\kappa \vdash \psi$. (*i*)'den dolayı bir $\mathbf{a}$ ile $\mathcal{K}_\kappa \vdash \varphi(\mathbf{a})$,dolayısıyla (*iv*) ile $\mathcal{K}'_\kappa \vdash \varphi'(\mathbf{a}')$ ve $\varphi' = \varphi$ olduğundan $\mathcal{K}'_\kappa \vdash \varphi(\mathbf{a}')$ olur; ψ'nin A''de bir tanığı vardır. Böylece $\mathcal{K}'_\kappa$ bir Henkin kuramıdır.

(*vii*) $\mathcal{K}'_\kappa$ *kuramı* A'*'nün noktalarını ayırır, dd.* $a, b \in A'$ *ve* $a \ne b$ *ise* $\mathcal{K}'_\kappa \vdash \neg(\mathbf{a}\dot= \mathbf{b})$: $a, b \in A'$ ve $a \ne b$ olsun. $\mathcal{K}'_\kappa \nvdash \neg(\mathbf{a}\dot= \mathbf{b})$ olduğunu varsayalım. $\sigma = (\mathbf{a}\dot= \mathbf{b}) \in \operatorname{Sav} L_{A'}$ ve $\mathcal{K}'_\kappa$ biçimsel tam olduğundan $\mathcal{K}'_\kappa \vdash \mathbf{a}\dot= \mathbf{b}$ olur. (*v*)'ten $\mathcal{K}_\kappa \vdash \mathbf{a}\dot= \mathbf{b}$ elde ederiz; dolayısıyla $a \sim b$ elde ederiz. Buradan $f(a)$'nın tanımı ve minimal öğenin tekliğinden $a = b$ elde edilir ve bu varsayımımızla çelişir.

(*viii*) $\mathfrak{A}' = \left(A', L^{\mathfrak{A}'}_{A'}\right)$ *yapısının tanımı:* Her şeyden önce L_A ve $L_{A'}$ dilleri L diline yalnızca yeni sabit imleri eklenerek elde edildiklerinden, bu dillerin fonksiyon ve bağıntı imleri L dilinin fonksiyon ve bağıntı imleriyle örtüşürler. Şimdi $P \in \mathcal{R}_n$ keyfi verilsin.

$$P^{\mathfrak{A}'} := \left\{(a_1, \dots, a_n) \in A'^n \,|\, \mathcal{K}'_\kappa \vdash P\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n\right\} \tag{3.48}$$

olsun.

Şimdi $f \in \mathcal{F}_n$ olsun ve $(a_1, \ldots, a_n) \in A'^n$ keyfi verilsin. $f^{\mathfrak{A}'}(a_1, \ldots, a_n)$ ne olmalıdır? $\mathcal{K}'_\kappa \vdash \dot{\exists} x\,(f\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n \doteq x)$ olduğu (3.16.16)'nın kanıtında olduğu gibi gösterilir. (vi)'dan dolayı bir $b \in A'$ ile

$$\mathcal{K}'_\kappa \vdash f\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n \doteq \mathbf{b} \tag{3.49}$$

olur. Şimdi bu $b \in A'$ öğesinin *tek* olarak belirli olduğunu kanıtlayacağız. Bir $c \in A'$ ile $\mathcal{K}'_\kappa \vdash f\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n \doteq \mathbf{c}$ olduğunu varsayalım. Eşitlik İlksavlarından $\mathcal{K}'_\kappa \vdash \mathbf{b} \doteq \mathbf{c}$ olacaktır. $\mathcal{K}'_\kappa$ kuramı biçimsel tutarlı olduğundan $\mathcal{K}'_\kappa \nvdash \neg(\mathbf{b} \doteq \mathbf{c})$; buradan ise (vii) ile $b = c$ elde edilir. Dolayısıyla

$$f^{\mathfrak{A}'}(a_1, \ldots, a_n) = b \tag{3.50}$$

tanımı kusursuzdur.

Şimdi $L_{A'}$ dilinin bir $d \in \mathcal{C} \sqcup \mathbf{A}'$ sabiti verilsin. Bu kez $\dot{\exists} x\,(d \doteq x)$ savından yola çıkarak yukarıda olduğu gibi *tek* olarak belirli bir $a \in A'$ ile

$$\mathcal{K}'_\kappa \vdash d \doteq \mathbf{a} \tag{3.51}$$

olduğu kanıtlanır ve biz $d^{\mathfrak{A}'} := a$ olarak tanımlıyoruz. Elbette her $\mathbf{a} \in \mathbf{A}'$ için $\mathcal{K}'_\kappa \vdash \mathbf{a} \doteq \mathbf{a}$ olduğundan her $\mathbf{a} \in \mathbf{A}'$ için $\mathbf{a}^{\mathfrak{A}'} = a$ olacaktır.

(ix) : *Her* $t \in \operatorname{Tmc} L_{A'}$ *kapalı terimi için*

$$\mathcal{K}'_\kappa \vdash t \doteq \mathbf{t}^{\mathfrak{A}'} \tag{3.52}$$

Burada $t^{\mathfrak{A}'} = a \in A'$ ise $\mathbf{t}^{\mathfrak{A}'}$ ile $\mathbf{a}$ sabit imini kast ediyoruz. Eğer $t = d$ sabit imi ise (3.51) tam da $\mathcal{K}'_\kappa \vdash d \doteq \mathbf{d}^{\mathfrak{A}'}$ demektir.

Şimdi bir $f \in \mathcal{F}_n$ ve $t_1, \ldots, t_n \in \operatorname{Tmc} L_{A'}$ ile $t = ft_1 \cdots t_n$ olsun ve sav $t_1, \ldots t_n$ için kanıtlanmış olsun, dd. $t_i^{\mathfrak{A}'} =: a_i \in A'$ olmak üzere $\mathcal{K}'_\kappa \vdash t_i \doteq \mathbf{a}_i$, $1 \leq i \leq n$. Tanım gereği

$$t^{\mathfrak{A}'} = f^{\mathfrak{A}'}(t_1^{\mathfrak{A}'}, \ldots, t_n^{\mathfrak{A}'}) = f^{\mathfrak{A}'}(a_1, \ldots, a_n) =: b,\ b \in A'.$$

(3.49) ve (3.50)'den

$$\mathcal{K}'_\kappa \vdash f\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n \doteq \mathbf{b} \quad , \quad \mathbf{b} = \mathbf{t}^{\mathfrak{A}'}$$

$1 \leq i \leq n$ için $\mathcal{K}'_\kappa \vdash t_i \doteq \mathbf{a}_i$ olduğundan Eşitlik İlksavları'ndan

$$\mathcal{K}'_\kappa \vdash ft_1 \cdots t_n \doteq f\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n$$

ve dolayısıyla $\mathcal{K}'_\kappa \vdash ft_1 \cdots t_n \doteq \mathbf{b}$, dd. $\mathcal{K}'_\kappa \vdash t \doteq \mathbf{t}^{\mathfrak{A}'}$ elde ederiz.

(x) : *Her* $\sigma \in \operatorname{Sav} L_{A'}$ *için* $\mathfrak{A}' \models \sigma \iff \mathcal{K}'_\kappa \vdash \sigma$: FTK ile kanıtlayacağız.

$s,t \in \operatorname{Tmc} L_{A'}$ olmak üzere σ savı $s\dot{=}t$ olsun. $a,b \in A'$ ve $s^{\mathfrak{A}'} = a$ ve $t^{\mathfrak{A}'} = b$ olsun. (3.52)'den

$$\mathcal{K}'_\kappa \vdash s\dot{=}\mathbf{a} \text{ ve } \mathcal{K}'_\kappa \vdash t\dot{=}\mathbf{b}$$

olduğundan

$$\mathfrak{A}' \models s\dot{=}t \Longleftrightarrow s^{\mathfrak{A}'} = t^{\mathfrak{A}'} \Longleftrightarrow a = b \Longleftrightarrow \mathcal{K}' \vdash \mathbf{a}\dot{=}\mathbf{b} \Longleftrightarrow \mathcal{K}' \vdash s\dot{=}t$$

elde ederiz; sağdan birinci denklikte Yerine Koyma Teoremi, sağdan ikinci denklikte ise (vii) kullanılmıştır.

Şimdi $\sigma = Pt_1 \cdots t_n$, $P \in \mathcal{R}_n$ ve $t_1, \ldots, t_n \in \operatorname{Tmc} L_{A'}$ olsun. $a_i := t_i^{\mathfrak{A}'}$ olmak üzere (3.52)'den $\mathcal{K}'_\kappa \vdash t_i\dot{=}\mathbf{a}_i$ olur. Buradan yerine koymalar ve $P^{\mathfrak{A}'}$'nün (3.48) tanımından

$$\mathfrak{A}' \models \sigma \Longleftrightarrow (a_1, \ldots, a_n) \in P^{\mathfrak{A}'} \Longleftrightarrow \mathcal{K}'_\kappa \vdash P\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n \Longleftrightarrow \mathcal{K}'_\kappa \vdash Pt_1 \cdots t_n$$

elde edilir.

Şimdi $\sigma = \neg\tau$ ve sav τ için kanıtlanış olsun (tvk). Bu durumda $\mathfrak{A}' \models \sigma \Longleftrightarrow \mathfrak{A}' \not\models \tau \overset{tvk}{\Longleftrightarrow} \mathcal{K}'_\kappa \not\vdash \tau \Longleftrightarrow \mathcal{K}'_\kappa \vdash \neg\tau \Longleftrightarrow \mathcal{K}'_\kappa \vdash \sigma$.

Şimdi $\rho, \tau \in \operatorname{Sav} L_{A'}$ olmak üzere $\sigma = \rho \to \tau$ olsun ve savımız ρ ve τ için kanıtlanmış olsun (tvk). Savlar bildik davranışları sergilediklerinden $\mathfrak{A}' \models \sigma \Longleftrightarrow \mathfrak{A}' \models \rho$ ise $\mathfrak{A}' \models \tau \overset{tvk}{\Longleftrightarrow} \mathcal{K}'_\kappa \vdash \rho$ ve $\mathcal{K}'_\kappa \vdash \tau \Longleftrightarrow \mathcal{K}'_\kappa \vdash \rho \to \tau \Longleftrightarrow \mathcal{K}'_\kappa \vdash \sigma$.

Şimdi $\sigma = \dot{\forall} x\varphi$ ve $\varphi \in \Phi^1_s(L_{A'})$ olsun. Ayrıca her $a \in A'$ için $\mathfrak{A}' \models \varphi\,[a] \Longleftrightarrow \mathcal{K}'_\kappa \vdash \varphi\,(\mathbf{a})$ kanıtlanmış olsun (tvk). (3.16.11) ile

$$\mathfrak{A}' \models \sigma \Longleftrightarrow \forall a \in A'(\mathfrak{A}' \models \varphi\,[a]) \overset{tvk}{\Longleftrightarrow} \forall a \in A'(\mathcal{K}'_\kappa \vdash \varphi(\mathbf{a}))$$

Γ'_κ maksimal biçimsel tutarlı olduğundan çıkarımsal kapalıdır, dolayısıyla

$$\forall a \in A'(\mathcal{K}'_\kappa \vdash \varphi(\mathbf{a})) \Longleftrightarrow \forall a \in A'\left(\varphi(\mathbf{a}) \in \Gamma'_\kappa\right)$$

$\mathcal{C}' := \mathcal{C} \sqcup \mathcal{A}'$ olmak üzere her $d \in \mathcal{C}'$ için $d^{\mathfrak{A}'} = a$ ise $\Gamma'_k \vdash d\dot{=}\mathbf{a}$ olduğunu biliyoruz, dolayısıyla (3.16.11) ile

$$\forall a \in A'\left(\varphi(\mathbf{a}) \in \Gamma'_\kappa\right) \Longleftrightarrow \forall d \in \mathcal{C}'\ \left(\varphi(d) \in \Gamma'_\kappa\right) \Longleftrightarrow \Gamma'_\kappa \vdash \dot{\forall} x\varphi$$

olur.

$\mathfrak{A}' = (A', L^{\mathfrak{A}'}_{A'})$ yapısı $\mathcal{K}'_\kappa = (L_{A'}, \Gamma'_\kappa)$ kuramının bir modelidir. $L \subseteq L_{A'}$ ve $\Gamma \subseteq \Gamma'_\kappa$ olduğundan $\mathfrak{A} := \mathfrak{A}' \restriction L$ yapısı $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramının bir modelidir. ■

3.17 Gödel Tamlık Teoremi'nin Basit Sonuçları

Teorem 3.17.1 (Gödel Kompaktlık Teoremi) $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$*'nin bir modeli olması için gerek ve yeter koşul her sonlu* $\Delta \subseteq \Gamma$*'nın bir modeli olmasıdır.*

Kanıt. $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ keyfi verilsin: Γ'nın modeli vardır $\iff$ Γ biçimsel tutarlıdır. $\iff$ Her sonlu $\Delta \subseteq \Gamma$ biçimsel tutarlıdır $\iff$ Her sonlu $\Delta \subseteq \Gamma$'nın bir modeli vardır. Burada ilk ve son denklikte Gödel Tamlık Teoremi kullanılmıştır. ■

Not 3.17.2 Kompaktlık Teoremi'ni Gödel Tamlık Teoremi üzerinden kanıtladık. Gödel Tamlık Teoremi biçimsel kanıt gibi biçimsel kavramlar kullanır. Ancak Kompaktlık Teoremi özünde bir anlamsal teoremdir. Dolayısıyla hiçbir biçimsel kavram kullanmadan da kanıtlanabilmelidir. Gerçekten de önermeler mantığının kompaktlık teoreminin böyle bir kanıtını verdik. Birinci dereceden mantığın kompaktlık teoreminin, dd. (3.17.1)'in de hiçbir biçimsel kavram ve yöntem kullanmayan içeriksel kanıtları vardır. ▲

Not 3.17.3 $\Gamma \Vdash \varphi \iff \Gamma \vdash \varphi$ denkliği daha önce biçimsel çıkarımlara ilişkin verdiğimiz bazı kanıtların başka ve daha izlenebilir kanıtlarını vermemizi sağlar. Örnek oluşturmak üzere Sabitler Teoremi'ni yeniden kanıtlayalım:

Yeni Sabitler Teoremi: *L diline kendisinde olmayan birbirinden farklı $d_1, \ldots, d_n$ yeni sabitleri eklenerek L' dili elde edilsin.* $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$, $\varphi \in \operatorname{Fm} L$, $\operatorname{Sb} \varphi = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ *ve* $\mathcal{K}' = (L', \Gamma)$ *olmak üzere*

$$\mathcal{K}' \vdash \varphi(d_1, \ldots, d_n) \Longrightarrow \mathcal{K} \vdash \dot{\forall} x_1, \ldots, x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

Bunu kanıtlamak için

$$\mathcal{K}' \Vdash \varphi(d_1, \ldots, d_n) \Longrightarrow \mathcal{K} \Vdash \dot{\forall} x_1, \ldots, x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

olduğunu görmek yeterlidir. $\mathcal{K}$ kuramının bir $\mathfrak{A}$ modeli keyfi verilsin ve $a_1, \ldots, a_{a_n} \in A$ keyfi seçilsinler. $d_k^{\mathfrak{A}'} := a_k$ açılayarak bu modeli $\mathcal{K}'$ kuramının $\mathfrak{A}'$ modeline yükseltelim. $\mathcal{K}' \Vdash \varphi\left(\overline{d_n}\right)$ olduğundan $\mathfrak{A}' \models \varphi\left(\overline{a_n}\right)$ olur ve φ yeni sabitleri içermediğinden buradan $\mathfrak{A} \models \varphi\left(\overline{a_n}\right)$ elde ederiz. $a_1, \ldots, a_{a_n} \in A$ keyfi seçildiklerinden $\mathfrak{A} \models \varphi \dot{\forall} x_1, \ldots, x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ olur ve işimiz biter. ▲

Teorem 3.17.4 (Sonluluk Teoremi) $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ *ve* $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ *için* $\Gamma \Vdash \varphi$ *ise sonlu bir* $\Delta \subseteq \Gamma$ *altkümesi* $\Delta \Vdash \varphi$ *olacak biçimde bulunabilir, dd.* φ *formülü* Γ *formüllerinden mantıksal olarak çıkıyorsa* sonlu *bir* $\Delta \subseteq \Gamma$*'dan da mantıksal olarak çıkar.*

Kanıt. (3.16.20) Gödel Tamlık Teoremi'nden $\Gamma \Vdash \varphi$ ise $\Gamma \vdash \varphi$. Biçimsel sonluluk teoreminden sonlu bir $\Delta \subseteq \Gamma$ altkümesi $\Delta \vdash \varphi$ olacak biçimde bulunabilir. Doğruluk Teoremi'nden ise $\Delta \Vdash \varphi$ olur. ■

Bir Γ kuramına, her m doğal sayısına karşılık $n \geq m$ olacak biçimde bir n doğal sayısı ve Γ kuramının n öğeli bir modeli bulunabiliyorsa, **istenildiği kadar büyük sonlu modelleri vardır** diyelim.

Teorem 3.17.5 *İstenildiği kadar büyük sonlu modelleri olan her Γ kuramının sonsuz modelleri de vardır.*

Kanıt. $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ kuramının istenildiği kadar büyük sonlu modelleri olsun. L diline kendisinde olmayan yeni $c_0, c_1, c_2, \ldots$ sabitlerini ekleyerek $L' := L \cup \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ diline ve Γ kuramına ise $\Sigma := \{\neg c_m \doteq c_n \mid m \neq n,\ m, n \in \mathbb{N}\}$ ilksavlarını ekleyerek $\Gamma' := \Gamma \cup \Sigma \subseteq \operatorname{Fm} L'$ kuramına geçelim.

Önce Γ' kuramının bir $\mathfrak{A}' \in \operatorname{Yap} L'$ modelinin olduğunu kanıtlayacağız. Bunun içinse Kompaktlık Teoremi'nden dolayı her sonlu $\Delta' \subseteq \Gamma'$'nün bir modeli olduğunu göstermek yeterlidir. Şimdi $\Delta' \subseteq \Gamma'$ sonlu olsun. Δ' formüllerinde geçen yeni c_j sabitlerimiz sonludur, bunların sayısı m olsun. Varsayımımızdan dolayı Γ kuramının bir $n \geq m$ için n öğeli bir $\mathfrak{B} \in \operatorname{Yap} L$ modeli vardır. $\mathfrak{B}$ yapısını bir $\mathfrak{B}' \in \operatorname{Yap} L'$ yapısına yükselteceğiz. Bunun içinse yeni c_j sabitlerinin $c_j^{\mathfrak{B}'}$ yorumlarını vermek yeterlidir. $B = |\mathfrak{B}| = |\mathfrak{B}'|$ olacak. Δ''de geçen farklı c_j sabitlerinin yorumlarını B kümesinin farklı öğeleri olarak seçeceğiz. $n \geq m$ olduğundan bunu yapabiliriz. Diğer yeni c_j sabitlerinin yorumu istenildiği gibi seçilir. $\mathfrak{B}'$'nün Δ'nün bir modeli olduğu apaçıktır.

Kompaktlık Teoremi'nden dolayı Γ'nün bir $\mathfrak{A}'$ modeli vardır. c_j sabitinin $\mathfrak{A}'$ yapısındaki $c_j^{\mathfrak{A}'}$ yorumuna a'_j dersek $\mathfrak{A}' \vdash \Sigma$ olduğundan $a'_0, a'_1, \ldots$ öğeleri $A' = |\mathfrak{A}'|$ kümesinin farklı öğeleridir. Dolayısıyla A' kümesinin κ' çokluk sayısı $\geq \aleph_0$, dd. sonsuzdur. $\mathfrak{A} := \mathfrak{A}' \restriction L \in \operatorname{Yap} L$ yapısı ise elbette Γ'nın bir modelidir ve $A = A'$ olduğundan bu bir sonsuz modeldir. ■

Gruplar Kuramı'na ilişkin yalnızca yeterince büyük sonlu gruplarda doğru olan bir $\sigma \in \operatorname{Sav} L_g$ savı olabilir mi? (3.17.5) bunun olamayacağını söyler. Eğer σ böyle bir sav olsaydı $\Lambda_g \cup \{\sigma\}$ aksiyomlarının yeterince büyük sonlu modelleri olduğu için (3.17.5)'ten dolayı en az bir sonsuz modeli olurdu; dd. σ savı en az bir sonsuz grupta da doğru olurdu!

Teorem 3.17.6 (Yukarı Doğru Löwenheim-Skolem Teoremi) $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ *kuramının bir sonsuz modeli varsa her $\kappa \geq \|L\|$ için çokluk sayısı κ olan bir modeli vardır.*

Sonuç 3.17.7 (Aşağı Doğru Löwenheim-Skolem Teoremi) *Eğer bir L dili için $\|L\| = \aleph_0$ ve $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ kuramının bir sonsuz modeli varsa*

her sonsuz κ çokluk sayısı için gücü κ olan bir modeli vardır; özellikle bir sayılabilir sonsuz modeli vardır.

Sonuç 3.17.8 Γ*'nın istenildiği kadar büyük* sonlu *modelleri varsa her* $\kappa \geq \|L\|$ *için gücü* κ *olan bir modeli vardır. Özellikle* $\|L\| = \aleph_0$ *ve* Γ*'nın istenildiği kadar büyük* sonlu *modelleri varsa her* sonsuz κ *çokluk sayısı için gücü* κ *olan bir modeli vardır.*

Kanıt. $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ yapısı Γ'nın $|A| \geq \aleph_0$ koşulunu sağlayan, dd. bir sonsuz modeli olsun. κ çokluk sayısı $\kappa \geq \|L\|$ koşulunu sağlasın. Bu kez L diline, içermediği ve çokluk sayısı κ olan yeni sabitler ekleyerek L_κ dilini oluşturalım. Yeni sabitlerimizin kümesi S olmak üzere $L_\kappa = L \sqcup S$. Elbette $\|L_\kappa\| = \kappa$. Şimdi Γ kuramına

$$\Sigma := \{\neg s \doteq s^* \mid s, s^* \in S \text{ ve } s \neq s^*\}$$

ilksavlarını ekleyerek $\Gamma_\kappa := \Gamma \cup \Sigma$ kuramını elde edelim.

$\Delta \subseteq \Gamma_\kappa$ sonlu kümesi keyfi verilsin. Δ'nın formüllerinde S sabitlerinden sonlu tane bulunur; bunlar $s_1, \ldots, s_n$ olsunlar. A bir sonsuz küme olduğundan, birbirinden ikişer ikişer farklı $a_1, \ldots, a_n \in A$ öğeleri seçilebilir. Şimdi $\mathfrak{A}$ yapısını Δ'nın bir modeli olacak biçimde bir $\mathfrak{A}_\Delta \in \operatorname{Yap} L_\kappa$ yapısına yükselteceğiz. Bunun içinse yeni sabitlerin yorumunu uygun seçmeliyiz. $i = 1, \ldots, n$ olmak üzere $s_i^{\mathfrak{A}_\Delta} := a_i$ olarak, tüm diğer $s \in S$ yeni sabitleri ise istenildiği gibi açıklansınlar. Elbette $\mathfrak{A}_\Delta \models \Delta$. Her *sonlu* $\Delta \subseteq \Gamma_\kappa$'nın bir L_κ modeli olduğundan (3.17.1) Kompaktlık Teoremi'nden dolayı Γ_κ'nın bir $\mathfrak{A}_\kappa \in \operatorname{Yap} L_\kappa$ modeli vardır. $|\mathfrak{A}_\kappa| = A_\kappa$ için $h(s) := s^{\mathfrak{A}_k}$ olarak açıklana $h : S \to A_\kappa$ dönüşümü birebir olduğundan $|A_\kappa| \geq \kappa$.

Γ_κ'nın bir modeli olduğu için Γ_κ kuramı L_κ biçimsel tutarlıdır.Şimdi (3.16.14)'te olduğu gibi bir $L_\kappa^* \supseteq L_\kappa$ dili ve maksimal biçimsel tutarlı bir $\Gamma_\kappa^* \supseteq \Gamma_\kappa$ Henkin kuramı $\kappa = \|L_\kappa\| = \|L_\kappa^*\|$ olacak biçimde seçilsin. Şimdi $\mathfrak{A}^* = \left(A^*, L^{*\mathfrak{A}^*}\right)$ yapısı Γ_κ^*'nın (3.16.16)'daki modeli olsun. L_κ^* dili L_κ diline yeni D sabitleri eklenerek elde edilmiştir. Böylece $\mathcal{C}^* = \mathcal{C} \sqcup S \sqcup D$ ve $|A^*| \leq |\mathcal{C}^*| \leq \|L^*\| = \kappa$. Diğer yandan $\mathfrak{A}^* \models \Sigma$ olduğundan her $s \in S$ için $h(s) := s^{\mathfrak{A}^*}$ ile tanımlanan $h : S \to A^*$ dönüşümü birebirdir. dolayısıyla $\kappa = |S| \leq |A^*|$ ve sonuçta $|A^*| = \kappa$. Elbette $\mathfrak{B} := \mathfrak{A}^* \restriction L$ yapısı Γ'nın bir modelidir ve $B = A^*$ olduğundan $|B| = \kappa$ ve bkb.

Sonuçların kanıtları: κ bir sonsuz çokluk sayısı ise $\kappa \geq \aleph_0$ olacağından (3.17.7) doğrudan teoremden çıkar. Şimdi Γ'nın istenildiği kadar büyük *sonlu* modelleri olsun. (3.17.5)'ten dolayı Γ'nın bir sonsuz modeli vardır. ■

Not 3.17.9 Löwenheim-Skolem Teoremleri modeller kuramının en önemli teoremleri arasındadır. $\mathcal{V}$ değişkenler kümemiz v_0, v_1, v_2, ...değişkenlerinden oluşan sayılabilir sonsuz bir küme olsun. L dili sayılabilir bir dil olsun.

Herhangi bir $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramının sonsuz bir modeli varsa sayılabilir bir modeli de vardır. Örneğin $L = L_{sc}$ sıralanmış cisim dilini seçersek $\mathfrak{R}$ cismi $\mathcal{K}_{sc}$ sıralanmış cisim kuramının bir sayılamaz modelidir. $\mathfrak{R}$ aynı zamanda $\mathrm{Th}\,\mathfrak{R}$ kuramının da bir modelidir. Dolayısıyla $\mathrm{Th}\,\mathfrak{R}$ kuramının sayılabilir bir $\mathfrak{A}$ modeli vardır ve $\mathrm{Th}\,\mathfrak{R} = \mathrm{Th}\,\mathfrak{A}$ olduğunu biliyoruz. ▲

Not 3.17.10 [Skolem Yanıltmacı] Şimdi Aşağı Doğru Löwenheim-Skolem Teoremi'ni Kümeler Kuramı'na uygulayalım. Kümeler Kuramı'nın dili $L_k = \{\dot{\in}\}$ tek öğelidir. $\mathcal{V}$ değişkenler kümesi de sayılabilir sonsuz seçilsin. $y^+ := y \cup \{y\}$ olmak üzere bir x kümesine

$$(\emptyset \dot{\in} x) \curlywedge (y \dot{\in} x \to y^+ \dot{\in} x)$$

ise tümevarımsal küme dersek sonsuzluk aksiyomu en az bir tümevarımsal kümenin varlığını garanti eder. Tüm tümevarımsal kümelerin tek olarak belirli arakesiti ω ile gösterilir ve $\mathcal{K}_{ZF}$ kuramının doğal sayılar kümesi olarak adlandırılır. ω'dan yola çıkarak $\mathcal{K}_{ZF}$ kuramında χ rasyonel sayılar ve ρ gerçel sayılar kümesi tanımlanır. Her x kümesi için yine $\mathcal{K}_{ZF}$ kuramında onun $|x|$ çokluk sayısı tanımlanır ve x kümesinin güç kümesini yalın olarak $\mathcal{P}x$ ile gösterirsek

$$\mathcal{K}_{ZF} \vdash |\omega| \doteq |\chi|\,, |\omega| \prec |\rho|\,, |x| \prec |\mathcal{P}x|$$

ve bildik benzeri önermeler kanıtlanır. Sayılabilirlik ve sayılamazlık kavramları biçimselleştirilerek $\mathcal{K}_{ZF}$ kuramında sayılamaz kümelerin varlığı kanıtlanır. Örneğin ω biçimsel sayılabilirken $\mathcal{P}\omega$ biçimsel sayılamaz.

Eğer $\mathcal{K}_{ZF} = (L_k, \Lambda_{ZF})$ tutarlı ise- çoğu matematikçinin bundan kuşkusu yoktur- Gödel Tamlık Teoremi'nden dolayı $\mathcal{K}_{ZF}$ kuramının bir modeli vardır. Sonsuzluk ilksavından dolayı bu model sonsuzdur, dolayısıyla $\mathcal{K}_{ZF}$ kuramının sayılabilir bir $\mathfrak{A} = (A, \dot{\in}^{\mathfrak{A}})$ modeli vardır. $\mathfrak{A}$ yapısında $\mathcal{K}_{ZF}$ kuramının tüm teoremleri doğru olacaktır, dolayısıyla $\mathfrak{A}$ yapısında özellikle $\omega^{\mathfrak{A}}$ sayılabilir bir kümeyken $(\mathcal{P}\omega)^{\mathfrak{A}}$ sayılamaz bir küme olmalıdır. A sayılabilir bir küme olduğuna göre bu bir açmaz değil midir?

Skolem 1922'de sunduğu [85] çalışmasında Zermelo'nun çalışmalarına ve aksiyomatik Kümeler Kuramı'na ilişkin görüşlerini sekiz madde olarak verdi. Bunlar arasında en önemli bulduğu üçüncü maddede Aşağı Doğru Löwenheim-Skolem Teoremi ve onun sonuçlarına değinir. Yukarıda bir açmazın bulunmadığını ve açıklamanın kolayca bulunacağını belirtir. " Aksiyomlaştırmada 'küme' keyfi tanımlanmış bir kolleksiyon değildir; kümeler birbirleriyle aksiyomlar aracılığı ile dile getirilen bir takım bağıntılarla ilişkilendirilmiş nesnelerden başka bir şey değildirler." Bu çalışmada Skolem kümeler kuramını aksiyomlaştırmanın zorunlu olarak Kümeler Kuramı'nın

temel kavramlarını *göreceleştirdiğini* belirtir. Kümeler Kuramı'nın kavramlarının göreceliğini von Neumann da [72]'de ayrıntılı biçimde tartışmıştır. Yukarıdaki yanıltmaca yakından bakalım.

Her şeyden önce A evreni olarak $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesini veya Öklid düzleminde sayılabilir sonsuz bir kümeyi alabileceğimizi belirtelim. A kümesini $\mathbb{R}^2$'de sayılabilir sonsuz bir küme olarak seçelim. Yalınlık açısından $E := \dot{\in}^{\mathfrak{A}}$ yazalım. $\mathfrak{A}$ modelinin kümeleri A kümesinin noktalarıdır ve bunların sezgisel kümelerle uzaktan yakından ilişkisi yoktur. $\mathfrak{A}$ modelinin $\emptyset^{\mathfrak{A}}$ boş kümesi sezgisel anlamda bir küme değil A kümesinin noktalarından biridir. Aynı şekilde $\mathfrak{A}$ modelinin $\omega^{\mathfrak{A}}$ doğal sayılar kümesi ve $(\mathcal{P}\omega)^{\mathfrak{A}}$ kümesi de A kümesinin birer noktasından ibarettirler. $a, b \in A$ için aEb olması asla b'nin bir sezgisel küme ve $a \in b$ olduğu anlamına gelmez. Sıralı ikililer, fonksiyonlar vs. özel kümeler olduğundan $\mathfrak{A}$ yapısının fonksiyonları bir $F \subset A$ kümesi oluştururlar. Görüldüğü gibi $\mathfrak{A}$ modelinde elimizde çok az fonksiyonumuz var. $\alpha := \omega^{\mathfrak{A}}$ ve $\beta := (\mathcal{P}\omega)^{\mathfrak{A}}$ olsun ($\alpha, \beta \in A$!). Bunların $\mathfrak{A}$ yapısındaki çokluk sayılarını $|\alpha|^{\mathfrak{A}}$ ve $|\beta|^{\mathfrak{A}}$ ile gösterirsek bunlarda nihayetinde A kümesinin noktalarıdır ve α'nın $\mathfrak{A}$-sayılabilir ve β'nın $\mathfrak{A}$-sayılamaz olmasının sezgisel anlamdaki kavramlarla hiçbir ilişkis yoktur.

Şimdi her $a \in A$ için $a^* := \{x \in A \mid xEa\}$ ve $A^* := \{a^* \mid a \in A\}$ olsun. a^* şimdi sezgisel anlamda bir kümedir ve a öğesinin A kümesinde E bağıntısına göre uzantısından başka bir şey değildir. $a^* \in \mathcal{P}(A)$ ve $A^* \subset \mathcal{P}(A)$. Uzantı aksiyomundan dolayı $a \rightsquigarrow a^*$ ile tanımlanan $A \to \mathcal{P}(A)$ dönüşümü birebirdir. A^* kümesinde bir E^* bağıntısını her $a^*, b^* \in A^*$ için $a^*E^*b^* :\Longleftrightarrow aEb$ olarak açıklarsak $\mathfrak{A}^* = (A^*, E^*)$ da $\mathcal{K}_{ZF}$ kuramının bir modelidir. $\mathfrak{A}^*$ modelindeki sanal bir yaratık için evrenindeki tüm kümeler yalnızca A^*'ın öğeleridir. Bu yaratığın evreninde sayılabilir sonsuz çoklukta küme vardır ve bunların her biri *sezgisel anlamda* sonlu veya sayılabilir sonsuzdur. Buna rağmen bu modelde $\mathcal{K}_{ZF}$ kuramının tüm teoremleri doğrudur. Dolayısıyla α^* kümesi $\mathfrak{A}^*$-sayılabilir buna karşın sezgisel anlamda sayılabilir olan β^* ve ρ^* kümeleri $\mathfrak{A}^*$-sayılamazlar. Sezgisel anlamdaki $f : \alpha^* \to \beta^*$ tameşlemeleri de birer kümedirler, ancak bu kümeler birer $\mathfrak{A}^*$-kümesi değildirler. Demek ki "sayılabilirlik" ve "sayılamazlık" göreceli kavramlardır. $\mathcal{K}_{ZF} \vdash \dot{\neg\exists} y(\dot{\forall} x\, x\dot{\in} y)$, dd. tüm kümeleri öğe kabul eden bir kümenin olmadığı $\mathcal{K}_{ZF}$ kuramının bir teoremidir. Bu elbette $\mathfrak{A}^*$ modelinde de doğrudur; dolayısıyla A^* kümesi bir $\mathfrak{A}^*$-kümesi değildir, başka sözlerle A^* sanal yaratığımız için bir küme değildir. Ancak modelin tanımı gereği A^* bir sezgisel kümedir. Demek ki "küme" kavramı da görecelidir. Fonksiyon kıtlığından sezgisel sonsuz bir küme karşımıza $\mathfrak{A}^*$-sonlu olarak çıkabilir. "Sonlu" kavramı da görecelidir. Aynı sezgisel küme $\mathcal{K}_{ZF}$ kuramının farklı $\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$ modellerinde karşımıza çıkabilir ve birinde sonlu iken diğerinde sonsuz veya birinde sayılabilirken

diğerinde sayılamaz olabilir. ▲

3.18 Tanımsal Dil Zenginleştirme

Daha önce L dilimize yeni sabitler ekleyerek bir L' diline geçtiğimizde $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ olmak üzere $\mathcal{K}' = (L', \Gamma)$ kuramının $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramının bir tutucu genişletmesi olduğunu kanıtlamıştık. Şimdi Gödel Tamlık Teoremi yardımıyla kolayca $L \subseteq L'$ olduğu sürece her $\mathcal{K}' = (L', \Gamma)$ kuramının $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramının bir tutucu genişlemesi olduğunu kanıtlayacağız.

Teorem 3.18.1 (Saf dilsel zenginleşme) *$L \subseteq L'$ ve $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ olmak üzere $\mathcal{K}' = (L', \Gamma)$ kuramı $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramının bir tutucu genişlemesidir.*

Kanıt. $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ ve $\mathcal{K}' \vdash \varphi$ olsun, dd. $\Gamma \vdash_{L'} \varphi$. Doğruluk teoreminden dolayı $\Gamma \Vdash_{L'} \varphi$. Öyleyse her $\mathfrak{A}' \in \operatorname{Yap} L'$ için $\mathfrak{A}' \models \Gamma$ ise $\mathfrak{A}' \models \varphi$.

Tamlık Teoremi'nden dolayı $\Gamma \Vdash_L \varphi$ olduğunu göstermek yeterlidir. Şimdi $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ yapısı $\mathfrak{A} \models \Gamma$ olacak biçimde keyfi verilsin. $\mathfrak{A}$ yapısını bir $\mathfrak{A}' \in \operatorname{Yap} L'$ yapısına yükseltelim. Elbette $\mathfrak{A}' \models \Gamma$, dolayısıyla $\mathfrak{A}' \models \varphi$. Buradan ise $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ olduğundan $\mathfrak{A}' \restriction L \models \varphi$, dd. $\mathfrak{A} \models \varphi$ elde edilir ve bkb. ■

Teorem 3.18.2 *$\mathcal{K} = (L, \Gamma)$, $\mathcal{K}' = (L', \Gamma')$ ve $L \subseteq L'$ olmak üzere her $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod} \Gamma$ bir $\mathfrak{A}' \in \operatorname{Mod} \Gamma'$ yapısına yükseltilebiliyorsa $\mathcal{K}'$ kuramı $\mathcal{K}$ kuramının bir tutucu genişlemesidir.*

Kanıt. Tamlık Teoremi'nden dolayı her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ için $\Gamma' \Vdash \varphi$ ise $\Gamma \Vdash \varphi$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ ve $\Gamma' \Vdash \varphi$ olsun. Şimdi $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod} \Gamma$ keyfi verilsin. Varsayımımızdan dolayı $\mathfrak{A}$ yapısını $\mathfrak{A}' \models \Gamma'$ koşulunu sağlayan bir $\mathfrak{A}' \in \operatorname{Yap} L'$ yapısına yükseltebiliriz. Bu durumda $\mathfrak{A}' \models \varphi$, dolayısıyla $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \restriction L$ olduğundan $\mathfrak{A} \models \varphi$ olur. Sonuçta $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod} \Gamma$ ise $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod} \varphi$ olduğunu, dd. $\Gamma \Vdash \varphi$ olduğunu kanıtladık. ■

- Geleneksel matematikte kuramımızın dilini, evrenimizde sıkça karşılaştığımız öğelere bir ad vererek, örneğin Kümeler Kuramı'nda $\emptyset$ sabiti, analizde π, e sabitleri gibi, yine sıkça karşılaştığımız bağıntılara adlar vererek, örneğin Kümeler Kuramı'nda $\subseteq$ ve $\subset$ bağıntıları ve son olarak sıkça karşılaştığımız fonksiyonlara, örneğin kümeler kuramında $\cup$ ve $\cap$, gruplar kuramında $^{-1}$ ters fonksiyon adlarıyla dilimizi zenginleştiririz.

  Burada rastgele bir dil zenginleştirme söz konusu değildir. Örneğin dilimiz L ise buna kattığımız her yeni imimiz L dilinin bir formülü

ile tanımlanmıştır. $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramından yola çıkmışsak, dilimize kattığımız her yeni im için Γ ilksavlarına bir tanımlayan ilksav katarak Γ' ilksavlarıyla bir $\mathcal{K}' = (L', \Gamma')$ kuramına geçeriz. Biz iki şeye inanırız:

1. $\mathcal{K}'$ kuramı $\mathcal{K}$ kuramının bir tutucu genişlemesidir, dd. her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ için $\mathcal{K}' \vdash \varphi$ ise $\mathcal{K} \vdash \varphi$.
2. Bir $\varphi' \in \operatorname{Fm} L'$ için $\mathcal{K}' \vdash \varphi'$ ise φ''deki tanımlanmış sabitler, bağıntılar ve fonksiyonların imlerini elimine ederek elde ettiğimiz formüle φ dersek $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ ve $\mathcal{K} \vdash \varphi$, dd. tanımlanmış imler ve tanımlayan ilksavlarla elde ettiğimiz kuramın her teoremi, onda geçen tanımlanmış imler elimine edildiğinde başlangıçtaki kuramımızın bir teoremini verir.

Bu inançlarımızı sağlam bir temele oturtacağız. Olaya genel olarak yaklaşacağız. $\varphi \in \operatorname{Fm} L$, $\operatorname{Sb} \varphi = \{x\}$ olsun ve

$$\Gamma \vdash \dot{\exists}!x\varphi \tag{3.53}$$

kanıtlanmış olsun. c_φ iminin abecemizde olmadığını varsayarak kuramımıza yeni bir c_φ sabit imini katacağız ve

$$\tau_{c\varphi} := x \dot{=} c_\varphi \leftrightarrow \varphi(x)$$

olsun. Bu durumda c_φ'ye bir **tanımlanmış sabit imi** ve $\tau_{c\varphi}$'ye ise **tanımlayan aksiyom** denir. Her şeyden önce tanımlayan aksiyom olarak $\tau_{c\varphi}$ almak yerine

$$\sigma_{c\varphi} := \varphi(c_\varphi)$$

almanın eş anlamlı olduğunu (3.13.7) ile görmeyi okura bırakalım.

Örnek 3.18.3 Örneğin Gruplar Kuramı'nda $L'_g := \{\bullet\}$ dilinden ve Λ'_g aksiyomlarından yola çıkarsak $\mathcal{K}'_g = \left(L'_g, \Lambda'_g\right)$ olmak üzere

$$\mathcal{K}'_g \vdash \dot{\exists}!x\dot{\forall}y\,(x \bullet y \dot{=} y \curlywedge y \bullet x \dot{=} y)$$

olarak kanıtlanır. $\varphi(x) := \dot{\forall}y\,(x \bullet y \dot{=} y \curlywedge y \bullet x \dot{=} y)$ olmak üzere L'_g dilimize bir c_φ tanımlanmış imi katabiliriz. Bu durumda c_φ yerine $\mathbf{e}$ yazmayı yeğleyeceğiz. Bu durumda tanımlayan aksiyom olarak

$$x \dot{=} \mathbf{e} \leftrightarrow \dot{\forall}y\,(x \bullet y \dot{=} y \curlywedge y \bullet x \dot{=} y)$$
$$\dot{\forall}y\,(\mathbf{e} \bullet y \dot{=} y \curlywedge y \bullet \mathbf{e} \dot{=} y)$$

formüllerinden herhangi biri alınabilir; ikincisi α_{g2}'den başkası değildir. ▲

Örnek 3.18.4 $\mathcal{K}_{ZF}$ Kümeler Kuramı'nda $\mathcal{K}_{ZF} \vdash \dot{\exists}!x\dot{\forall}y\ \dot{\neg}y\dot{\in}x$ kanıtlanır. Bu formülün tanımladığı sabit im $\emptyset$ ile gösterilir ve tanımlayan aksiyomumuz

$$x\dot{=}\emptyset \leftrightarrow \dot{\forall}y\ \dot{\neg}y\dot{\in}x \text{ veya } \dot{\forall}y\ \dot{\neg}y\dot{\in}\emptyset$$

alınabilir. ▲

Örnek 3.18.5 Bir $\mathfrak{A} = \left(A, L^{\mathfrak{A}}\right)$ yapısında bir $a \in A$ öğesine $t^{\mathfrak{A}} = a$ olacak biçimde bir $t \in \operatorname{Tm} L$ bulunabiliyorsa **terimtanımlanabilir** diyelim. $a \in A$ öğesine bir $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ formülü $\mathfrak{A} \models \varphi[a]$ ancak her $a \neq b \in A$ için $\mathfrak{A} \not\models \varphi[b]$ olacak biçimde bulunabiliyorsa **basit tanımlanabilir** diyelim. Elbette terimtanımlanabilir a öğesi basit tanımlanabilir; φ formülü olarak $t\dot{=}x$ alınız. $(\mathbb{N}, +, 0, 1)$ yapısının tüm öğeleri terim tanımlanabilir. $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ yapısının terimtanımlanabilir öğeleri tamı tamına doğal sayılardır. Bu yapının tüm öğeleri basit tanımlanabilir. Buna karşın $(\mathbb{R}, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ cisminin öğelerinin çoğu basit tanımlanamaz(kolaylık için $|\mathcal{V}| = \aleph_0$ alınız!). ▲

Şimdi bize bir $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ verilsin ve $\operatorname{Sb}\varphi = \{x_1, \ldots, x_n\}$ olsun. Her $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ için

$$Q_\varphi^{\mathfrak{A}} := \{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n \mid \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]\}$$

kümesi A'da bir n basamaklı bağıntıdır. $Q_\varphi^{\mathfrak{A}}$ bağıntılarına $\mathfrak{A}$ yapısının L dilinde **tanımlanabilir bağıntıları** veya **basit bağıntıları** denir. Eğer $\mu = |A| \geq \|L\| = \kappa$ ise A kümesindeki tüm bağıntıların kümesinin gücü $2^\mu > \mu \geq \kappa$ ve tanımlanabilir bağıntıların kümesinin gücü ise $\leq \kappa$ olduğundan, böyle bir durumda A'daki bağıntıların çoğu L dilinde tanımlanamaz!

Örnek 3.18.6 $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ cisminde $<$ bağıntısı bir tanımlanabilir bağıntıdır. Gerçekten de L_c dilinin

$$\varphi(x, y) := \dot{\exists}z\,(\dot{\neg}z\dot{=}\mathbf{0} \curlywedge x\dot{+}z \bullet z\dot{=}y)$$

formülü $\mathfrak{R}$ yapısında bildik $<$ sıralamasını tanımlar. Her $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$a < b \iff \mathfrak{R} \models \varphi[a, b]$$

olduğu apaçıktır. Buna karşın $(\mathbb{R}, +)$ grubunda bildik $<$ bağıntısı bir tanımlanabilir bağıntı değildir; bunu (4.1.9)'da göreceğiz. ▲

$Q_\varphi^{\mathfrak{A}}$ bağıntısı L dilimizce biçimselleştirilmemiş ve biz bu bağıntıyla sıkça karşılaşıyorsak onu biçimselleştirmek isteriz. İşte böyle bir durumda L dilimize yeni bir bağıntı imi katarız: R_φ'nin abecemizde olmadığını varsayarak

L dilimizin n basamaklı bağıntı imlerinin $\mathcal{R}_n$ kümesine R_φ bağıntı imini katarız. R_φ **tanımlanmış bağıntı iminin, tanımlayan ilksavı olarak**

$$\tau_{r\varphi} := R_\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

formülünü seçeceğiz. Elbette

$$\sigma_{r\varphi} := \tau_{r\varphi}^{\dot\forall} = \dot\forall x_1, \ldots, x_n \tau_{r\varphi}$$

savımı da seçebilirdik.

Örnek 3.18.7 Kümeler Kuramı'nda $\varphi(y, z) := \dot\forall x\,(x\dot\in y \to x\dot\in z)$ formülünün tanımladığı R_φ bağıntı imi bu özel durumda $\subseteq$ ile gösterilir, dolayısıyla $y\subseteq z \leftrightarrow \varphi(y, z)$, dd.

$$y\subseteq z \leftrightarrow \dot\forall x\,(x\dot\in y \to x\dot\in z)$$

bildik tanımlayan ilksavdır. ▲

Şimdi tanımlanmış fonksiyon imlerini tartışacağız. $\mathrm{Sb}\,\varphi = \{y,\ x_1,\ \ldots,\ x_n\}$ ve $\varphi \in \mathrm{Fm}\,L$ olmak üzere $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramımızda

$$\mathcal{K} \vdash \dot\forall x_1, \ldots, x_n \dot\exists! y \varphi(y, x_1, \ldots, x_n) \tag{3.54}$$

kanıtlanmış olsun. Bu durumda R_φ bağıntısı bir fonksiyonel bağıntıdır. Bu kez L dilimizi bir f_φ **tanımlanmış fonksiyon imi** ile zenginleştireceğiz. Beklenildiği gibi bu kez

$$\tau_{f\varphi} := y \dot= f_\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi(y, x_1, \ldots, x_n) \tag{3.55}$$

tanımlayan ilksavımız olacaktır. Elbette $\tau_{f\varphi}$ yerine

$$\tau_{f\varphi}^* := \varphi(f_\varphi(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n)$$

aksiyomlarını da alabiliriz.

Örnek 3.18.8 Örneğin $\mathcal{K}_g$ Gruplar Kuramı'nda $\varphi(x, y)$ formülü $x \bullet y \dot= \mathbf{e} \curlywedge y \bullet x \dot= \mathbf{e}$ olmak üzere α_{g3} aksiyomumuz $\dot\forall x \dot\exists y \varphi(x, y)$'dir. Ancak hemen $\mathcal{K}_g \vdash \dot\forall x \dot\exists! y \varphi(x, y)$ kanıtlanır. Dolayısıyla bu φ formülü bir f_φ fonksiyon imi tanımlar. Bu fonksiyonu $^{-1}$ ile gösterip $f_\varphi(x)$ yerine x^{-1} yazmak bir gelenektir. Dolayısıyla aşağıdaki formüllerden herhangi birini tanımlayan aksiyom olarak alabiliriz:

$$y \dot= x^{-1} \leftrightarrow x \bullet y \dot= \mathbf{e} \curlywedge y \bullet x \dot= \mathbf{e}$$
$$x \bullet x^{-1} \dot= \mathbf{e} \curlywedge x^{-1} \bullet x \dot= \mathbf{e}$$

▲

Örnek 3.18.9 $\mathcal{K}_{ZF}$ Kümeler Kuramı'nda

$$\varphi(x,y,z) := \dot{\forall} u(u\dot{\in} z \leftrightarrow (u\dot{=} x \curlyvee u\dot{=} y))$$

formülünü alırsak α_{ZF2} çift küme aksiyomumuz $\dot{\forall} x\dot{\forall} y\dot{\exists} z\varphi(x,y,z)$'dir. Ancak α_{ZF1} uzantı aksiyomundan dolayı $\mathcal{K}_{ZF} \vdash \dot{\exists}!\varphi(x,y,z)$. Dolayısıyla bu formül bir iki değişkenli f_φ fonksiyon imi tanımlar. Ancak bu kez $f_\varphi(x,y)$ yerine $\{x,y\}$ yazmak bir gelenektir ve $\varphi(x,y,\{x,y\})$ ise tanıdık

$$\dot{\forall} u\,(u\dot{\in}\{x,y\} \leftrightarrow (u\dot{=} x \curlyvee u\dot{=} y))$$

formülünden başka bir şey değildir. $\{x,y\} = f_\varphi(x,y)$ olduğundan tanım gereği $\{x,y\}$ *bir terimdir*. Yine $\mathcal{K}_{ZF}$ kuramında α_{ZF3} (Bir) ve α_{ZF4} (Güç) aksiyomlarında varlığı ileri sürülen kümelerin tekliği doğrudan α_{ZF1}'den çıkar. Dolayısıyla bunlar tek değişkenli fonksiyon imleri tanımlarlar: (Bir) ile tanımlanan fonksiyon imini $\cup$, (Güç) ile tanımlanan fonksiyon imi ise $\mathcal{P}$ ile göstermek gelenektir. Ayrıca $\cup(x)$ yerine ise yalın olarak $\cup x$ yazılır. Böylece

$$z \in \cup x \leftrightarrow \dot{\exists} u\,(u\dot{\in} x \curlywedge z\dot{\in} u)$$
$$z\dot{\in}\mathcal{P}(x) \leftrightarrow z \subseteq x$$

ve yine $\cup x$ ve $\mathcal{P}(x)$ genişletilmiş $L_k \cup \{\subseteq, \{,\}, \cup, \mathcal{P}\}$ dilinin terimleridirler. ▲

Tanım 3.18.10 $\Omega, \Psi, \Phi \subseteq \operatorname{Fm} L$ *olmak üzere her bir* $\varphi \in \Omega$ *ile (3.53), her bir* $\varphi \in \Phi$ *ile (3.54) sağlanmış olsun. Bu durumda* $\Omega_c := \{c_\varphi \,|\, \varphi \in \Omega\}$, $\Psi_r := \{R_\psi \,|\, \psi \in \Psi\}$ *ve* $\Phi_f := \{f_\varphi \,|\, \varphi \in \Phi\}$ *olmak üzere* $L' := L \sqcup \Omega_c \sqcup \Psi_r \sqcup \Phi_f$ *diline* L *dilinin bir* ***tanımlanmış genişletilmesi*** *denir.* $\tau_{c\Omega} := \{\tau_{c\varphi} \,|\, \varphi \in \Omega\}$, $\tau_{r\Psi} := \{\tau_{r\psi} \,|\, \psi \in \Psi\}$, $\tau_{f\Phi} := \{\tau_{f\varphi} \,|\, \varphi \in \Phi\}$ *olmak üzere* $\Gamma' := \Gamma \sqcup \tau_{c\Omega} \sqcup \tau_{r\Psi} \sqcup \tau_{f\Phi}$ *olsun. Bu durumda* $\mathcal{K}' = (L', \Gamma')$ *kuramına* $\mathcal{K} = (L,\Gamma)$ *kuramının bir* ***tanımlanmış genişlemesi*** *denir.*

Teorem 3.18.11 *Bir* $\mathcal{K} = (L,\Gamma)$ *kuramının her* $\mathcal{K}' = (L',\Gamma')$ *tanımlanmış genişlemesi tutucudur.*

Kanıt. Her $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod}\Gamma$ yapısının bir $\mathfrak{A}' \in \operatorname{Mod}\Gamma'$ yapısına yükseltilebileceğini gösterirsek (3.18.2) ile işimiz biter. Şimdi $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod}\Gamma$ keyfi verilsin. Her $l \in L'\backslash L$ için $l^{\mathfrak{A}'}$ yorumunu $\mathfrak{A}' \in \operatorname{Mod}\Gamma'$ olacak biçimde vereceğiz.

$l = c_\varphi$, $\varphi \in \Omega$ olsun. (3.53)'ten dolayı $\mathfrak{A} \models \dot{\exists}!x\varphi$. Bu nedenle *tek* olarak belirli bir $a \in A$ ile $\mathfrak{A} \models \varphi\,[a]$, dd. $\varphi^{\mathfrak{A}}(a)$ doğrudur. Şimdi $c_\varphi^{\mathfrak{A}'} := a$ olarak tanımlarsak $\tau_{c\varphi}^{\mathfrak{A}'}$ formülü $x = a \iff \varphi^{\mathfrak{A}}(x)$ anlamsal denkliğidir ve doğrudur. Dolayısıyla $\mathfrak{A}' \models \tau_{c\varphi}$ olur. Sonuçta $\mathfrak{A}' \models \sigma_{c\Omega}$.

$l = R_\varphi$ imi n basamaklı bir tanımlanmış bağıntı imi olsun. $R_\varphi^{\mathfrak{A}'} := Q_\varphi^{\mathfrak{A}}$ olarak yorumlanırsa her $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ için $R_\varphi^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \iff \mathfrak{A} \models \varphi\,[a_1, \dots, a_n]$ olacağından $\mathfrak{A}' \models R_\varphi$, dolayısıyla $\mathfrak{A}' \models \tau_{r\Psi}$ olur.

$l = f_\varphi$ ve $\operatorname{Sb}\varphi = \{y, x_1, \dots, y_n\}$ olsun. (3.54)'ten dolayı

$$h(a_1, \dots, a_n) := b \iff \mathfrak{A} \models \varphi\,[b, a_1, \dots a_n]$$

ile bir $h : A^n \to A$ fonksiyonu tanımlanır. $f_\varphi^{\mathfrak{A}'} := h$ yorumuyla $\mathfrak{A}' \models \tau_{f\varphi}$ olduğundan sonuçta $\mathfrak{A}' \models \tau_{f\Phi}$ olur.

$\mathfrak{A} \models \Gamma$ olduğunu da gözetirsek sonuçta $\mathfrak{A}' \models \Gamma'$ ve bkb. ■

(3.18.11) ile $\mathcal{K}' = (L', \Gamma')$ tanımlanmış genişlemesinin $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramından daha fazla $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ formülü kanıtlamadığını göstermiş olduk. Böylece geleneksel matematikte izlediğimiz yolun yarısı tamamlanmıştır. Sıra diğer yarısına gelmiştir. Şimdi $\psi' \in \operatorname{Fm} L'$ ve $\mathcal{K}' \vdash \psi'$ olsun. ψ' en fazla sonlu sayıda tanımlanmış im içerebilir. Bunları elimine ederek bir $\psi \in \operatorname{Fm} L$ formülüne $\mathcal{K}' \vdash \psi' \leftrightarrow \psi$ olacak biçimde ulaşacağımızı, dolayısıyla $\mathcal{K}' \vdash \psi'$ ve $\mathcal{K}' \vdash \psi' \to \psi$ çıkarımlarından (MP) ile önce $\mathcal{K}' \vdash \psi$ ardında $\mathcal{K} \vdash \psi$ elde edeceğimizi kanıtlayacağız.

Bunun için her türden bir tanımlanmış imi nasıl elimine edeceğimizi bilmek yeterlidir. Bu imlerden tanımlanmış fonksiyon imlerinin elimine edilmesi biraz zorluk içerir.

Şimdi bize bir $\psi' \in \operatorname{Fm} L'$ verilsin. Örneğin f_φ tanımlanmış imimiz ψ' formülümüzde salt $t = f_\varphi(t_1, \dots, t_n)$ olarak geçsin ve $t_1, \dots, t_n$ terimleri f_φ imini içermesinler; bu durumda ψ' formülünü $\psi'\,[t]$ olarak yazalım. $y \notin \deg \psi'$ olmak üzere ψ''de geçtiği her yerde $f_\varphi(t_1, \dots, t_n)$, dd. t yerine y yazarak elde ettiğimiz formülü $\psi'\,[y]$ ile gösterelim. Elbette

$$\vdash \psi' \leftrightarrow \dot\exists y(y \doteq f_\varphi(t_1, \dots, t_n) \curlywedge \psi'\,[y]).$$

Tanımlayan ilksavdan dolayı ise bu denklik

$$\vdash \psi' \leftrightarrow \dot\exists y\left(\varphi(y, t_1, \dots, t_n) \curlywedge \psi'\,[y]\right)$$

denkliğine dönüşür ve bu denkliğin sağında f_φ elimine edilmiştir.

Genelde şöyle bir durumla karşı karşıya kalabiliriz; t_i terimleri de f_φ imini içerebiliriler. Örneğin $t = f_\varphi(f_\varphi(z_1, \dots, z_n, y_2, \dots, y_2))$ olabilir. Böyle bir durumda $t_1 := f_\varphi(z_1, \dots, z_n)$ olmak üzere $t = f_\varphi(t_1, y_2, \dots, y_2)$ olur ve izlenecek yol bellidir: Önce içteki, dd. ile t_1 terimindeki f_φ imi elimine edilir, ardından dıştaki f_φ imi elimine edilir. Her formülde en fazla sonlu sayıda f_φ imi bulunacağından en içtekilerden başlayarak dışa doğru elimine edilirler. Önemli olan her bir eliminasyon sonrasında biçimsel denk bir formül elde etmemizdir.

Teorem 3.18.12 *$\mathcal{K}' = (L', \Gamma')$ kuramı $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramının bir tanımlanmış genişlemesi ise her $\psi' \in \operatorname{Fm} L'$ formülüne karşılık, ψ''deki tanımlanmış imleri elimine ederek bir $\psi \in \operatorname{Fm} L$ formülü $\mathcal{K}' \vdash \psi' \leftrightarrow \psi$ olacak biçimde bulunabilir. Özellikle $\mathcal{K}' \vdash \psi'$ ise $\mathcal{K} \vdash \psi$.*

Kanıt. $\psi' \in \operatorname{Fm} L'$ keyfi verilsin.

(1) c_φ tanımlanmış imi ψ''de bulunsun. $x \notin \operatorname{Sb} \psi'$ olmak üzere ψ''de geçtiği her yerde c_φ yerine $\varphi(x)$ yazarak elde ettiğimiz formüle ψ'' dersek $x \doteq c_\varphi \leftrightarrow \varphi(x)$ olduğundan (3.12.7) Yerine Koyma Teoreminden $\mathcal{K}' \vdash \psi' \leftrightarrow \psi''$ elde ederiz.

(2) R_φ tanımlanmış imi ψ''de geçsin ve $\operatorname{Sb} \varphi = \{x_1, \ldots, x_n\}$ olsun. ψ''de geçtiği her yerde $R_\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ yerine $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ yazarak elde ettiğimiz formüle ψ'' dersek $\tau_{r\varphi}$ ve (3.12.7) ile $\mathcal{K}' \vdash \psi' \leftrightarrow \psi''$ elde ederiz.

(3) f_φ tanımlanmış imi ψ''de geçsin. Bir özel durumu kanıtlamak yeterlidir. *Özel durum:* $\psi' \in \operatorname{Fm} L', t = f_\varphi(t_1, \ldots, t_n) \in \operatorname{Tm} L', t_1, \ldots, t_n \in \operatorname{Tm} L$ olsun. Özellikle t teriminde f_φ imi iç içe bulunmaz. $y \notin \deg \psi'$ olsun. ψ' formülünde geçtiği her yerde t yerine y yazarak elde ettiğimiz formülü $\psi'[y]$ ile gösterirsek

$$\mathcal{K}' \vdash \psi' \leftrightarrow \dot{\exists} y \left(\varphi(y, t_1, \ldots, t_n) \curlywedge \psi'[y]\right).$$

Şimdi $\vdash t \doteq t$ olduğundan (a) $\vdash \psi' \to t \doteq t \curlywedge \psi'$. Diğer yandan $y \notin \deg \psi'$ olduğundan $\dot{\exists} K$ ile (b) $\vdash t \doteq t \curlywedge \psi' \to \dot{\exists} y\,(y \doteq t \curlywedge \psi'[y])$. (a) ve (b)'den ise $\vdash \psi' \to \dot{\exists} y\,(y \doteq t \curlywedge \psi'[y])$ elde edilir. Buradan da (3.55) ile $\mathcal{K}' \vdash y \doteq t \leftrightarrow \varphi(y, t_1, \ldots, t_n)$ olduğundan

$$\mathcal{K}' \vdash \psi' \to \dot{\exists} y \left(\varphi(y, t_1, \ldots, t_n) \curlywedge \psi'[y]\right) \tag{3.56}$$

elde edilir. $\vdash y \doteq t \to (\psi'[y] \leftrightarrow \psi')$ ve buradan önermemantıksal $\vdash y \doteq t \curlywedge \psi'[y] \to \psi'$ elde ederiz ve buradan ise $\psi'[y](y|t) = \psi'$ olduğundan $\dot{\exists} K$ ile

$$\vdash \dot{\exists} y (y \doteq t \curlywedge \psi'[y]) \to \psi'$$

$\mathcal{K}' \vdash y \doteq t \leftrightarrow \varphi(y, t_1, \ldots, t_n)$ olduğunu gözeterek buradan önce

$$\mathcal{K}' \vdash \dot{\exists} y \left(\varphi(y, t_1, \ldots, t_n) \curlywedge \psi'[y]\right) \to \psi' \tag{3.57}$$

ve sonra (3.56) ve (3.57)'den de

$$\mathcal{K}' \vdash \psi' \leftrightarrow \dot{\exists} y \left(\varphi(y, t_1, \ldots, t_n) \curlywedge \psi'[y]\right) \tag{3.58}$$

elde edilir. (3.58) denkliğinin sağındaki formül $\operatorname{Fm} L$'dedir.

Genel durumda f_φ iç içe kutulanmış olarak bulunabilir. Ancak sonlu sayıda bulunabilir ve biz en içten dışarıya doğru sonlu adımda her bir f_φ imini özel durumda belirtildiği gibi elimine ederiz.

Böylece her türden bir tanımlanmış imin nasıl elimine edileceğini öğrendik. Her ψ' ancak sonlu sayıda tanımlanmış im içereceğinden sonlu adımda $\mathcal{K}' \vdash \psi' \leftrightarrow \psi$ koşulunu sağlayan bir $\psi \in \operatorname{Fm} L$ formülüne ulaşırız. Buradan ise $\mathcal{K}' \vdash \psi'$ ise önce $\mathcal{K}' \vdash \psi$ elde ederiz. $\mathcal{K}'$ bir tutucu genişleme olduğundan $\mathcal{K} \vdash \psi$ olur. ■

3.19 Biçimsel Kuramların Birbirlerinde Yorumu

$\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ ve $\mathcal{K}' = (L', \Gamma')$ kuramları verilsin. $\mathcal{K}$ kuramını ve modellerini $\mathcal{K}'$ kuramı üzerinden inceleyebilir miyiz? Bunun için her şeyden önce her $l \in L$ imine, tipini koruyarak, onun L''deki yorumu diyeceğimiz bir $l_I \in L'$ imi karşılık getirilmelidir. Burada bir sorun şudur: $\mathcal{K}$ kuramının modellerini bir şekilde incelemek istiyorsak bunların evrenlerinin $\mathcal{K}'$ kuramının modellerinin evreniyle örtüşmesi gerekmez. Dolayısıyla biz $\mathcal{K}'$ kuramında $\mathcal{K}$'nın evrenini belirlemek için bir basamaklı bir $U_I \in \mathcal{R}'_1$ bağıntı imine gereksinim duyarız. Her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ formülüne onun yorumu diyeceğimiz bir $\varphi^I \in \operatorname{Fm} L'$ karşılık getireceğiz. Eğer $\varphi = \dot{\forall} x \psi$ ise elbette $\varphi^I = \dot{\forall} x (U_I x \to \psi^I)$ ve benzer biçimde $(\dot{\exists} x \psi)^I = \dot{\exists} x (U_I x \curlywedge \psi^I)$ kısıtlanmış niceleyicileri olmalıdır.

$L = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ ve $L' = (\mathcal{R}', \mathcal{F}', \mathcal{C}')$ olmak üzere L **dilinin** L' **dilindeki bir** I **yorumundan** şu veriler anlaşılacaktır:

(i) Bir $U_I \in \mathcal{R}'_1$, L'nin **evreni.**
(ii) Her $f \in \mathcal{F}_n$ için bir $f_I \in \mathcal{F}'_n$.
(iii) Her $R \in \mathcal{R}_n$ için bir $R_I \in \mathcal{R}'_n$.
(iv) Her $c \in \mathcal{C}$ için bir $c_I \in \mathcal{C}'$.

L dilinin L''de bir I yorumu verilsin. $t \in \operatorname{Tm} L$ olmak üzere t teriminde geçen her $l \in L$ iminin yerine l_I yorumunu yazarak elde edilen $t_I \in \operatorname{Tm} L'$ terimine t **teriminin** I **yorumu** denir. L dilinin L' dilindeki bir I yorumuna aşağıdaki koşullar sağlandığında L **dilinin** $\mathcal{K}'$ **kuramında bir yorumu** denir: $f \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 1$ olmak üzere

$$\begin{array}{ll} (1) & \mathcal{K}' \vdash \dot{\exists} x U_I x \\ (2) & \mathcal{K}' \vdash U_I c_I, \quad c \in \mathcal{C} \\ (3) & \mathcal{K}' \vdash U_I x_1 \to U_I x_2 \to \cdots \to U_I x_n \to f_I x_1 \cdots x_n \end{array} \tag{3.59}$$

Bu koşullardan (1) $\mathcal{K}'$ kuramının U_I evreninin boş olmadığını kanıtlamasını, (2) $\mathcal{K}'$ kuramının U_I evreninin her c_I sabitini içerdiğini kanıtlamasını, (3) ise $\mathcal{K}'$ kuramının f_I yorumlarının U_I kapalı olmasını kanıtlamasını ister. L dilinin bir $\mathcal{K}'$ yorumuna bir anlamda evreni U_I olan bir L yapısı olarak bakabiliriz. Daha açık olarak $\mathfrak{A}' \in \operatorname{Mod} \mathcal{K}'$ verildiğinde $A := \{a \,|\, a \in A'$ ve

$U_I^{\mathfrak{A}'}a\}$ olmak üzere her $c \in \mathcal{C}$ için $c^{\mathfrak{A}} := c_I^{\mathfrak{A}'}$, her $f \in \mathcal{F}_n$ için $f^{\mathfrak{A}} := f_I^{\mathfrak{A}'}|A^n$ ve nihayet her $R \in \mathcal{R}_n$ için $R^{\mathfrak{A}} := R^{\mathfrak{A}'} \mid A^n$ alırsak L dilinin bir $\mathfrak{A} = \left(A, L^{\mathfrak{A}}\right)$ yapısını elde ederiz.

L dilinin L' dilinde bir I yorumu verildiğinde her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ formülüne bir φ^I formülü karşılık getireceğiz. Önce FTT ile her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ formülüne bir $\varphi_I \in \operatorname{Fm} L'$ formülü karşılık getireceğiz. φ bir atomik formülse φ_I formülü φ'deki her $l \in L$ yerine l_I yazarak elde edilir. φ_I ve ψ_I tanımlanmışsa $(\neg\varphi)_I := \neg\varphi_I$ ve $(\varphi \to \psi)_I := \varphi_I \to \psi_I$ olarak açıklanır. Son olarak ψ_I tanımlanmış ve $\varphi = \dot{\forall} x\psi$ ise $\varphi_I = \left(\dot{\forall} x\psi\right)_I := \dot{\forall} x\,(U_I x \to \psi_I)$ olarak açıklanır. Bu durumda elbette $\left(\dot{\exists} x\psi\right)_I \equiv \dot{\exists} x\,(U_I x \curlywedge \psi_I)$ olur. Her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ için φ'nin serbest değişkenleri soldan sağ geçiş sıralarıyla $x_1, \ldots, x_n$ ise

$$\varphi^I := U_I x_1 \to \cdots \to U_I x_n \to \varphi_I$$

olarak açıklanır. φ^I formülü φ formülünün L''deki bir farkla doğal karşılığıdır. Bu formülün evreni U_I ile belirlenmiştir. $\Omega \subseteq \operatorname{Fm} L$ için $\Omega^I := \{\varphi^I \mid \varphi \in \Omega\}$ olsun.

Tanım 3.19.1 *$\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ ve $\mathcal{K}' = (L', L')$ kuramları verilsin. L dilinin $\mathcal{K}'$'de bir I yorumuna ava $\mathcal{K}' \vdash \Gamma^I$ ise $\mathcal{K}$* ***kuramının*** *$\mathcal{K}'$* ***kuramında bir yorumu*** *denir.*

Önerme 3.19.2 *$\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramının $\mathcal{K}' = (L', L')$ kuramında bir I yorumu var ve $\mathcal{K}'$ tutarlı ise $\mathcal{K}$'de tutarlıdır.*

Kanıt. $\mathcal{K}'$ tutarlı olduğundan bir $\mathfrak{A}'$ modeli vardır. $\mathfrak{A}'$ yapısı bizi biraz yukarıda tanımlanan bir $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ yapısına götürür. $\mathcal{K}' \vdash \Gamma^I$ olduğundan $\mathfrak{A}' \models \Gamma^I$. Buradansa kolayca $\mathfrak{A} \models \Gamma$ elde edilir, dolayısıyla bir modeli olduğundan $\mathcal{K}$ tutarlı olur. ■

Yorum Teoremi'ni vermeden önce (3.59)(2) ve (3)'ten yararlanarak tümevarımla aşağıdaki iki gerçeği görmeyi okura bırakıyoruz: $t \in \operatorname{Tm} L$, $\varphi \in \operatorname{Fm} L$, $\operatorname{Sb} t = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ve $\operatorname{Sb}\varphi \subseteq x_1, \ldots, x_n\}$ ise

$$\mathcal{K}' \vdash U_I x_1 \to \cdots \to U_I x_n \to U_I t_I$$
$$\mathcal{K}' \vdash U_I x_1 \to \cdots \to U_I x_n \to \varphi_I \text{ ise } \mathcal{K}' \vdash \varphi^I$$

Teorem 3.19.3 (Yorum Teoremi [82]) *I, $\mathcal{K}$ kuramının $\mathcal{K}'$ kuramındaki bir yorumu ise her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ için $\mathcal{K} \vdash \varphi$ ise $\mathcal{K}' \vdash \varphi^I$.*

(3.19.3) bize (3.19.2)'nin daha yalın bir kanıtını verir. Gerçekten de bir $\sigma \in \operatorname{Sav} L$ ile $\mathcal{K} \vdash \sigma$ ve $\mathcal{K} \vdash \neg\sigma$ ise $\mathcal{K}' \vdash \sigma^I$ ve $\mathcal{K}' \vdash \neg\sigma^I$ olur; $\mathcal{K}$ tutarsızsa $\mathcal{K}'$ de tutarsızdır. Tersten söylersek $\mathcal{K}'$ tutarlı ise $\mathcal{K}$ de tutarlıdır.

Son olarak kısaca tanımlanabilir dil genişletmelerinin yorumlarla ilişkisine değineceğiz. $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ ve $\mathcal{K}' = (L', \Gamma')$ kuramları ve $\mathcal{K}$ kuramının $\mathcal{K}'$ kuramında bir I yorumu verilmiş olsun. $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ ve $\operatorname{Sb} \varphi = \{x_1, \ldots, x_n\}$ olmak üzere L dilini $L_* = L \sqcup \{R_\varphi\}$ diline genişletelim. Bu durumda tanımlayan aksiyomumuz

$$R_\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

olacaktır. L' diline ise bir Q_φ bağıntı imini

$$Q_\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi_I(x_1, \ldots, x_n)$$

tanımlayan aksiyomu ile katalım ve L'_* dilini elde edelim. Bu tanımlayan aksiyomları $\tau_{r\varphi}$ ve $\tau_{r\varphi_I}$ ile gösterelim. $\mathcal{K}_* := (L_*, \Gamma \cup \{\tau_{r\varphi}\})$ ve $\mathcal{K}'_* := (L'_*, \Gamma' \cup \{\tau_{r\varphi_I}\}$ olsun. Şimdi I yorumunu $(R_\varphi)_I := Q_\varphi$ olarak açıklayarak L_* diline genişletelim. Bu durumda biz I'nın $\mathcal{K}_*$ kuramının $\mathcal{K}'_*$ kuramında bir yorumu olduğunu savunuyoruz. Göstermemiz gereken tek şey $\mathcal{K}'_* \vdash \tau^I_{r\varphi}$ olduğudur. Ancak $(\tau_{r\varphi})_I = \tau_{r\varphi_I}$ ve $\tau_{r\varphi_I}$ ise $\mathcal{K}'_*$ kuramının bir aksiyomu olduğundan

$$\begin{aligned} &\mathcal{K}'_* \vdash U_I x_1 \to \cdots \to U_I x_n \to \tau_{r\varphi_I} \\ &\mathcal{K}'_* \vdash U_I x_1 \to \cdots \to U_I x_n \to (\tau_{r\varphi})_I \end{aligned} \tag{3.60}$$

olur. (3.60) ise $\mathcal{K}'_* \vdash \tau^I_{r\varphi}$ çıkarımından başka şey değildir.

Şimdi L diline bir f_φ fonksiyon imini

$$y \doteq f_\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi(y, x_1, \ldots, x_n)$$

tanımlayan $\tau_{f\varphi}$ aksiyomu ile kattığımızı düşünelim. f_φ'nin tanımlanabilmesi için ön koşulumuz

$$\mathcal{K} \vdash \dot{\exists}! y \varphi(y, x_1, \ldots, x_n) \tag{3.61}$$

olmasıdır. Gerekirse L' diline yeni bir sabit ekleyerek L' dilinde en az bir c' sabitinin varlığını isteyeceğiz. Böyle bir c' sabitini seçelim ve L' diline yeni bir f'_φ fonksiyon imini aşağıdaki $\tau'_{f\varphi}$ tanımlayan aksiyomu ile katalım:

$$\begin{aligned} y \doteq f'_\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow &(U_I x_1 \curlywedge \cdots \curlywedge U_I x_n \curlywedge \varphi_I \curlywedge U_I y) \\ &\curlyvee (\neg(U_I x_1 \curlywedge \cdots \curlywedge U_I x_n) \curlywedge y \doteq c'). \end{aligned} \tag{3.62}$$

(3.62)'nin sağ yanındaki formülü φ' ile gösterirsek (3.61)'den dolayı $\mathcal{K}' \vdash \dot{\exists}! y \varphi'(y, x_1, \ldots, x_n)$ ve dolayısıyla f'_φ'nin tanımı kusursuzdur. f_I olarak f' alarak I yorumunu genişletelim. I'nın $L \cup \{f_\varphi\}$ dilinin $\mathcal{K}'_1 = (L' \cup \{f'_\varphi\}, \Gamma \cup \{\tau'_{f\varphi}\})$ kuramında bir yorumu olabilmesi için

$$\mathcal{K}'_1 \vdash U_I x_1 \to \cdots \to U_I x_n \to U_I f'_\varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

olması gerekir ki bu doğrudan (3.62)'den çıkar. Diğer yandan I'nın $\mathcal{K}_1 = (L \cup \{f_\varphi\}, \Gamma \cup \{\tau_{f\varphi}\}$ kuramının $\mathcal{K}_1'$ kuramında bir yorumu olması için $\mathcal{K}_1' \vdash \tau_{f\varphi}^I$ olması gerekir. Ancak $\tau_{f\varphi}^I$ formülü

$$U_I x_1 \to \cdots \to U_I x_n \to U_I y \to (f'_\varphi(x_1, \ldots, x_n) \doteq y \leftrightarrow \varphi_I)$$

formülüdür ve $\mathcal{K}_1' \vdash \tau_{f\varphi}^I$ yine doğrudan (3.62)'den çıkar.

L diline tanımlanmış bir sabit eklemenin tartışmasını okura bırakıyoruz; veya bu işlem 0 değişkenli bir fonksiyon imi katmakla aynı şeydir der noktalarız.

Eğer L dilinin bir L_* tanımlanabilir bir dil genişletmesi ve L' dilinin buna koşut, yukarıda anlatıldığı biçimde bir tanımlanmış L'_* dil genişletmesiyle Γ ve Γ''ye tanımlayan aksiyomları katarak elde edilen aksiyom sistemleri Γ_* ve Γ'_* olmak üzere bir $\mathcal{K}_* := (L_*, \Gamma_*)$ kuramının $\mathcal{K}'_* = (L'_*, \Gamma'_*)$ kuramında bir yorumu varsa $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramı $\mathcal{K}' = (L', \Gamma')$ kuramında **yorumlanabilir** denir. Tanımlanabilir dil genişletmeleri tutucu olduğundan Yorum Teoremi ile şu sonuca ulaşırız: $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ *kuramı* $\mathcal{K}' = (L', \Gamma')$ *kuramında yorumlanabilir ve* $\mathcal{K}'$ *tutarlı ise* $\mathcal{K}$*'de tutarlıdır.* Kuramların tutarlılık kanıtlarında buna sıkça başvurulur. Örneğin $\mathcal{K}_{ZF}^{-s}$ ile $\mathcal{K}_{ZF}$ kuramından sonsuzluk aksiyomunu çıkararak elde ettiğimiz kuram olsun.

Önerme 3.19.4 *$\mathcal{K}_a$ kuramı $\mathcal{K}_{ZF}$'de yorumlanabilir.*

Kanıt. Bkz. [63]. ■

Önerme 3.19.5 *$\mathcal{K}_a$ ve $\mathcal{K}_{ZF}^{-s}$ kuramları birbirlerinde yorumlanabilirler, dolayısıyla $\mathcal{K}_a$ ava $\mathcal{K}_{ZF}^{-s}$ tutarlı ise tutarlıdır.*

Kanıt. Bkz. [63]. ■

(3.19.4)'ten dolayı $\mathcal{K}_{ZF}$ tutarlı ise $\mathcal{K}_a^1$ de tutarlıdır; tersten söylersek $\mathcal{K}_a$ tutarsızsa $\mathcal{K}_{ZF}$ de tutarsızdır.

Bölüm 4

MODELLER KURAMINA GİRİŞ

4.1 Altyapılar ve Yapı Dönüşümleri

Daha önce bir $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ verildiğinde bu yapının bir $\mathfrak{A}' \in \operatorname{Yap} L'$ yapısına yükseltilmesinin ne demek olacağını tanımladık. Bu durumda bu yapıların evrenleri aynı kalıyor, dd. $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{A}'|$, buna karşın L dili zenginleştiriliyordu, dd. $L \subseteq L'$. Bu kez dilleri aynı $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \operatorname{Yap} L$ ancak evrenleri $B \subseteq A$ koşulun sağlayan yapılara odaklanacağız.

Tanım 4.1.1 *$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \operatorname{Yap} L$, $B \subseteq A$ ve $L = (\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{C})$ olsun. Aşağıdaki koşullar sağlandığında $\mathfrak{B}$ yapısı $\mathfrak{A}$ yapısının bir **altyapısıdır** denir ve bu durum $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ ile gösterilir:*

1. *Her $R \in \mathcal{R}_n$ için $R^{\mathfrak{B}} = R^{\mathfrak{A}} \cap B^n$.*
2. *Her $f \in \mathcal{F}_n$ için $f^{\mathfrak{B}} = f^{\mathfrak{A}} | B^n$.*
3. *Her $c \in \mathcal{C}$ için $c^{\mathfrak{B}} = c^{\mathfrak{A}}$*

$\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ olduğunda $\mathfrak{A}$ yapısı $\mathfrak{B}$ yapısının bir **üstyapısıdır** veya bir **genişlemesidir** denir böyle bir durumda $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}|B$ gösterimi de kullanılır. Ayrıca $\mathfrak{A}$ yapısının evreni aynı B olan bir başka $\mathfrak{B}'$ altyapısı olamayacağı apaçıktır.

Eğer $\mathfrak{B}$ yapısı $\mathfrak{A}$ yapısının bir altyapısı ise (4.1.1)(2)'den dolayı $B \subseteq A$ alt kümesi $\mathcal{F}^{\mathfrak{A}}$ fonksiyonlarına göre *kapalıdır*. Bu nedenle herhangi bir $B \subseteq A$ altkümesinin bir altyapının evreni olabilmesi için her şeyden önce $\mathcal{F}^{\mathfrak{A}}$-kapalı olmalı ve (4.1.1)(3)'ten dolayı ise $\mathcal{C}^{\mathfrak{A}}$ kümesini içermelidir. Örneğin $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}, +)$ olmak üzere $\mathfrak{B} = (2\mathbb{Z}, +)$ yapısı $\mathfrak{A}$'nın bir altyapısıdır ve $T := \{2m + 1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$ kümesi $+$ fonksiyonuna göre kapalı olmadığından $\mathfrak{A}$'nin bir altyapısının evreni olamaz!

$\subseteq$ bağıntısı $\operatorname{Yap} L$'de bir geçişli bağıntıdır: $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in \operatorname{Yap} L$ için

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \text{ ve } \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C} \implies \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}.$$

Teorem 4.1.2 (Altyapı Teoremi) *$\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ ve $\emptyset \neq B \subseteq A$ olsun. B kümesinin $\mathfrak{A}$'nın bir altyapısının evreni olabilmesi içi gerek ve yeter koşul $\mathcal{C}^{\mathfrak{A}} \subseteq B$ ve B kümesinin $\mathcal{F}^{\mathfrak{A}}$-kapalı olmasıdır.*

Kanıt. Ölçütün gerekliliğini az önce belirttik. Şimdi ölçüt sağlansın. Her $R \in \mathcal{R}_n$ için $R^{\mathfrak{B}} := R^{\mathfrak{A}} \cap B^n$, her $f \in \mathcal{F}_n$ için $f^{\mathfrak{B}} := f^{\mathfrak{A}}|B^n$ ve her $c \in \mathcal{C}$ için $c^{\mathfrak{B}} := c^{\mathfrak{A}}$ olarak açıklarsak bir $\mathfrak{B} \in \operatorname{Yap} L$ elde ederiz ve $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$. ■

Eğer $L = \mathcal{R}$ ise her $\emptyset \neq B \subseteq A$ bir $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ altyapısının evrenidir: Her $R \in \mathcal{R}_n$ için $R^{\mathfrak{B}} := R^{\mathfrak{A}}|B^n$ alırız.

Teorem 4.1.3 (Üretilen Yapı Teoremi) *$\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ ve $B \subseteq A$ olsun. $B \neq \emptyset$ veya $\mathcal{C} \neq \emptyset$ ise $B \subseteq \langle B \rangle^{\mathfrak{A}} \subseteq A$ olacak biçimde bir $\langle B \rangle^{\mathfrak{A}}$ kümesi $\subseteq$ bağıntısına göre minimal olacak ve bir altyapının evreni olacak biçimde vardır. $\mathfrak{A}$ yapısının belli olduğu, vurgulanması gerekmediği durumlarda $\langle B \rangle^{\mathfrak{A}}$ yerine yalın olarak $\overline{B}$ yazmayı yeğleyeceğiz.*

Kanıt. Koşullarımız altında B kümesini içeren bir altyapı evreni $B^* := B \cup \mathcal{C}^{\mathfrak{B}}$ kümesini içerecektir. $\langle B \rangle^{\mathfrak{A}}$ olarak B^* kümesinin $\mathcal{F}^{\mathfrak{A}}$-kapanışını seçersek bu aranan kümedir. ■

$\langle B \rangle^{\mathfrak{A}}$ kümesinin

$$\begin{aligned} \langle B \rangle^{\mathfrak{A}} &:= \left\{ t^{\mathfrak{A}}[b_1, \ldots b_n] \mid t \in \operatorname{Tm} L,\ b_1, \ldots b_n \in B \right\} \cup \mathcal{C}^{\mathfrak{A}} \\ &:= \left\{ t^{\mathfrak{A}_B} \mid t \in \operatorname{Tmc} L_B \right\} \end{aligned}$$

olduğunu görmeyi okura bırakıyoruz.

$\mathfrak{A}$ yapısı olarak sırasıyla $(\mathbb{Z}, <)$'yi alırsak her $\emptyset \neq B \subseteq A$ için $\overline{B} = B$, $(\mathbb{Z}, \dot{+}, \bullet, \mathbf{0}, \mathbf{1})$'i alırsak $\overline{\emptyset} = \mathbb{Z}$, bir K-vektör uzayı yapısı ve B olarak bir baz kümesi alırsak $\overline{B} = A$ olur.

Önerme 4.1.4 *$\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ ve $M \subseteq A$ olsun. κ ise $\max(\|L\|, |M|) \leq \kappa \leq |A|$ koşulunu sağlayan bir çokluk sayısı olsun. Bu durumda bir $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ altyapısı $|B| = \kappa$ olacak biçimde vardır.*

Kanıt. $M \subseteq M' \subseteq A$ ve $|M'| = \kappa$ olacak biçimde M' kümesini seçelim. Herhangi bir $D \subseteq A$ için

$$\mathcal{F}^{\mathfrak{A}}[D] := \bigcup_{f^{\mathfrak{A}} \in \mathcal{F}^{\mathfrak{A}}} f^{\mathfrak{A}}[D] = \left\{ f^{\mathfrak{A}}(\overline{d_n}) \mid f \in \mathcal{F}_n,\ n \geq 1,\ \overline{d_n} \in D \right\}$$

olmak üzere (1.3.3)'ten bildiğimize göre $B_0 := M' \cup \mathcal{C}^{\mathfrak{A}}$ alır ve tekrarlı tanımlamayla $B_{n+1} := B_n \cup \mathcal{F}^{\mathfrak{A}}[B_n]$ olarak açıklarsak B_0 kümesinin B

ile göstereceğimiz $\mathcal{F}^{\mathfrak{A}}$-kapanışı $B = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$ ile verilir. $\aleph_0 \leq \|L\| \leq \kappa$ olduğundan κ bir sonsuz çokluk sayısıdır; bu nedenle $|B_0| = \kappa$. Buradan tümeverımla her n için $|B_n| = \kappa$ elde edilir. Her bir $f \in \mathcal{F}$ için $|\operatorname{im} f^{\mathfrak{A}}_{B_n}| \leq \kappa$. Diğer yandan $\mathcal{F}^{\mathfrak{A}}[B_n] = \bigcup_{f\in\mathcal{F}} \operatorname{im} f^{\mathfrak{A}}_{B_n}$ olduğundan $\left|\mathcal{F}^{\mathfrak{A}}[B_n]\right| \leq \|L\| \cdot \kappa = \max(\|L\|, \kappa) = \kappa$ olduğundan $|B_{n+1}| = \kappa$ olur. Dolayısıyla $\kappa \leq |B| \leq \aleph_0 \cdot \kappa = \kappa$ olur ve (4.1.2)'den dolayı B bir altyapının evrenidir. ■

Tanım 4.1.5 *$\mathfrak{A} = (A, L^{\mathfrak{A}})$ ve $\mathfrak{B} = (B, L^{\mathfrak{B}})$ iki L yapısı olmak üzere bir $h : A \to B$ dönüşümüne aşağıdaki koşullar sağlandığında $\mathfrak{A}$ yapısından $\mathfrak{B}$ yapısına bir **yapı dönüşümü** (veya **homomorfizm**) denir ve $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ile gösterilir:*

1. *n basamaklı her $R \in L$ bağıntı imi ve her $a_1, \ldots, a_n \in A$ için*

$$R^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \implies R^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)).$$

2. *n değişkenli her $f \in L$ fonksiyon imi ve her $a_1, \ldots, a_n \in A$ için*

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)).$$

3. *Her $c \in L$ sabit imi için $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.*

$h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ yapı dönüşümüne, $h : A \to B$ birebir ve tanımın ilk koşulu çift yönlü sağlanmışsa, dd. n basamaklı her $R \in L$ bağıntı imi ve her $a_1, \ldots, a_n \in A$ için

$$R^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \iff R^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)) \tag{4.1}$$

sağlanmışsa bir **gömme** denir. Gömmeleri $h : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ ile göstereceğiz. $h : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ gömme ve ayrıca $h : A \to B$ bir tam eşleme ise h'ye $\mathfrak{A}$ yapısından $\mathfrak{B}$ yapısına bir **eşyapı dönüşümü** (veya bir **izomorfizm**) denir. Böyle bir durumda $\mathfrak{A}$ yapısı $\mathfrak{B}$ ile **eşyapılıdır** (veya **izomorfiktir**) denir ve bu $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ ile gösterilir. $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ bir eşyapı dönüşümü ise bunu $h : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{B}$ ile gösterelim. $h : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}$ tipindeki eşyapı dönüşümlerine $\mathfrak{A}$ yapısının **özeşyapı** dönüşümleri veya **otomorfizm**leri denir.

Önerme 4.1.6 *$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in \operatorname{Yap} L$ olmak üzere $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ve $g : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ yapı dönüşümleri iseler $g \circ h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ de bir yapı dönüşümüdür. h ve g birer gömme(veya eşyapı) dönüşümü iseler $g \circ h$ de bir gömme (veya eşyapı) dönüşümüdür.*

Kanıt. Apaçık. ■

Örnek 4.1.7 $L_s = \{<\}$ diline ilişkin $\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$ yapıları şöyle verilsinler. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $<^{\mathfrak{A}} := \{(a, b), (a, c)\}$ ve $<^{\mathfrak{B}} := \{(1, 2), (1, 3),$

$(2,3)\}$. $h : A \to B$ dönüşümü $h(a) := 1$, $h(b) := 2$ ve $h(c) := 3$ olarak tanımlansın. $h : A \to B$ bir tameşleme ve $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ yapı dönüşümüdür, ancak bir gömme ve dolayısıyla bir eşyapı dönüşümü değildir! Dolayısıyla $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ yapı dönüşümünde *h'nin tameşleme olması onun bir eşyapı dönüşümü olmasını gerektirmez!* ▲

$h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ bir yapı dönüşümü ise $h[A] = \{h(a) \mid a \in A\}$ kümesi (4.1.2) teoremindeki koşullarını sağlar ve $\mathfrak{B}$'nin bir altyapısının evrenidir; bu altyapıyı $h[\mathfrak{A}]$ ile göstereceğiz. $h[\mathfrak{A}]$ yapısına $\mathfrak{A}$ yapısının **yapısal resmi** denir. Eğer ayrıca h bir gömme ise $h : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} h[\mathfrak{A}]$ bir eşyapı dönüşümüdür; bu durumda genelde $a \in A$ ile $h(a)$ **özdeşleştirilerek** $\mathfrak{A}$ yapısına $\mathfrak{B}$ yapısının bir altyapısı olarak bakılır ve $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ yazılır.

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \operatorname{Yap} L$, $A \subseteq B$ ve $i_A : A \to B$ dönüşümü her $a \in A$ için $i_A(a) := a$ olarak açıklanan özdeşlik dönüşümü olsun. Tanımların doğrudan bir sonucu olarak $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ *olması için gerek ve yeter koşul* $i_A : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *dönüşümünün bir gömme olmasıdır.*

Önerme 4.1.8 *$h : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}$ bir özeşyapı dönüşümü ve $\psi \in \operatorname{Fm} L$ ile $L' := L \cup \{R_\psi\}$ olmak üzere $\mathfrak{A}' \in \operatorname{Yap} L'$ yapısı $\mathfrak{A}$ yapısının tanımlanabilir yükseltilmesi olsun. Bu durumda $h : \mathfrak{A}' \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}'$ dönüşümü bir özeşyapı dönüşümüdür.*

Kanıt. (4.1)'in $R_\psi^{\mathfrak{A}'}$ için sağlandığını görmek yeterlidir. h bir özeşyapı dönüşümü olduğu için, R_ψ bir n basamaklı bağıntı ise her $a_1, \ldots, a_n \in A$ için

$$R_\psi^{\mathfrak{A}'}(a_1, \ldots a_n) \overset{def}{\iff} \mathfrak{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n] \iff \mathfrak{A} \models \psi[h(a_1), \ldots, h(a_n)]$$
$$\iff R_\psi^{\mathfrak{A}'}(h(a_1), \ldots, h(a_n)).$$

Diğer koşullar h fonksiyonu $\mathfrak{A}$'nın özeşyapı dönüşümü olduğu için sağlanır. ■

Not 4.1.9 (4.1.8) herhangi bir yapıda bir R bağıntısının basit tanımlanabilir olmadığını göstermenin bazen kolay bir yolunu verir. Biz $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ yapısında $<$ bağıntısının basit tanımlanabilir olduğunu görmüştük. Ancak $(\mathbb{Z}, +)$ yapısında $<$ bağıntısı basit tanımlanamaz! Gerçekten de $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(x \rightsquigarrow -x)$ dönüşümü $(\mathbb{Z}, +)$ yapısının bir özeşyapı dönüşümü iken $(\mathbb{Z}, +, <)$ yapısının bir özeşyapı dönüşümü değildir. ▲

Tanım 4.1.10 *$\varphi \in \operatorname{Fm} L$ formülüne herhangi bir niceleyici içermiyorsa bir **açık** formül diyeceğiz*[1].

[1] Kapalı olmayan formüllere "açık" demediğimizi not edelim. Örneğin $\dot{\forall} x\ x \doteq y$ formülü ne açıktır ne de kapalıdır!

Lemma 4.1.11 *$\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$ birer L yapısı olsun ve $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ bir yapı dönüşümü ve $\beta \in N^{\mathfrak{A}}$ bir nesneleme olsun. Her $t \in \operatorname{Tm} L$ için*

$$h(t^{\mathfrak{A}}[\beta]) = t^{\mathfrak{B}}[h \circ \beta] \tag{4.2}$$

Kanıt. Kanıtı TTK ile vereceğiz.

(a) $t \doteq c,\ c \in \mathcal{C}$ olsun. Bu durumda (4.2) eşitliği $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$ eşitliğidir ve doğrudur.

(b) $t \doteq x$ olsun. Bu durumda (4.2)'nin sol yanı $h(\beta(x))$ iken sağ yanı $(h \circ \beta)(x)$'tir ve eşitlik sağlanır.

(c) $t = ft_1 \cdots t_n$ olsun ve eşitlik $t_1, \ldots, t_n$ için kanıtlanmış olsun. Bu durumda $t^{\mathfrak{A}}[\beta] = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\beta], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[\beta])$ olduğundan

$$\begin{aligned} h(t^{\mathfrak{A}}[\beta]) &= h(f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\beta], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[\beta])) \\ &= f^{\mathfrak{B}}\left(h(t_1^{\mathfrak{A}}[\beta]), \ldots, h(t_n^{\mathfrak{A}}[\beta])\right),\ h \text{ yapı dönüşümü} \\ &= f^{\mathfrak{B}}\left(t_1^{\mathfrak{B}}[h \circ \beta], \ldots, t_n^{\mathfrak{B}}[h \circ \beta]\right), \text{ varsayım} \\ &= t^{\mathfrak{B}}[h \circ \beta]. \end{aligned}$$

■

Teorem 4.1.12 (Gömme Teoremi) *$\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$ birer L yapısı olsun. $h : A \to B$ dönüşümünün bir $h : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ gömmesi olması için gerek ve yeter koşul her atomik $\varphi \in \operatorname{At} L$ formülü ve her $\beta \in N^{\mathfrak{A}}$ nesnelemesi için*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[h \circ \beta] \tag{4.3}$$

olmasıdır.

Kanıt. Elbette $\beta \in N^{\mathfrak{A}}$ ise $h \circ \beta \in N^{\mathfrak{B}}$.

$\Longrightarrow$: 1. φ formülümüz $t_1 \doteq t_2$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models t_1 \doteq t_2[\beta] &\iff t_1^{\mathfrak{A}}[\beta] = t_2^{\mathfrak{A}}[\beta] \\ &\iff h(t_1^{\mathfrak{A}}[\beta]) = h(t_2^{\mathfrak{A}}[\beta]),\ h \text{ birebir} \\ &\iff t_1^{\mathfrak{B}}[h \circ \beta] = t_2^{\mathfrak{B}}[h \circ \beta], \text{ (4.2)} \\ &\iff \mathfrak{B} \models t_1 \doteq t_2[h \circ \beta]. \end{aligned}$$

2. Şimdi φ formülümüz $Rt_1 \cdots t_n$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models Rt_1 \cdots t_n[\beta] &\iff (t_1^{\mathfrak{A}}[\beta], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[\beta]) \in R^{\mathfrak{A}} \\ &\iff \left(h(t_1^{\mathfrak{A}}[\beta]), \ldots, h(t_n^{\mathfrak{A}}[\beta])\right) \in R^{\mathfrak{B}},\ h \text{ gömme} \\ &\iff (t_1^{\mathfrak{B}}[h \circ \beta], \ \ldots, \ t_n^{\mathfrak{B}}[h \circ \beta]) \in R^{\mathfrak{B}}, \text{(4.2)} \\ &\iff \mathfrak{B} \models Rt_1 \cdots t_n[h \circ \beta]. \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$: Ölçüt sağlansın.

(1) h *birebirdir:* $x \doteq y$ atomik formülüne (4.3) uygulanırsa her $a_1, a_2 \in A$ için $\beta(x) := a_1$ ve $\beta(y) := a_2$ seçerek $a_1 = a_2 \iff h(a_1) = h(a_2)$ elde ederiz. Bu, savı kanıtlar.

(2) $R \in \mathcal{R}_n$ ve $a_1, \ldots, a_n \in A$ olsun. (4.3) $Rx_1 \cdots x_n$ atomik formülüne uygulanırsa

$$R^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \iff R^{\mathfrak{B}}\left(h(a_1), \ldots, h(a_n)\right).$$

(3) Şimdi $f \in \mathcal{F}_n$ ve $a_1, \ldots, a_n, a \in A_n$ olsun. (4.3) $f\left(\overline{x_n}\right) \doteq y$ atomik formülüne uygulanırsa

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{A} \models f\left(\overline{x_n}\right) \doteq y\ [\overline{a_n}, a] & \iff & \mathfrak{B} \models f\left(\overline{x_n}\right) \doteq y\ 1[\overline{h(a_n)}, h(a)] \\ f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = a & \iff & f^{\mathfrak{B}}\left(h(a_1), \ldots, h(a_n)\right) = h(a) \\ h\left(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)\right) & = & f^{\mathfrak{B}}\left(h(a_1), \ldots, h(a_n)\right). \end{array}$$

(4) $c \in \mathcal{C}$ olmak üzere $x \doteq c$ atomik formülü ve $a \in A$ olmak üzere (4.3)'ten $\mathfrak{A} \models x \doteq c\,[a] \iff \mathfrak{B} \models x \doteq c\,[h(a)]$, dd $a = c^{\mathfrak{A}} \iff h(a) = c^{\mathfrak{B}}$, dolayısıyla $h\left(c^{\mathfrak{A}}\right) = c^{\mathfrak{B}}$ elde edilir.

(1), (2), (3) ve (4) birlikte h'nin gömme olduğunu söyler. ■

Sonuç 4.1.13 *$h : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ olması için gerek ve yeter koşul her açık φ ve her $\beta \in N^{\mathfrak{A}}$ nesnelemesi için*

$$\mathfrak{A} \models \varphi\,[\beta] \iff \mathfrak{B} \models \varphi\,[h \circ \beta]. \tag{4.4}$$

Sonuç 4.1.14 *$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ ise her açık $\varphi = \varphi\left(\overline{x_n}\right)$ ve her $\overline{a_n} \in A$ için*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n].$$

Kanıt. (4.1.13)'ün kanıtı: (4.1.12)'den dolayı yalnızca (4.1.13)'ün $\Longrightarrow$ yönünü kanıtlamak yeterlidir. (4.4)'ün her $\varphi \in \mathrm{At}\,L$ için sağlandığını biliyoruz. Şimdi ψ, η açık formüller olmak üzere:

(a) $\varphi = \neg\psi$ ve sav ψ için kanıtlanmış olsun. $\mathfrak{A} \models \varphi\,[\beta] \iff \mathfrak{A} \models \neg\psi\,[\beta] \iff \mathfrak{A} \not\models \psi\,[\beta] \overset{vrs}{\iff} \mathfrak{B} \not\models \psi\,[h \circ \beta] \iff \mathfrak{B} \models \neg\varphi\,[h \circ \beta] \iff \mathfrak{B} \models \varphi\,[h \circ \beta]$.

(b) $\varphi = \psi \to \eta$ ve savımız ψ ve η için kanıtlanmış olsun.

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{A} \models \varphi\,[\beta] & \iff & \mathfrak{A} \models \psi\,[\beta] \text{ ise } \mathfrak{A} \models \eta\,[\beta] \\ & \iff & \mathfrak{B} \models \psi\,[h \circ \beta] \text{ ise } \mathfrak{B} \models \eta\,[h \circ \beta], \text{ vrs} \\ & \iff & \mathfrak{B} \models \varphi\,[h \circ \beta]. \end{array}$$

(4.1.14)'ün kanıtı: $i : A \hookrightarrow B$ gömmesi olmak üzere her $\beta \in N^{\mathfrak{A}}$ için $i \circ \beta = \beta$ olduğundan sav doğrudan (4.1.12)'den çıkar. ■

Teorem 4.1.15 (Eşyapı Teoremi) $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \operatorname{Yap} L$ *ve* $h : \mathfrak{A} \overset{\frown}{\to} \mathfrak{B}$ *ise her* $\varphi = \varphi(\overline{x_n}) \in \operatorname{Fm} L$ *her* $\beta \in N^{\mathfrak{A}}$ *ve her* $\overline{a_n} \in A$ *için*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[h \circ \beta], \text{ dd.} \tag{4.5}$$

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[h(a_1), \ldots, h(a_n)]. \tag{4.6}$$

Bunun bir sonucu olarak $h : \mathfrak{A} \overset{\frown}{\to} \mathfrak{B}$ *ise her* φ *için*

$$\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{B} \models \varphi,$$

dd. $\operatorname{Dog} \mathfrak{A} = \operatorname{Dog} \mathfrak{B}$ *ve* $\operatorname{Th} \mathfrak{A} = \operatorname{Th} \mathfrak{B}$.

Kanıt. $\beta \in N^{\mathfrak{A}}$ keyfi verilsin ve $\gamma = h \circ \beta$ olsun. (4.1.12)'den (4.5) her açık φ için doğrudur. $\varphi = \dot{\forall} x \psi$ olsun ve savımız ψ için kanıtlanmış olsun.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \dot{\forall} x \varphi[\beta] &\iff \forall a \in A\ \mathfrak{A} \models \psi[\beta^a_x] \\
&\overset{tvk}{\iff} \forall a \in A\ \mathfrak{B} \models \psi[h \circ \beta^a_x] \\
&\iff \forall a \in A\ \mathfrak{B} \models \psi\left[\gamma_x^{h(a)}\right],\ h \circ \beta^a_x = \gamma^{h(a)} \\
&\iff \forall b \in B\ \mathfrak{B} \models \psi\left[\gamma^b_x\right],\ h \text{ tameşleme} \\
&\iff \mathfrak{B} \models \dot{\forall} x \psi[\gamma].
\end{aligned}$$

Böylece her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ için (4.5) sağlanmış olur. ■

(4.1.15)'in bir sonucu her $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ için $\operatorname{Mod} \Gamma$ sınıfının eşyapıya göre kapalı olmasıdır, dd. her $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \operatorname{Yap} L$ için $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ ise $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod} \Gamma \iff \mathfrak{B} \in \operatorname{Mod} \Gamma$.

Tanım 4.1.16 *L dilinin atomik formüllerinin kümesi* $\operatorname{At} L$ *olmak üzere*

$$\operatorname{Bz} L := \operatorname{At} L \cup \{\neg\varphi \mid \varphi \in \operatorname{At} L\}$$

kümesine L dilinin ***baz formülleri*** *kümesi denir.*

Önerme 4.1.17 $\mathfrak{A}$ *ve* $\mathfrak{B}$ *birer L yapısı olsunlar.* $h : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ *olması için gerek ve yeter koşul her* $\varphi \in \operatorname{Bz} L$ *baz formülü ve her* $\beta \in N^{\mathfrak{A}}$ *için*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \implies \mathfrak{B} \models \varphi[h \circ \beta] \tag{4.7}$$

olmasıdır.

Kanıt. h bir gömme ise ölçütün sağlandığını (4.1.13)'ten biliyoruz.

Tersine ölçüt sağlanmışsa geriye her $\varphi \in \operatorname{At} L$ için (4.3)'ün $\Longleftarrow$ yönünü kanıtlamak kalır. $\varphi \in \operatorname{At} L$ verilsin. $\neg\varphi \in \operatorname{Bz} L$ olduğundan (4.7) ile $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[\beta] \implies \mathfrak{B} \models \neg\varphi[h \circ \beta]$, dd. $\mathfrak{A} \not\models \varphi[\beta] \implies \mathfrak{B} \not\models \varphi[h \circ \beta]$ yani $\mathfrak{B} \models \varphi[h \circ \beta] \implies \mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ elde ederiz. ■

Sonuç 4.1.18 *$\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$ birer L yapısı ve $A \subseteq B$ olsun. $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ olması için gerek ve yeter koşul her $\varphi = \varphi(\overline{x_n}) \in \mathrm{Bz}\, L$ baz formülü ve her $\overline{a_n} \in A$ için*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots a_n] \implies \mathfrak{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$$

olmasıdır.

Kanıt. (4.1.17)'yi $i_A : A \to B$ özdeşliğine uygulamak yeterlidir. ■

Not 4.1.19 Bir $\mathfrak{A} = \left(A, L^{\mathfrak{A}}\right) \in \mathrm{Yap}\, L$ yapısı ve bir $h : A \rightleftarrows B$ tameşlemesi verilsin. Bir $\mathfrak{B} = (B, L^{\mathfrak{B}})$ yapısını şöyle tanımlayalım. Her $f \in \mathcal{F}_n$, her $R \in \mathcal{R}_n$, her $c \in \mathcal{C}$ ve her $b_1, \ldots, b_n \in B$ için

$$\begin{aligned} f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n) &:= f^{\mathfrak{A}}\left(h^{-1}(b_1), \ldots, h^{-1}(b_n)\right) \\ (b_1, \ldots, b_n) \in R^{\mathfrak{B}} &: \iff \left(h^{-1}(b_1), \ldots, h^{-1}(b_n)\right) \in R^{\mathfrak{A}} \\ c^{\mathfrak{B}} &:= h(c^{\mathfrak{A}}). \end{aligned}$$

Bu $\mathfrak{B}$ yapısı genelde $h_*\mathfrak{A}$ ile gösterilir ve tanımların doğrudan sonucu olarak $h : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} h_*\mathfrak{A}$ bir eşyapı dönüşümü, dolayısıyla $\mathfrak{A} \cong h_*\mathfrak{A}$. Bu $h_*\mathfrak{A}$ yapısına $\mathfrak{A}$ yapısının h altında **doğrudan resmi** de denir. Eğer $h : A \rightleftarrows B$ tameşlemesi ve bir $\mathfrak{B} = (B, L^{\mathfrak{B}})$ yapısı verilmişse, $g := h^{-1}$ olmak üzere $h^*\mathfrak{B} := g_*\mathfrak{B}$ yapısına $\mathfrak{B}$ yapısının h altında **ters resmi** denir.

$h : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ bir gömme ise matematikte biz iki farklı biçimde $\mathfrak{A}$ yapısını $\mathfrak{B}$'nin bir altyapısı olarak görürüz. Birinci yolda $\mathfrak{A}$ yapısını $h[\mathfrak{A}]$ ile özdeş kılarız. İkinci yolda ise $C := B \backslash h[A]$ ile eşgüçlü ve A ile ayrık bir D kümesi seçeriz. $f : C \rightleftarrows D$ bir tameşleme olmak üzere

$$g : B \to A \sqcup D,\ g(x) := \begin{cases} y & ,\ x \in h[A] \text{ ve } h(y) = x \\ f(x) & ,\ x \in C \end{cases}$$

ile tanımlanan g fonksiyonu bir tam eşlemedir. $\mathfrak{A} \subseteq g_*\mathfrak{B}$ olduğu aşikârdır. $\mathfrak{B}$ yapısını $g_*\mathfrak{B}$ yapısıyla özdeşleyerek $\mathfrak{A}$ yapısının $\mathfrak{B}$'nin altyapısı olduğunu söyleriz. ▲

4.1.1 Benzeşmeler

Tanım 4.1.20 ($\mathfrak{A}$ yapısında benzeşmeler) *$\mathfrak{A} \in \mathrm{Yap}\, L$ verilsin. A kümesindeki bir $\backsim$ denklik bağıntısına aşağıdaki koşullar sağlandığında $\mathfrak{A}$ yapısında bir **benzeşme** denir: Her $R \in \mathcal{R}_n$, her $f \in \mathcal{F}_n$ ve $a_i, b_i \in A$ için $a_i \backsim b_i,\ 1 \leq i \leq n$ ise*

$$\begin{aligned} (a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}} &\iff (b_1, \ldots, b_n) \in R^{\mathfrak{A}}, \\ f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) &= f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_n). \end{aligned}$$

$\backsim$ bağıntısı $\mathfrak{A}$ yapısında bir benzeşme ise her $a \in A$ için $[a]$ ile a öğesinin $\backsim$'ye göre denklik sınıfın gösterelim. $A/_{\backsim} := \{[a] \mid a \in A\}$ olmak üzere evreni $A/_{\backsim}$ olan bir $\mathfrak{A}/_{\backsim} \in \operatorname{Yap} L$ tanımlayacağız. Her $R \in \mathcal{R}_n$, $f \in \mathcal{F}_n$ ve her $[a_1], \ldots, [a_n] \in A_{\backsim}$ için

$$\begin{aligned} f^{\mathfrak{A}/_{\backsim}}([a_1], \ldots, [a_n]) &:= [f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)], \\ ([a_1], \ldots, [a_n]) \in R^{\mathfrak{A}/_{\backsim}} &:\Longleftrightarrow (a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}}, \\ c^{\mathfrak{A}/_{\backsim}} &:= [c^{\mathfrak{A}}],\ c \in \mathcal{C} \end{aligned}$$

olarak verilen tanımlar kusursuzdur. $\mathfrak{A}/_{\backsim} = \left(A/_{\backsim}, L^{\mathfrak{A}/_{\backsim}}\right) \in \operatorname{Yap} L$ yapısına $\backsim$ benzeşmesine göre $\mathfrak{A}$ yapısının **bölüm yapısı** denir ve bu yapı genel olarak $\mathfrak{A}/_{\backsim}$ ile gösterilir.

Önerme 4.1.21 *Her $a \in A$ için $q(a) := [a]$ olarak açıklanan q bölüm dönüşümü bir örten $q : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/_{\backsim}$ yapı dönüşümüdür.*

Kanıt. Doğrudan tanımlardan çıkar. ■

Not: Biz $\doteq$ imini $\mathfrak{A}$ yapısında daima özdeşlik olarak yorumladık, dd. $\doteq^{\mathfrak{A}}$ olarak $=$ bağıntısını açıkladık ve bu tür modellere normal modeller dedik. Ancak $\doteq^{\mathfrak{A}}$ olarak A kümesinde herhangi bir $\backsim$ benzeşmesini de seçebiliriz; böyle bir yorumda da Eşitlik İlksavları $\mathfrak{A}$ yapısında doğrudurlar. Bu tipten modellerimiz normal değildirler, ancak onlardan doğal biçimde bir $\mathfrak{A}/_{\backsim}$ normal modeline geçilir.

Teorem 4.1.22 (Yapısallık Teoremi) *$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ yapıları birer L-cebiri, yani $\mathcal{R} = \emptyset$ ise her $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ yapı dönüşümü için*

$$E_h := \{(a, b) \mid h(a) = h(b)\}$$

bağıntısı $\mathfrak{A}$ için bir benzeşmedir ve $\mathfrak{A}/_{E_h} \cong h[\mathfrak{A}]$.

Kanıt. E_h'nin bir denklik bağıntısı olduğu aşikârdır. Şimdi $1 \leq i \leq n$ için $(a_i, a_i') \in E_h$ ve $f \in \mathcal{F}_n$, $R \in \mathcal{R}_n$ olsun. $b_i \in B$ öğeleri için $h(a_i) = h(a_i') = b_i$ olmak üzere h bir yapı dönüşümü olduğundan

$$h(f^{\mathfrak{A}}(\overline{a_n})) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)) = f^{\mathfrak{B}}\left(h\left(a_1'\right), \ldots, h(a_n')\right) = h(f^{\mathfrak{A}}(\overline{a_n'}))$$

dolayısıyla $\left(f^{\mathfrak{A}}(\overline{a_n}), f^{\mathfrak{A}}(\overline{a_n'})\right) \in E_h$ olur. Benzer bir irdeleme R için de yapılabilir, dolayısıyla h bir benzeşmedir. ■

4.2 Basit Denklik ve Basit Altyapılar

$\operatorname{Th}\mathfrak{A}$ kuramını diğer $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ kuramlarından ayıran temel özellik aşağıdaki verilerden görülür. Her $\sigma \in \operatorname{Sav} L$ için

- $\operatorname{Th}\mathfrak{A} \Vdash \sigma \iff \mathfrak{A} \models \sigma$.
- $\Gamma \Vdash \sigma \iff$ Her $\mathfrak{B} \in \operatorname{Mod}\Gamma$ için $\mathfrak{B} \models \sigma$.

Dolayısıyla σ savının $\operatorname{Th}\mathfrak{A}$ kuramından çıkması *bir tek* $\mathfrak{A}$ modelinde doğru olmasına denktir; Γ kuramından çıkması ise Γ'nın *her* $\mathfrak{B}$ modelinde doğru olması demektir. $\operatorname{Th}\mathfrak{A}$ tutarlı ve tamdır. (3.7.26)'dan $\mathfrak{B} \models \operatorname{Th}\mathfrak{A}$ ise $\operatorname{Th}\mathfrak{B} = \operatorname{Th}\mathfrak{A}$.

Tanım 4.2.1 *$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \operatorname{Yap} L$ olmak üzere*

$$\mathfrak{A} \equiv_b \mathfrak{B}, \textit{ dd. } \mathfrak{A} \textit{ ve } \mathfrak{B} \textbf{\textit{ basit denktir}} : \iff \operatorname{Th}\mathfrak{A} = \operatorname{Th}\mathfrak{B}.$$

Eşyapı Teoremi'nden ve az önce söylenenden aşağıdaki önermeyi elde ederiz.

Lemma 4.2.2 *$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \operatorname{Yap} L$ olsunlar.*

(1) $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \implies \mathfrak{A} \equiv_b \mathfrak{B}$.

(2) $\mathfrak{B} \in \operatorname{Mod}(\operatorname{Th}\mathfrak{A})$, *dd.* $\mathfrak{B} \models \operatorname{Th}\mathfrak{A} \implies \operatorname{Th}\mathfrak{A} = \operatorname{Th}\mathfrak{B}$.

(3) $\mathfrak{A} \equiv_b \mathfrak{B} \iff \operatorname{Dog}\mathfrak{A} = \operatorname{Dog}\mathfrak{B}$.

(4) $\equiv_b$ *$\operatorname{Yap} L$ sınıfında bir denklik bağıntısıdır.*

Önerme 4.2.3 *Tutarlı $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ için aşağıdaki önermeler denktirler:*

1. Γ tamdır.

2. Her $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod}\Gamma$ için $\operatorname{Th}\mathfrak{A} = \operatorname{Bt}\Gamma$.

3. Her $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \operatorname{Mod}\Gamma$ için $\mathfrak{A} \equiv_b \mathfrak{B}$.

Kanıt. (1) $\implies$ (2): (3.7.26).

(2) $\implies$ (3): $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \operatorname{Mod}\Gamma$ için $\operatorname{Th}\mathfrak{A} = \operatorname{Bt}\Gamma = \operatorname{Th}\mathfrak{B}$.

(3) $\implies$ (1): $\sigma \in \operatorname{Sav} L$ ve $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod}\Gamma$ olsun. $\mathfrak{A} \models \sigma$ ise varsayımdan her $\mathfrak{B} \in \operatorname{Mod}\Gamma$ için $\mathfrak{B} \models \sigma$, dolayısıyla $\Gamma \Vdash \sigma$; buradan da $\Gamma \vdash \sigma$. Eğer $\mathfrak{A} \not\models \sigma$ ise $\mathfrak{A} \models \neg\sigma$ ve benzer biçimde $\Gamma \vdash \neg\sigma$ olur. ■

Sonuç 4.2.4 *$\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$'nin tam olması için gerek ve yeter koşul Γ'nın herhangi bir modelinde doğru olan bir $\sigma \in \operatorname{Sav} L$ savının Γ'nın her modelinde doğru olmasıdır.*

Kanıt. Γ'nın tutarlı olmasını (4.2.3)'te tartıştık. Γ tutarsızsa $\operatorname{Bt}\Gamma = \operatorname{Sav} L$ olduğundan sav aşikârdır. ■

Herhangi bir $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramı için bir $\sigma \in \operatorname{Sav} L$ savını $\mathcal{K}$ kuramının bir modelinde doğru ve bir başka modelinde yanlış olacak biçimde bulabiliyorsak bu kuram tam olamaz! Bu koşullar altında ne $\sigma \in \operatorname{Bt}\mathcal{K}$ ne de $\neg\sigma \in \operatorname{Bt}\mathcal{K}$ olur. Bu basit ölçütle matematikteki bir çok kuramın tam olmadığını kolayca görebiliriz. Örneğin $\mathcal{K}_g$ Gruplar Kuramı'na ilişkin $\dot{\forall} x, y\,(x \bullet y \doteq y \bullet x)$ savı Abel gruplarında doğrudur, ancak diğer gruplarda yanlıştır; bu nedenle $\mathcal{K}_g$ tam değildir.

$\mathcal{D}$, abecemizde olmayan yeni sabit imleri olmak üzere $L' = L \sqcup \mathcal{D}$ olsun. Bize bir $\mathfrak{A}' \in \operatorname{Yap} L'$ verilsin. $A := A' = |\mathfrak{A}'|$ olmak üzere $\mathfrak{A} := \mathfrak{A}' \restriction L$ olsun. $\mathfrak{A}'$ yapısı bu $\mathfrak{A}$ yapısı artı $\mathcal{D}^{\mathfrak{A}'} \subseteq A$ yorumlarından oluşur. Bu nedenle

$$\mathfrak{A}' = (\mathfrak{A}, \mathcal{D}^{\mathfrak{A}'}) = (\mathfrak{A}, (d^{\mathfrak{A}'})_{d\in\mathcal{D}}),\ \mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L \ \text{ ve } \ \mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \restriction L,\ (d^{\mathfrak{A}'} \in A!)$$

gösterimini yeğleyeceğiz. Daha önce $B \subseteq A$ olmak üzere $L_B = L \sqcup L_B$ dil genişletmelerini inceledik. $\mathfrak{A}_B$ yapısı her bir $\mathbf{b}$'nin b olarak yorumlandığı yapılardır. $\mathfrak{A}_B = (\mathfrak{A}, (b)_{\mathbf{b}\in\mathbf{B}})$ yapısını yalın olarak $\mathfrak{A}_B = (\mathfrak{A}, B)$ ile göstereceğiz. Biz özellikle $\mathfrak{A}_A$ yapısını, ki bu yeni gösterimlerle $\mathfrak{A}_A = (\mathfrak{A}, A)$ şeklini alır, daha önce tartıştık. Şimdi $\mathfrak{A}_A$ için elde ettiğimiz bir ilişkiyi $\mathfrak{A}' = (\mathfrak{A}, \mathcal{D}^{\mathfrak{A}'})$ yapılarına taşıyacağız. Eğer $\mathcal{D} = \{d_1, \ldots, d_n\}$ bir sonlu kümeyse $(\mathfrak{A}, \mathcal{D}^{\mathfrak{A}'})$ yerine $(\mathfrak{A}, d_1^{\mathfrak{A}'}, \ldots, d_n^{\mathfrak{A}'})$ de yazacağız.

Önerme 4.2.5 *$\mathcal{D}$, abecemizde olmayan yeni sabit imleri olmak üzere $L' = L \sqcup \mathcal{D}$, $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ ve $\mathfrak{A}' = \left(\mathfrak{A}, (d^{\mathfrak{A}'})_{d\in\mathcal{D}}\right)$ olsun. Her $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{Fm} L$ ve her $d_1, \ldots, d_n \in \mathcal{D}$ için*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[d_1^{\mathfrak{A}'}, \ldots, d_n^{\mathfrak{A}'}] \iff \mathfrak{A}' \models \varphi\,(d_1, \ldots, d_n)\,. \tag{4.8}$$

Kanıt. (3.5.34)(2)'de $\beta(x_i) = d_i^{\mathfrak{A}'}$ alırsak

$$\mathfrak{A}' \models \varphi[d_1^{\mathfrak{A}'}, \ldots, d_n^{\mathfrak{A}'}] \iff \mathfrak{A}' \models \varphi\,(d_1, \ldots, d_n)\,[\beta]$$

elde ederiz. $\varphi\,(d_1, \ldots, d_n)$ bir sav olduğundan β'dan bağımsızdır. Diğer yandan $\varphi[d_1^{\mathfrak{A}'}, \ldots, d_n^{\mathfrak{A}'}] \in \operatorname{Fm} L$ olduğundan $\mathfrak{A}' \models \varphi[d_1^{\mathfrak{A}'}, \ldots, d_n^{\mathfrak{A}'}]$ önermesi $\mathfrak{A} \models \varphi[d_1^{\mathfrak{A}'}, \ldots, d_n^{\mathfrak{A}'}]$'den başka bir şey değildir. ■

Dikkat edilirse (4.8), $\mathfrak{A}_A$ için daha önce kanıtını okura bıraktığımız

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \iff \mathfrak{A}_A \models \varphi\,(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

bağıntımızı genelleştirir.

Teorem 4.2.6 *L dilinin her* sonsuz $\mathfrak{A}$ *yapısına karşılık* $\mathfrak{A}$ *yapısına basit denk ancak eşyapılı olmayan bir* $\mathfrak{B} \in \operatorname{Yap} L$ *vardır.*

Kanıt. $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ sonsuz olsun. κ çokluk sayısını $\kappa > \max(|A|, \|L\|)$ olacak biçimde seçelim. (3.17.6) Yukarı Doğru Löwenheim-Skolem Teoremi'nden dolayı $\operatorname{Th}\mathfrak{A}$'nin gücü κ olan bir $\mathfrak{B} \in \operatorname{Yap} L$ modeli vardır. (4.2.3)(3)'ten dolayı $\mathfrak{A} \equiv_b \mathfrak{B}$, ancak $|B| > |A|$ olduğundan $\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$ eşyapılı olamazlar. ■

Not 4.2.7 (4.2.6) bize hiçbir sonsuz yapının birinci dereceden aksiyomlarla eşyapı dışında tek olarak belirlenemeyeceğini söyler. İkinci dereceden dil kullanıldığında $\mathcal{K}_a^2$'nin modellerinin eşyapı dışında tek olarak belirlendiğini biliyoruz. Yine $(\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1)$ eşyapı dışında tek olarak belirli tam sıralanmış cisimdir. Ancak burada da

$$\dot{\forall} Y(\emptyset \neq Y \text{ sınırlı} \implies \exists x(x = \sup Y))$$

tamlık aksiyomu birinci dereceden dille biçimselleştirilemez. Daha ilginci $\operatorname{Th}\mathfrak{N}$'nın $\mathfrak{N}$ ile eşyapılı olmayan sayılabilir modelleri vardır. $\mathfrak{N}$ ve $\mathfrak{R}$'nin bunlarla basit denk ancak eşyapılı olmayan modellerine *yaban* (veya *aykırı*, *standart dışı*) modeller denir. ▲

Teorem 4.2.8 $\operatorname{Th}\mathfrak{N}$*'nın* $\mathfrak{N}$ *ile eşyapılı olmayan ancak* $\mathfrak{N}$*'ye basit denk olan sayılabilir modelleri vardır, dd.* $\mathfrak{N}$ *sayılabilir yaban modellere sahiptir.*

Kanıt. L_a diline yeni bir c sabit imi katacağız: $L' := L_a \cup \{c\}$ ve değişkenler kümemizi sayılabilir, dd. $\|L_a\| = \aleph_0$ seçeceğiz.

$$\Sigma := \{\neg(c \doteq \underline{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

olsun. $\operatorname{Th}\mathfrak{N}$'nın bir sonsuz $\mathfrak{N}$ modeli olduğundan ve her sonlu $\Delta \subseteq \operatorname{Th}\mathfrak{N} \cup \Sigma$'nın da bir modeli olduğundan, Kompaktlık Teoremi'yle $\operatorname{Th}\mathfrak{N} \cup \Sigma$'nin bir $\mathfrak{B}$ modeli vardır. $\mathfrak{B}$ yapısının evrenini $\mathbb{N}'$ ile gösterelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\underline{n}^{\mathfrak{B}}$ yerine yalın olarak n' yazalım. $\mathfrak{B}$ yapısı $\operatorname{Th}\mathfrak{N}$'nin bir modeli olduğundan $m \neq n$ için $m' \neq n'$ olur, dolayısıyla $\mathbb{N}'$ bir sonsuz kümedir. (3.17.6)'dan dolayı $|\mathbb{N}'| = \aleph_0$ seçilebilir. $\mathfrak{N}' := \mathfrak{B} \restriction L_a$ olsun. Bu durumda $\mathfrak{N}' \in \operatorname{Yap} L_a$ ve $\mathfrak{B} = \left(\mathfrak{N}', c^{\mathfrak{B}}\right)$. Elbette $\mathfrak{N}'$ yapısı $\operatorname{Th}\mathfrak{N}$'nin bir modelidir, dolayısıyla $\mathfrak{N}' \equiv_b \mathfrak{N}$ (bkz. (4.2.2)(2)). $h : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}'$ herhangi bir yapı dönüşümü olsun. (4.2)'den dolayı her sabit t terimi için $h(t^{\mathfrak{N}}) = t^{\mathfrak{B}}$ olacağından her sabit $\underline{n} \in \operatorname{Tmc} L_a$ için

$$h(n) = h(\underline{n}^{\mathfrak{N}}) = \underline{n}^{\mathfrak{N}'} = n'$$

olacaktır (bunu $h(0) = h(\mathbf{0}^{\mathfrak{N}}) = \mathbf{0}^{\mathfrak{N}'} = 0'$'den yola çıkarak doğrudan tümevarımla da görebilirsiniz). Dolayısıyla $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$ birebirdir. L_a dilimiz

bağıntı imi içermediğinden h bir gömmedir. Ancak h'nin örten olamayacağını savunuyoruz. Gerçekten de $\mathfrak{N}' \models \Sigma$ olduğundan her n doğal sayısı için $n' = \underline{n}^{\mathfrak{B}} \neq c^{\mathfrak{B}}$ olacaktır, dolayısıyla her n doğal sayısı için $h(n) \neq c^{\mathfrak{N}'}$ olur ve $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$ örten olamaz! $\mathfrak{N}$ ve $\mathfrak{N}'$ eşyapılı olamazlar! ■

Teorem 4.2.9 *Her Arşimedik sıralanmış bir cisme karşılık ona basit denk olan Arşimedik sıralanmamış bir cisim vardır.*

Sonuç 4.2.10 *Arşimedik sıralanmamış her cisimde doğru olan bir önerme Arşimedik sıralanmış her cisimde doğrudur.*

Kanıt. $\mathfrak{K}$ Arşimedik sıralanmış bir cisim olsun. $L = \{\dot{+}, \bullet, \prec, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ dilimize yeni bir c sabiti katacağız. $\Sigma := \operatorname{Th}\mathfrak{K} \cup \{\underline{n} \prec c \mid n \in \mathbb{N}\}$ olsun. Σ'nın her sonlu altkümesinin bir modeli olduğundan Σ'nın da bir $\mathfrak{A}$ modeli vardır. Elbette $\mathfrak{A}$ bir sıralanmış cisimdir, ancak her n doğal sayısı için

$$\mathfrak{A} \models n \cdot \mathbf{1}^{\mathfrak{A}} < c^{\mathfrak{A}}$$

olduğundan $\mathfrak{A}$ Arşimedik sıralanmamıştır. Diğer yandan $\mathfrak{A} \models \operatorname{Th}\mathfrak{K}$ olduğundan (4.2.2)(2)'den $\operatorname{Th}\mathfrak{A} = \operatorname{Th}\mathfrak{K}$.

Sonucun kanıtı: $\sigma \in \operatorname{Sav} L$ Arşimedik sıralanmamış her cisimde doğru olsun. $\mathfrak{K}$ Arşimedik sıralanmış cismi keyfi verilsin. $\mathfrak{A}$ teoremdeki gibi seçilirse $\sigma \in \operatorname{Th}\mathfrak{K} = \operatorname{Th}\mathfrak{A}$. ■

Not 4.2.11 (4.2.8)'deki $\mathfrak{N}'$ yapısında ikinci dereceden tümevarım ilkesi doğru değildir. $A := \{n' \mid n \in \mathbb{N}\}$ kümesi için *i)* $0' \in A$ ve *ii)* $n' \in A \implies (n+1)' \in A$ sağlandığı halde $A \neq \mathbb{N}'$, çünkü $c^{\mathfrak{B}} \notin A$! Elbette A kümesi $\mathfrak{N}'$ yapısının basit tanımlanabilir bir altkümesi değildir. ▲

Örnek 4.2.12 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \operatorname{Yap} L$ ve $h : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ bir gömme ise niceleyici içermeyen her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ ve her $\beta \in N^{\mathfrak{A}}$ için $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[h \circ \beta]$ olduğunu biliyoruz. Niceleyici içeren formüller için bu denklik her zaman doğru olmayabilir. Örneğin $\leq$ bağıntısı doğal sayılardaki bildik sıralama olmak üzere $\mathfrak{B} = (\mathbb{N}, \leq)$ ve $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}^*, \leq)$ ve $h : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ dönüşümü her n için $h(n) := n - 1$ olarak açıklansın. $h : \mathfrak{A} \overset{\sim}{\to} \mathfrak{B}$ bir eşyapı dönüşümüdür; çünkü öncelikle h bir tameşlemedir. Diğer yandan her $m, n \in \mathbb{N}^*$ için

$$m \leq n \iff h(m) \leq h(n)$$

sağlandığından h dönüşümü $L = \{\leq\}$ yapıları arasında bir eşyapı dönüşümüdür. $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ olduğu için $\mathfrak{A} \equiv_b \mathfrak{B}$.

Diğer yandan $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, dd. $i_A : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ bir gömme olduğundan her *açık* $\varphi = \varphi(\overline{x_n}) \in \operatorname{Fm} L$ ve her $\overline{a_n} \in A$ için $\mathfrak{A} \models \varphi[\overline{a_n}] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[\overline{a_n}]$. Bu

denklik her φ için doğru mudur? $\varphi(x) := \dot{\forall} y\,(x \leq y)$ formülü için $\beta \in N^{\mathfrak{A}}$ değerlemesini $\beta(x) = 1$ olacak biçimde seçelim. Bu durumda $\mathfrak{A} \models \varphi[1]$ ancak $\mathfrak{B} \not\models \varphi[1]$! Bu türden kusuru olmayan altyapılara basit altyapılar diyeceğiz (bkz. aşağıdaki tanım).

Uyarı: Eşyapı Teoremi'nden dolayı elbette bu φ formülü ve β değerlemesi için, h bir eşyapı dönüşümü olduğundan, elbette $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[h \circ \beta]$. Burada $i_A : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ gömmesi bir eşyapı dönüşümü değildir! ▲

Tanım 4.2.13 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \operatorname{Yap} L$ *olmak üzere bir* $h : A \to B$ *dönüşümüne* her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ *ve her* $\beta \in N^{\mathfrak{A}}$ *için*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[h \circ \beta] \tag{4.9}$$

sağlanmışsa ve ancak bu durumda bir ***basit gömmedir*** *denir.* h *bir basit gömme olduğunda bunu* $h : \mathfrak{A} \hookrightarrow_b \mathfrak{B}$ *ile göstereceğiz. Özellikle* $A \subseteq B$ *durumunda* $i_A : \mathfrak{A} \hookrightarrow_b \mathfrak{B}$ *bir basit gömme ise* $\mathfrak{A}$ *yapısı* $\mathfrak{B}$ *yapısının bir* ***basit altyapısıdır*** *denir; bu durumda* $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ *yazacağız.* $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ *olduğunda* $\mathfrak{B}$ *yapısı* $\mathfrak{A}$ *yapısının bir* ***basit genişlemesidir*** *denir. Böylece*

$$\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B} \Longleftrightarrow \forall \beta \in N^{\mathfrak{A}}\ \forall \varphi \in \operatorname{Fm} L\ \ (\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \Longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[\beta])\,.$$

Not 4.2.14 (4.9)'u açık olarak yazarsak her $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{Fm} L$ ve her $a_1, \ldots, a_n \in A$ için

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, , a_n] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[h(a_1), \ldots, h(a_n)] \tag{4.10}$$

şeklini alır. (4.1.15)'ten biliyoruz ki (4.9) sağlanmışsa h bir gömmedir. Tersine h bir gömme ise (4.9) açık φ formülleri için doğrudur. Bu durumda $h : \mathfrak{A} \hookrightarrow_b \mathfrak{B}$ basit gömmeleri tam da (4.9)'un niceleyiciler içeren formüller için de doğru olduğu $h : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ gömmeleridirler. Elbette $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ olması için gerek ve yeter koşul her $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \Phi^n_s(L)$ için

$$\forall a_1, \ldots a_n \in A\ \ (\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots a_n] \Longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[a_1, \ldots a_n]) \tag{4.11}$$

olmasıdır.

(4.10)'dan her $\sigma \in \operatorname{Sav} L$ için $\mathfrak{A} \models \sigma \iff \mathfrak{B} \models \sigma$, dd. $\operatorname{Th}\mathfrak{A} = \operatorname{Th}\mathfrak{B}$ olur. Böylece $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B} \implies \mathfrak{A} \equiv_b \mathfrak{B}$. Bunun tersinin her zaman doğru olamayacağını örnekledik (bkz. (4.2.12)). ▲

Not 4.2.15 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in \operatorname{Yap} L$ olmak üzere

(1) $h : \mathfrak{A} \hookrightarrow_b \mathfrak{B}, g : \mathfrak{B} \hookrightarrow_b \mathfrak{C} \implies g \circ h : \mathfrak{A} \hookrightarrow_b \mathfrak{C}$.

(2) $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ *ve* $\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{C}$ *ise* $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{C}$.

▲

Önerme 4.2.16 *$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \operatorname{Yap} L$ ve $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ olsun. Her $b_1, \ldots, b_n \in B$ ve her $a \in A$ için bir $h : \mathfrak{A} \overset{\frown}{\to} \mathfrak{A}$ özeşyapı dönüşümü $h(b_i) = b_i,\ i = 1, \ldots, n$ ve $h(a) \in B$ olacak biçimde bulunabiliyorsa $\mathfrak{B}$ yapısı $\mathfrak{A}$ yapısının bir basit altyapısıdır, dd. $\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{A}$.*

Kanıt. $\beta \in N^{\mathfrak{B}}$ ise $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, dd. $i_B : \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{A}$ bir gömme olduğundan (4.10) niceleyici içermeyen formüller için sağlanmıştır. Geriye onun ψ için sağlanmışsa $\varphi = \forall x \psi$ içinde sağlandığını görmek kalıyor. Sav ψ için kanıtlanmış olsun. $N^{\mathfrak{B}} \subseteq N^{\mathfrak{A}}$ olduğunu unutmayalım.

(1)$\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ olsun. Her $a \in A$ için $\mathfrak{A} \models \psi[\beta^a_x]$, dolayısıyla varsayımımızdan her $b \in B$ için $\beta^b_x \in N^{\mathfrak{B}}$ olduğundan $\mathfrak{B} \models \psi\left[\beta^b_x\right]$ elde ederiz ki bu tanım gereği $\mathfrak{B} \models \varphi[\beta]$ demektir.

(2) Şimdi $\mathfrak{A} \not\models \varphi[\beta]$ olsun. En az bir $a \in A$ için $\mathfrak{A} \not\models \psi[\beta^a_x]$ olacaktır. $\operatorname{Sb}\varphi = \{x_1, \ldots, x_n\}$ olsun. $h : \mathfrak{A} \overset{\frown}{\to} \mathfrak{A}$ özeşyapı dönüşümü $h(\beta(b_i)) = \beta(b_i) \in B,\ i = 1, \ldots, n$ ve $h(\beta^a_x(x)) = h(a) \in B$ olacak biçimde seçelim. Eşyapı Teoremi'nden $\mathfrak{A} \not\models \psi[h \circ \beta^a_x]$. Şimdi $h \circ \beta^a_x = (h \circ \beta)^a_x$ ve $\beta^{h(a)}_x$ değerlemeleri $\operatorname{Sb}\varphi$'de çakışırlar, dolayısıyla bunlar $\operatorname{Sb}\psi$'de çakışırlar. Çakışma Teoremi'nden $\mathfrak{A} \not\models \psi[\beta^{h(a)}_x]$, buradan da varsayımımızdan $\mathfrak{B} \not\models \psi[\beta^{h(a)}_x]$ buradan da $\mathfrak{B} \not\models \varphi$ elde ederiz ve bkb. ■

Önerme 4.2.17 (Tarski-Vaught Ölçütü) *$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \operatorname{Yap} L$ ve $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ olsun. $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ olması için gerek ve yeter koşul her $\psi = \psi(x, \overline{x_n})$ formülü ve her $\overline{a_n} \in A$ için bir $b \in B$ ile $\mathfrak{B} \models \psi[b, \overline{a_n}]$ ise bir $a \in A$ ile $\mathfrak{B} \models \psi[a, \overline{a_n}]$ olmasıdır.*

Kanıt. (1) $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ olsun. $\varphi(\overline{x_n}) := \dot{\exists} x \psi(x, \overline{x_n})$ olmak üzere bir $b \in B$ ile $\mathfrak{B} \models \psi[b, \overline{a_n}]$ dd. $\mathfrak{B} \models \varphi[\overline{a_n}]$ olsun. (4.11)'den $\mathfrak{A} \models \varphi[\overline{a_n}]$. Bu ise en az bir $a \in A$ ile $\mathfrak{A} \models \psi[a, \overline{a_n}]$ demektir ki buradan bir kez daha (4.11) ile $\mathfrak{B} \models \psi[a, \overline{a_n}]$ elde ederiz.

(2) Ölçüt sağlansın. (4.11)'in $\Longrightarrow$ yönü aşikârdır. $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ olduğundan $\Longleftarrow$ yönü her açık φ formülü için zaten sağlanmıştır. Niceleyiciler birbirine dönüştürülebileceği için (4.11)'in $\Longleftarrow$ yönünü $\varphi(\overline{x_n}) := \dot{\exists} x \psi(x, \overline{x_n})$ tipinde formüller için göstermek yeterlidir. Şimdi $\overline{a_n} \in A$ olmak üzere $\mathfrak{B} \models \varphi[\overline{a_n}]$ olsun. Dolayısıyla bir $b \in B$ ile $\mathfrak{B} \models \psi[b, \overline{a_n}]$. Ölçütümüzden bir $a \in A$ ile $\mathfrak{B} \models \psi[a, \overline{a_n}]$ olur. Buradan $\mathfrak{A} \models \psi[a, \overline{a_n}]$, dolayısıyla $\mathfrak{A} \models \varphi[\overline{a_n}]$. ■

Teorem 4.2.18 (Tarski) *$\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ ve $B \subseteq A$ olsun. B kümesinin $\mathfrak{A}$'nın bir basit altyapısının evreni olması için gerek ve yeter koşul her $\varphi = \varphi(x) \in \operatorname{Fm} L_B$ için bir $a \in A$ ile $\mathfrak{A} \models \varphi[a]$ ise bir $b \in B$ ile $\mathfrak{A} \models \varphi[b]$ olmasıdır.*

Kanıt. (1) $\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{A}$ olsun. Ölçüt (4.2.17)'den çıkar.

(2) Ölçüt sağlansın. (4.2.17)'den dolayı B kümesinin bir $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ altyapısının evreni olduğunu göstermek yeter; o zaman $\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{A}$ olacaktır.

$x \doteq x$ formülü için her $a \in A$ ile $\mathfrak{A} \models a = a$. Dolayısıyla bir $b \in B$ ile $\mathfrak{A} \models b = b$; öyleyse $B \neq \emptyset$.

$c \in \mathcal{C}$ keyfi verilsin ve bu kez $\varphi(x)$ olarak $x \doteq c$ formülünü alırsak bu formül $c^{\mathfrak{A}} \in A$ ile sağlanır. Varsayımdan dolayı bir $b \in B$ ile de $\mathfrak{A} \models \varphi[b]$ sağlanır, dd. $b = c^{\mathfrak{A}}$. Dolayısıyla $\mathcal{C}^{\mathfrak{A}} \subseteq B$.

Şimdi $f \in \mathcal{F}_n$ ve $b_1, \ldots, b_n \in B$ olsun. $a := f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_n)$ olmak üzere bu kez $x \doteq f(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ formülünü alalım. Bu formül $\mathfrak{A}$ yapısında $a \in A$ ile sağlanır, varsayımdan dolayı bir $b \in B$ ile de $\mathfrak{A}$'da sağlanır, dd. $b = f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_n)$; öyleyse $b = a$ ve B kümesi $f^{\mathfrak{A}}$ altında kapalıdır. (4.1.2)'den dolayı B bir $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ altyapısının evrenidir. ■

Teorem 4.2.19 (Aşağı Doğru Löwenheim-Skolem Teoremi) *$\mathfrak{A}$ bir L yapısı ve $M \subseteq A$ olsun. κ çokluk sayısı $\max(|M|, \|L\|) \leq \kappa \leq |A|$ olacak biçimde keyfi verilsin. Bu koşullarda bir $\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{A}$ basit altyapısı $M \subseteq B$ ve $|B| = \kappa$ olacak biçimde vardır.*

Kanıt. L dilimize her $\varphi(y, x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{Fm} L$ formülümüz için n değişkenli bir f_φ fonksiyon imi katacağız ve $f_\varphi^{\mathfrak{A}}$ yorumunu şöyle açıklayacağız: $a_1, \ldots, a_n \in A$ olmak üzere $\mathfrak{A} \models \varphi[a, a_1, \ldots, a_n]$ olacak biçimde $a \in A$ öğeleri varsa $f_\varphi^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)$ değeri bu a'lardan herhangi biri, böyle öğeler yoksa herhangi bir $a \in A$ olarak açıklansın (Seçme Aksiyomu'nu kullanıyoruz!). $f_\varphi^{\mathfrak{A}}$ fonksiyonlarına $\mathfrak{A}$ yapısının **Skolem fonksiyonları** denir. L dilimizi bu f_φ fonksiyon imlerimizle L' diline zenginleştirip $\mathfrak{A}$ yapımızı ise $\mathfrak{A}' \in \operatorname{Yap} L'$ yapısına yükseltelim. Daha önceki irdelemelerimizden $\|L\| = \|L'\|$ olduğunu biliyoruz.

(4.1.4), $\mathfrak{A}'$ yapısının $|B| = \kappa$ koşulunu sağlayan bir $\mathfrak{B}' = (B, L'^{\mathfrak{B}'})$ altyapısının varlığını garanti eder. Biz $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}' \restriction L$ yapısının $\mathfrak{A}$'nın bir basit altyapısı olduğunu savunuyoruz.

Her şeyden önce $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ olduğu açıktır. (4.2.17)'den yararlanacağız. Şimdi $\psi(x, \overline{x_n}) \in \operatorname{Fm} L$, $\overline{b_n} \in B$ ve $\mathfrak{A} \models \dot{\exists} x \psi \left[\overline{b_n}\right]$ olsun. Bir $a \in A$ ile $a = f_\psi^{\mathfrak{A}}(\overline{b_n})$ olacaktır. B kümesi $\mathfrak{B}'$ altyapısının evreni olduğu için $f_\psi^{\mathfrak{A}}$ dönüşümü altında kapalıdır, dolayısıyla $a \in B$ ve $\mathfrak{B} \models \psi[b, b_1, \ldots, b_n]$ olduğundan $\mathfrak{B} \models \dot{\exists} x \psi \left[\overline{b_n}\right]$ olur. (4.2.17)'den $\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{A}$ olur. ■

Not 4.2.20 L_c cisim dilinin $\mathfrak{Q}$ ve $\mathfrak{R}$ yapılarını alalım. $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{R}$ aşikâr. Ancak $\mathfrak{R} \models \dot{\exists} x \left(x^2 \doteq \mathbf{2}\right)$ iken $\mathfrak{Q} \not\models \dot{\exists} x \left(x^2 \doteq \mathbf{2}\right)$ olduğundan $\mathfrak{Q}$ cismi $\mathfrak{R}$ cisminin bir basit altyapısı değildir. Değişkenler kümemizi sayılabilir seçersek $\|L_c\| = \aleph_0$ olacağından $\mathfrak{R}$'nin bir basit sayılabilir $\mathfrak{Q}'$ altyapısı $\mathbb{Q} \subseteq Q'$ olacak biçimde

vardır. Sayılamaz $\mathbb{R}$ cisminin birinci dereceden teoremleri sayılabilir bir Q' cisminin aynı türden σ teoremleriyle örtüşür. ▲

Önerme 4.2.21 *$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \operatorname{Yap} L$ ve $h : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ (veya $h : \mathfrak{A} \hookrightarrow_b \mathfrak{B}$) ise bir $\mathfrak{B}' \in \operatorname{Yap} L$ yapısı $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}'$ ve $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}'$ (veya $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}'$) olacak biçimde vardır.*

Kanıt. $h : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ ise $h : A \to B$ birebirdir. C kümesini A ile ayrık ve $B \backslash h[A]$ ile eşgüçlü olacak biçimde seçelim. $g : B \to A \sqcup C$ dönüşümü her $b \in B \backslash h[A]$ için $g(b) := b$ ve her $b \in h[A]$ içinse $g(b) := h^{-1}(b)$ olarak açıklansın. g bir tameşlemedir. $\mathfrak{B}' := g_* \mathfrak{B}$ doğrudan resmini alırsak bilindiği gibi $g : \mathfrak{B} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{B}'$ bir eşyapı dönüşümüdür. h bir gömme (veya bir basit gömme) ise $i_A = g \circ h$ de bir gömme (veya bir basit gömmedir). Dolayısıyla $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ (veya $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$). ■

4.2.1 Diyagramlar

Tanım 4.2.22 *$\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ ve $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ olmak üzere*

$$D_\Gamma(\mathfrak{A}) := \{\varphi(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \mid \varphi \in \Gamma \text{ ve } \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]\}$$

*kümesine $\mathfrak{A}$ yapısının **Γ-diyagramı** denir. Özel olarak $D_+(\mathfrak{A}) := D_{\operatorname{At} L}(\mathfrak{A})$ diyagramına $\mathfrak{A}$'nın **pozitif diyagramı**, $D(\mathfrak{A}) := D_{\operatorname{Bz} L}(\mathfrak{A})$'ya $\mathfrak{A}$'nın (Robinson) **diyagramı**, $D_L(\mathfrak{A}) := D_{\operatorname{Fm} L}(\mathfrak{A})$'ya ise $\mathfrak{A}$'nın **basit diyagramı** denir.*

Tanım gereği $D_\Gamma(\mathfrak{A}) \subseteq \operatorname{Sav} L_A$. Her şeyden önce $\mathfrak{A}_A$ hem $D(\mathfrak{A})$'nın hem de $D_L(\mathfrak{A})$'nın bir modelidir. $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ ise (4.1.18)'den dolayı $\mathfrak{B}_A \in \operatorname{Yap} L_A$ yapısı $D(\mathfrak{A})$'nın bir modelidir. Eğer $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \operatorname{Yap} L$ ve $A \subseteq B$ ise (4.1.17)'den dolayı

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \iff \mathfrak{B}_A \models D(\mathfrak{A})$$

olur.

Bize bir $\mathfrak{B}' \in \operatorname{Yap} L_A$ yapısı verilsin ve $B := |\mathfrak{B}'|$ olsun. Bu durumda $\mathfrak{B} := (B, L^{\mathfrak{B}'})$ bir L yapısıdır ve biz $\mathfrak{B}' := (\mathfrak{B}, (\mathbf{a}^{\mathfrak{B}'})_{a \in A})$ yazacağız. Son bir yalınlıkla $\mathbf{a}^{\mathfrak{B}'}$ yerine $\mathbf{a}^{\mathfrak{B}}$ yazacağız. Özet olarak bir L_A yapısı bir $\mathfrak{B} \in \operatorname{Yap} L$ ve ayrıca her $a \in A$ için verilmiş bir $\mathbf{a}^{\mathfrak{B}}$ yorumundan oluşur; burada $\mathbf{a}^{\mathfrak{B}} \neq a$ olabilir. Bu yapılar için $(\mathfrak{B}, (\mathbf{a}^{\mathfrak{B}})_{a \in A})$ gösterimini kullanacağız.

Şimdi $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ ve $(\mathfrak{B}, (\mathbf{a}^{\mathfrak{B}})_{a \in A}) \in \operatorname{Yap} L_A$ verilmiş olsunlar. Bir $h : A \to B$ dönüşümü $h(a) := \mathbf{a}^{\mathfrak{B}}$ olarak tanımlansın; böylece

$$(\mathfrak{B}, (\mathbf{a}^{\mathfrak{B}})_{a \in A}) = (\mathfrak{B}, (h(a))_{a \in A})$$

Bu durumda her $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{Fm} L$ ve her $a_1, \ldots, a_n \in A$ için

$$\begin{aligned}(\mathfrak{B}, (\mathbf{a}^{\mathfrak{B}})_{a\in A}) \models \varphi(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) &\iff \mathfrak{B} \models \varphi[a_1^{\mathfrak{B}}, \ldots, a_n^{\mathfrak{A}}] \\ &\iff \mathfrak{B} \models \varphi[h(a_1), \ldots, h(a_n)]\end{aligned}$$

olduğundan (4.1.17), (4.1.18) ve tanımlardan aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 4.2.23 (Diyagram Teoremi) *$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \operatorname{Yap} L$ ile $(\mathfrak{B}, (\mathbf{a}^{\mathfrak{B}})_{a\in A}) \in \operatorname{Yap} L_A$ olsun. Bir $h : A \to B$ dönüşümü her $a \in A$ için $h(a) := \mathbf{a}^{\mathfrak{B}}$ olarak açıklansın.*

(1) $(\mathfrak{B}, (h(a))_{a\in A}) \models D(\mathfrak{A}) \iff h : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ *bir gömmedir.*

(2) $(\mathfrak{B}, (h(a))_{a\in A}) \models D_L(\mathfrak{A}) \iff h : \mathfrak{A} \hookrightarrow_b \mathfrak{B}$ *bir basit gömmedir.*
Eğer ayrıca $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ ise

(3) $\mathfrak{B}_A \models D(\mathfrak{A}) \iff \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$.

(4) $\mathfrak{B}_A \models D_L(\mathfrak{A}) \iff \mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$.

(5) $\mathfrak{A}_A \equiv_b \mathfrak{B}_A \iff \mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$.

Teorem 4.2.24 ***(Yukarı Doğru Löwenheim-Skolem Teoremi)*** *$\mathfrak{A}$ bir sonsuz L yapısı ve κ ise $\kappa \geq \max(|A|, \|L\|)$ koşulunu sağlayan bir çokluk sayısı olsun. Bu koşullarda $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ ve $|B| = \kappa$ olacak biçimde bir $\mathfrak{B} \in \operatorname{Yap} L$ bulunabilir.*

Kanıt. $\mathfrak{A}_A \in \operatorname{Yap} L_A$ yapısı $D_L(\mathfrak{A})$'nın bir sonsuz modeli olduğundan, $D_L(\mathfrak{A})$'nın (3.17.6)'dan dolayı, $\mathfrak{B}' \in \operatorname{Yap} L$ olmak üzere, gücü κ olan bir $(\mathfrak{B}', (\mathbf{a}^{\mathfrak{B}})_{a\in A}) \in \operatorname{Yap} L_A$ modeli vardır. $h : A \to B'$ dönüşümünü her $a \in A$ için $h(a) := \mathbf{a}^{\mathfrak{B}}$ olarak açıklayalım. $(\mathfrak{B}, (h(a))_{a\in A}) \models D_L(\mathfrak{A})$ olduğundan (4.2.23)(2)'den $h : \mathfrak{A} \hookrightarrow_b \mathfrak{B}'$. (4.2.21) ile $A \subseteq B$ ve bir $g : B' \to B$ tameşlemesi ile $\mathfrak{B} := g_*\mathfrak{B}'$ alırsak dolayısıyla $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ olur ve $|B| = \kappa$. ■

4.2.2 Açık veya Evrensel Kuramlar

Tanım 4.2.25 *$\varphi \in \operatorname{Fm} L$ bir açık formül olmak üzere $\dot\forall x_1 \cdots \dot\forall x_n \varphi$ tipindeki formüllere* ***$\dot\forall$-formülleri*** *(veya* ***evrensel formüller****) ve $\dot\exists x_1 \cdots \dot\exists x_n \varphi$ tipindeki formüllere* ***$\dot\exists$-formülleri*** *(veya* ***varlıksal formüller****) denir. $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ olmak üzere*

$$\Gamma_{\dot\forall} := \{\sigma \in \operatorname{Sav} L \mid \Gamma \vdash \sigma,\ \sigma \text{ evrensel}\}$$

kümesine Γ kuramının ***evrensel kısmı*** *denir.*

Biz şimdi şu soruya yanıt arayacağız: $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ olmak üzere $\mathfrak{B} \in \operatorname{Mod} \Gamma$ ise her $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ altyapısı için $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod} \Gamma$ olur mu?

Tanım 4.2.26 Γ*'ya her* $\mathfrak{B} \in \operatorname{Mod}\Gamma$ *ve her* $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ *için* $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod}\Gamma$ *ise ve ancak bu durumda* ***altyapı kapalıdır*** *denir. Bir* $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{Fm} L$ *formülüne ava* $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ *olan her* L *yapısı ve her* $a_1, \ldots, a_n \in A$ *için*

$$\mathfrak{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \implies \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$$

ise Γ ***'da (altyapı) ısrarcıdır*** *denir.*

Örneğin evrensel formüller altyapı ısrarcıdırlar; B kümesinde doğru olan bir evrensel formül $A \subseteq B$ ise elbette A kümesinde de doğrudur. Buna karşın varlık formülleri genişletmelere ısrarcıdırlar. Yine (4.1.14)'ten kolayca görüleceği gibi Γ açık formüllerden oluşuyorsa Γ altyapı kapalıdır.

Teorem 4.2.27 (Keisler'in Model Genişletme Teoremi) $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ *olmak üzere bir* $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ *yapısı için aşağıdaki önermeler denktirler:*

(1) Bir $\mathfrak{B} \in \operatorname{Yap} L$ *yapısı* $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ *ve* $\mathfrak{B} \models \Gamma$*, dd.* $\mathfrak{B} \in \operatorname{Mod}\Gamma$ *olacak biçimde vardır.*

(2) $\mathfrak{A} \models \Gamma_{\dot\forall}$*, dd.* $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod}\Gamma_{\dot\forall}$.

Kanıt. (1) $\implies$ (2): $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ ve $\mathfrak{B} \models \Gamma$ olsun. O zaman $\mathfrak{B} \models \Gamma_{\dot\forall}$ olur ve evrensel formüller altyapılarda da doğru olacaklarından $\mathfrak{A} \models \Gamma_{\dot\forall}$.

(2) $\implies$ (1): $\mathfrak{A} \models \Gamma_{\dot\forall}$ olsun. Biz $\Gamma \cup D(\mathfrak{A})$'nın bir modeli olduğunu savunuyoruz. Aksini varsayalım. O zaman Kompaktlık Teoremi'nden dolayı bir sonlu $\Delta \subseteq D(\mathfrak{A})$ ile $\Gamma \cup \Delta$'nın bir modeli olamaz. Δ kümesindeki formüller $\delta_1, \ldots, \delta_m$ ve bu formüllerde geçen ama L dilinde olmayan yeni sabitlerimiz $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ olmak üzere $\delta = \delta(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) := \delta_1 \curlywedge \cdots \curlywedge \delta_m$ olsun; elbette $\delta \in D(\mathfrak{A})$. δ savımız Γ'nın *her* modelinde yanlış, dd. $\neg\delta$ doğru olacaktır:

$$\Gamma \nvdash \neg\delta(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n), \text{ buradan } \Gamma \vdash \neg\delta(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n).$$

Yeni Sabitler Teoremi'nden $\Gamma \vdash \dot\forall x_1 \cdots \dot\forall x_n \neg\delta(x_1, \ldots, x_n)$, dolayısıyla

$$\dot\forall x_1 \cdots \dot\forall x_n \neg\delta(x_1, \ldots, x_n) \in \Gamma_{\dot\forall}.$$

$\mathfrak{A} \models \Gamma_{\dot\forall}$ olduğundan

$$\mathfrak{A} \models \dot\forall x_1 \cdots \dot\forall x_n \neg\delta(x_1, \ldots, x_n),$$

özellikle $\mathfrak{A} \models \neg\delta(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ elde edilir ki bu $\delta(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \in D(\mathfrak{A})$ ile çelişir! Dolayısıyla $\Gamma \cup D(\mathfrak{A})$'nın $\mathfrak{B} \in \operatorname{Yap} L$ olmak üzere bir $(\mathfrak{B}, (\mathbf{a}^{\mathfrak{B}})_{a \in A}) \in \operatorname{Yap} L_A$ modeli vardır. Diyagram Teoremi'nden dolayı her $a \in A$ için $h(a) := \mathbf{a}^{\mathfrak{B}}$ ile açıklanan $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ dönüşümü, $(\mathfrak{B}, (\mathbf{a}^{\mathfrak{B}})_{a \in A}) \models D(\mathfrak{A})$ olduğundan bir gömmedir. Dolayısıyla $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ ve $\mathfrak{B} \models \Gamma$. ■

Tanım 4.2.28 *Bir* $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ *kuramına* $\operatorname{Bc}\mathcal{K} = \operatorname{Bc}\Gamma = \operatorname{Bc}\Lambda$ *olacak biçimde, açık formüllerin bir* $\Lambda \subseteq \operatorname{Fm} L$ *kümesi bulunabiliyorsa ve ancak bu durumda bir* ***açık kuram*** *denir.*

Açık kuramlar, açık formüllerden oluşan bir Λ aksiyom sistemi olan kuramlardır. Ancak Λ açık formüllerden oluşuyorsa $\operatorname{Bc}\Lambda = \operatorname{Bc}\Lambda^{\dot\forall}$ ve $\Lambda^{\dot\forall}$ evrensel formüllerden oluştuğundan açık kuramlara **evrensel kuramlar** da denir. Sıra daha önce ortaya koyduğumuz soruyu yanıtlamaya geldi: $\mathfrak{A}$ yapısı $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramının bir modeli ise $\mathfrak{A}$'nın her altyapısı da $\mathcal{K}$ kuramının bir modeli midir?

Teorem 4.2.29 (Loś-Tarski) *Bir* $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ *kuramının altyapı kapalı olması için gerek ve yeter koşul* $\mathcal{K}$ *kuramının bir açık (veya eş anlamlı olarak bir evrensel) kuram olmasıdır.*

Kanıt. (1) $\mathcal{K}$ bir açık kuram olsun. Açık formüllerin bir $\Lambda \subseteq \operatorname{Fm} L$ kümesi $\operatorname{Bc}\Gamma = \operatorname{Bc}\Lambda$ olacak biçimde seçilsin. $\operatorname{Mod}\Gamma = \operatorname{Mod}\Lambda = \operatorname{Mod}\Lambda^{\dot\forall}$ ve evrensel formüller ısrarcı olduklarından $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod}\Lambda^{\dot\forall}$ ise her $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ için $\mathfrak{B} \in \operatorname{Mod}\Lambda^{\dot\forall}$.

(2) $\mathcal{K}$ kuramı altyapı kapalı olsun. $\Omega := \operatorname{Bc}\Gamma$ çıkarımsal kapalı olduğundan $\operatorname{Mod}\Gamma = \operatorname{Mod}\Omega$. Şimdi Ω'nın açık formüllerinin kümesini Λ ile gösterelim. Biz $\mathcal{K}$ kuramının aksiyomları olarak Λ'yı alabileceğimizi, dd. $\operatorname{Bc}\Gamma = \operatorname{Bc}\Lambda$ olduğunu savunuyoruz. $\operatorname{Bc}\Lambda = \operatorname{Bc}\Lambda^{\dot\forall}$ ve Λ'deki formüller açık olduğundan $\Gamma_{\dot\forall} = \Lambda^{\dot\forall}$. Gödel Tamlık Teoremi'nden dolayı bu irdelemelerde Bc gördüğümüz her yerde Mc yazabiliriz. Öyleyse işimiz $\operatorname{Mod}\Lambda = \operatorname{Mod}\Gamma$ olduğunu kanıtlamaktır; bu ise $\operatorname{Mod}\Gamma_{\dot\forall} = \operatorname{Mod}\Gamma$ olduğunu göstermeye denktir. $\Lambda \subseteq \Omega$ olduğundan $\operatorname{Mod}\Gamma = \operatorname{Mod}\Omega \subseteq \operatorname{Mod}\Lambda = \operatorname{Mod}\Lambda^{\dot\forall} = \operatorname{Mod}\Gamma_{\dot\forall}$.

Şimdi $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod}\Gamma_{\dot\forall}$ olsun. (4.2.27)'den dolayı $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ koşulun sağlayan bir $\mathfrak{B} \in \operatorname{Yap} L$ yapısı $\mathfrak{B} \models \Gamma$ olacak biçimde vardır. $\mathfrak{B} \in \operatorname{Mod}\Gamma$ ve varsayımımızdan dolayı $\mathcal{K}$ kuramı altyapı kapalı olduğundan $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod}\Gamma$ ve bkb. ■

4.3 Arakesitler, Birleşimler ve Zincirler

Bir V vektör uzayının altuzaylarının bir $(V_i)_{i\in I}$ ailesi verildiğinde $\bigcap V_i$ her zaman yine V'nin bir altuzayıdır. Buna karşın $W := \bigcup_{i\in I} V_i$ genelde bir alt uzay değildir ve biz bu durumda W'nin V'de gerdiği en küçük $\langle W\rangle$ alt uzayı ile ilgileniriz. Benzer durumlar bir $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ ve $\mathfrak{A}$'nın altyapılarının bir $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ ailesi verildiğinde de söz konusudur.

Arakesit: $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ ve her $i \in I$ için $\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}$ olsun. $K := \bigcap_{i\in I} A_i$ olsun. Eğer $K = \emptyset$ ise K kümesi bir yapının evreni olamaz! Eğer $K \neq \emptyset$

ise (4.1.2)'nin koşulları sağlandığından K kümesi bir $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{A}$ altyapısının evrenidir. $\bigcap_{i\in I}\mathfrak{A}_i := \mathfrak{K}$ olarak tanımlanır.

Birleşim: $\bigcup_{i\in I} A_i$ kümesinin A kümesindeki $\mathcal{F}^{\mathfrak{A}}$ kapanışı B olmak üzere (4.1.3)'ten B kümesinin bir $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ altyapısının evreni olduğunu biliyoruz. $\bigcup_{i\in I}\mathfrak{A}_i := \mathfrak{B} = \mathfrak{A}\,|\,B$.

Tanım 4.3.1 *α bir sıra sayısı olmak üzere her $\nu < \alpha$ için bir $\mathfrak{A}_\nu \in \operatorname{Yap} L$ verilmiş olsun. $(\mathfrak{A}_\nu)_{\nu<\alpha}$'ya her $\nu < \mu < \alpha$ için $\mathfrak{A}_\nu \subseteq \mathfrak{A}_\mu$ ise bir α-**zinciri**, eğer $\mathfrak{A}_\nu \preccurlyeq \mathfrak{A}_\mu$ ise bir **basit** α-**zinciri** denir.*

$(\mathfrak{A}_\nu)_{\nu<\alpha}$ bir (basit) α-zinciri olsun. Bir $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ yapısını tanımlayacağız. $A := \bigcup_{\nu<\alpha} A_\nu$ alacağız. $R_n \in \mathcal{R}$, $f \in \mathcal{F}_n$ ve $c \in \mathcal{C}$ olsun. $a_1, \ldots, a_n \in A$ keyfi verildiğinde bir $\nu < \alpha$ damgası $a_1, \ldots, a_n \in A_\nu$ olacak biçimde seçelim. Biz

(1) $R^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) :\Longleftrightarrow R^{\mathfrak{A}_\nu}(a_1, \ldots, a_n)$

(2) $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathfrak{A}_\nu}(a_1, \ldots, a_n)$

(3) $c^{\mathfrak{A}} := c^{\mathfrak{A}_\nu}$

olarak açıklayacağız. Bu tanımlar $\nu < \mu < \alpha$ için $\mathfrak{A}_\nu \subseteq \mathfrak{A}_\mu$ olduğundan ν'den bağımsızdırlar, dd. bu tanımlar kusursuzdurlar; bunu (4.3.5) numaralı teoremin kanıtında göstereceğiz. Bu şekilde açıklanan $\mathfrak{A}$ yapısını $\bigcup_{\nu<\alpha}\mathfrak{A}_\nu$ ile göstereceğiz. $\bigcup_{\nu<\alpha}\mathfrak{A}_\nu$ yapısına $(\mathfrak{A}_\nu)_{\nu<\alpha}$ α-**zincirinin birleşimi** denir. Tanım gereği her $\nu < \alpha$ için $\mathfrak{A}_\nu \subseteq \mathfrak{A}$. Eğer α bir ardıl sıra sayısı ise, dd. bir β sıra sayısı ile $\alpha = \beta + 1$ ise elbette $\bigcup_{\nu<\beta+1}\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{A}_\beta$ olduğu aşikârdır.

Teorem 4.3.2 *$(\mathfrak{A}_\nu)_{\nu<\alpha}$ bir α-zinciri olmak üzere her $\beta+1 < \alpha$ için $\mathfrak{A}_\beta \preccurlyeq \mathfrak{A}_{\beta+1}$ ve $\lambda < \alpha$ bir limit sıra sayısı ise $\mathfrak{A}_\lambda = \bigcup_{\nu<\lambda}\mathfrak{A}_\nu$ olsun. Bu durumda $\mathfrak{A} = \bigcup_{\nu<\alpha}\mathfrak{A}_\nu$ birleşimi her $\nu < \alpha$ için $\mathfrak{A}_\nu$'nün bir basit genişlemesidir, dd. her $\nu < \alpha$ için $\mathfrak{A}_\nu \preccurlyeq \mathfrak{A}$.*

Sonuç 4.3.3 (Tarski) *$(\mathfrak{A}_n)_{n<\omega}$ bir ω-zinciri olmak üzere her $n < \omega$ için $\mathfrak{A}_n \preccurlyeq \mathfrak{A}_{n+1}$ ise her $n < \omega$ için $\mathfrak{A}_n \preccurlyeq \mathfrak{A} = \bigcup_{n<\omega}\mathfrak{A}_n$.*

Kanıt. Sonlu ötesi tümevarım uygulayacağız (bkz. [17]).

(1) $\alpha = 0$ için sav boş olarak doğrudur.

(2) $\alpha = \beta + 1$ ve savımız β için kanıtlanmış olsun. Öyleyse her $\mu < \beta$ için $\mathfrak{A}_\mu \preccurlyeq \bigcup_{\nu<\beta}\mathfrak{A}_\nu$. Verilerimizden $\mathfrak{A}_\beta \preccurlyeq \mathfrak{A}_{\beta+1}$ ve $\preccurlyeq$ geçişli olduğundan $\bigcup_{\nu<\beta}\mathfrak{A}_\nu \preccurlyeq \mathfrak{A}_\beta$ olduğunu göstermek yeterlidir. Eğer β bir limit sıra sayısı ise koşullarımızdan $\bigcup_{\nu<\beta}\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{A}_\beta$ olduğundan bu sağlanır. Eğer β bir ardılsa, dd. bir λ ile $\beta = \lambda + 1$ ise $\bigcup_{\nu<\beta}\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{A}_\lambda$ ve $\lambda < \lambda + 1 < \alpha$ olduğundan $\mathfrak{A}_\lambda \preccurlyeq \mathfrak{A}_{\lambda+1} = \mathfrak{A}_\beta$.

(3) α bir limit sıra sayısı olsun ve savımız her $\beta < \alpha$ için kanıtlanmış olsun. Bu durumda her $\mu < \nu < \alpha$ için $\mathfrak{A}_\mu \preccurlyeq \mathfrak{A}_\nu$ olduğu aşikârdır. Biz her

$\mu < \alpha$ için $\mathfrak{A}_\mu \preccurlyeq \mathfrak{A}$ olduğunu savunuyoruz. Her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$, her $\mu < \alpha$ ve her $h \in N^{\mathfrak{A}_\mu}$ için

$$\mathfrak{A}_\mu \models \varphi\,[h] \iff \mathfrak{A} \models \varphi\,[h] \tag{4.12}$$

olduğunu göstermeliyiz. $\mathfrak{A}_\mu \subseteq \mathfrak{A}$ olduğundan bu denklik her açık φ için sağlanmıştır. Geriye bunun ψ için sağlanmışsa $\varphi := \dot{\forall} x\psi$ için de sağlandığını göstermek kalıyor. Evrensel formül altyapı ısrarcı olduğundan $\Longleftarrow$ yönü aşikârdır. $\Longrightarrow$ yönünü karşı konum ilkesiyle kanıtlayacağız. $\mathfrak{A} \not\models \dot{\forall} x\psi\,[h]$ olsun. Bu durumda en az bir $a \in A$ ile $\mathfrak{A} \not\models \psi\,[h^a_x]$. Şimdi $\psi = \psi(x, x_1, \ldots, x_n)$ ise $a_i := h(x_i)$ olsun. ν sıra sayısını $\mu < \nu$ ve $a, a_1, \ldots, a_n \in A_\nu$ olacak biçimde seçelim. Tümevarım koşulumuzdan (4.12) denkliği ψ ve her $\lambda < \alpha$ ile sağlandığından $\mathfrak{A}_\nu \not\models \psi\,[h^a_x]$, özellikle $\mathfrak{A}_\nu \not\models \dot{\forall} x\psi\,[h^a_x]$. Buradansa $\mathfrak{A}_\mu \preccurlyeq \mathfrak{A}_\nu$ olduğundan $\mathfrak{A}_\mu \not\models \dot{\forall} x\psi\,[h^a_x]$.

$\alpha = \omega$ ise hiçbir $n < \omega$ bir limit sıra sayısı olmadığından teoremin koşulları geçerlidir ve sonuç doğrudan teoremden çıkar. ■

Bir $I \neq \emptyset$ kümesinde verilen $\leq$ ikili bağıntısı

(1) *yansımalıdır*: $\iff \forall i \in I : i \leq i$.

(2) *ters bakışımlıdır* : $\iff \forall i, j \in I : i \leq j$ ve $j \leq i$ ise $i = j$.

(3) *geçişlidir* : $\iff \forall i, j, k \in I : i \leq j$ ve $j \leq k$ ise $i \leq k$.

(4) *doğrusaldır* : $\iff \forall i, j \in I :\ i \leq j$ veya $j \leq i$.

(5) *yukarı yönlenmiştir* : $\iff \forall i, j \in I\ \exists k \in I :\ i \leq k$ ve $j \leq k$.

Bir $\leq$ bağıntısına (1)–(3) sağlanmışsa bir *kısmi sıralama*, (1)– (4) sağlanmışsa bir *tümel sıralama* ve (1),(2)(3),(5) sağlanmışsa bir *yukarı yönlenme* denir.

Tanım 4.3.4 *$I \neq \emptyset, (I, \leq)$ tümel sıralama ve her $i \in I$ için bir $\mathfrak{A}_i \in \operatorname{Yap} L$ verilmiş olsun.*

(Z) $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ *bir* ***zincirdir*** $: \iff \exists i, j \in \dot{I} : i \leq j$ *ise* $\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}_j$.
(EZ) $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ *bir* ***basit zincirdir*** $: \iff \exists i, j \in I : i \leq j$ *ise* $\mathfrak{A}_i \preccurlyeq \mathfrak{A}_j$.

$(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ bir (basit) zincir olsun. Bir $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ yapısını tanımlayacağız. $A := \bigcup_{i\in I} A_i$ alacağız. $R \in \mathcal{R}$, $f \in \mathcal{F}_n$ ve $c \in \mathcal{C}$ olsun. $a_1, \ldots, a_n \in A$ keyfi verildiğinde (Z) zincir özelliğinden dolayı bir $i \in I$ damgası $a_1, \ldots, a_n \in A_i$ olacak biçimde bulunur. Biz

(1) $R^{\mathfrak{A}} := \bigcup_{i\in I} R^{\mathfrak{A}_i}$,

(2) $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathfrak{A}_i}(a_1, \ldots, a_n)$,

(3) $c^{\mathfrak{A}} := c^{\mathfrak{A}_i},\ i \in I$

olarak açıklayacağız. (2) ve (3)'teki tanımlar (Z) zincir özelliğinden dolayı i'den bağımsızdırlar, dd. bu tanımlar kusursuzdurlar; izleyen teoremin kanıtında göstereceğiz. Bu şekilde açıklanan $\mathfrak{A}$ yapısını yine $\bigcup_{i\in I}\mathfrak{A}_i$ ile göstereceğiz. $\bigcup_{i\in I}\mathfrak{A}_i$ yapısına $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ **zincirinin birleşimi** denir.

Teorem 4.3.5 (Tarski) *$(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ zincirinin $\mathfrak{A}=\bigcup_{i\in I}\mathfrak{A}_i$ birleşimi için aşağıdakiler geçerlidir:*

(1) $\mathfrak{A}\in \operatorname{Yap} L$ *ve her* $i\in I$ *için* $\mathfrak{A}_i\subseteq\mathfrak{A}$.

(2) Birleşim (1)'deki özeliği sağlayan yapıların en darıdır.

(3) $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ *basit zincirse her* $i\in I$ *için* $\mathfrak{A}_i\preccurlyeq\mathfrak{A}$.

Kanıt. (1) $\mathfrak{A}$'nın bir L yapısı olduğu aşikârdır. Şimdi her $j\in I$ için $\mathfrak{A}_j\subseteq\mathfrak{A}$ olduğunu görelim.

$c\in\mathcal{C}$ olsun. Bir $i\in I$ ile $c^{\mathfrak{A}}:=c^{\mathfrak{A}_i}$ olarak açıkladık. I doğrusal sıralı olduğundan $i\leq j$ veya $j\leq i$, dolayısıyla $\mathfrak{A}_i\subseteq\mathfrak{A}_j$ veya $\mathfrak{A}_j\subseteq\mathfrak{A}_i$ olur. Her durumda $c^{\mathfrak{A}_i}=c^{\mathfrak{A}_j}$ olur. Dolayısıyla $c^{\mathfrak{A}}$'nın tanımı i'nin seçiminden bağımsızdır ve $c^{\mathfrak{A}}=c^{\mathfrak{A}_j}$.

$f\in\mathcal{F}_n$ olsun. $\overline{a_n}\in A_j$ olsun. $f^{\mathfrak{A}}(\overline{a_n})$'nin tanımında $\overline{a_n}\in A_i$ olan bir i ile $f^{\mathfrak{A}}(\overline{a_n})=f^{\mathfrak{A}_i}(\overline{a_n})$ olarak açıkladık. Yine $\mathfrak{A}_i\subseteq\mathfrak{A}_j$ veya $\mathfrak{A}_j\subseteq\mathfrak{A}_i$ olacağından $f^{\mathfrak{A}_j}(\overline{a_n})=f^{\mathfrak{A}_i}(\overline{a_n})$ olur ve bir yandan $f^{\mathfrak{A}}(\overline{a_n})$'nın tanımının i'den bağımsız olduğunu, diğer yandan $f^{\mathfrak{A}}(\overline{a_n})=f^{\mathfrak{A}_i}(\overline{a_n})$ olduğunu kanıtlamış oluruz.

$R\in\mathcal{R}_n$ ise tanımdan doğrudan $R^{\mathfrak{A}_j}=R^{\mathfrak{A}}|A_j^n$ olur. Sonuçta $\mathfrak{A}_j\subseteq\mathfrak{A}$.

(2) Aşikârdır: Her $i\in I$ için $\mathfrak{A}_j\subseteq\mathfrak{B}$ ise $A\subseteq B$ olur.

(3) Şimdi $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ bir basit zincir olsun. Her $j\in I$ için $\mathfrak{A}_j\preccurlyeq\mathfrak{A}$ olduğunu (4.2.17)'yi kullanarak kanıtlayacağız. $\varphi(x,\overline{y_n})\in\operatorname{Fm} L$ verilsin ve $\overline{b_n}\in A_j$ ile $\mathfrak{A}\models\dot{\exists}x\varphi[\overline{b_n}]$ olsun. Bir $i\in I$ ve bir $a\in A_i$ ile $\mathfrak{A}\models\varphi\left[a,\overline{b_n}\right]$ olacaktır. Genellikten bir şey kaybetmeden $i\geq j$ alabiliriz. Elbette $\mathfrak{A}_i\models\dot{\exists}x\varphi\left[\overline{b_n}\right]$ ve $\mathfrak{A}_j\preccurlyeq\mathfrak{A}_i$ olduğundan $\mathfrak{A}_j\models\dot{\exists}x\varphi\left[\overline{b_n}\right]$ olur. (4.2.17)'den $\mathfrak{A}_j\preccurlyeq\mathfrak{A}$. ■

Bu teorem genelleştirilebilir.

Tanım 4.3.6 *$(I,\leq)$ yukarı doğru yönlenmiş bir küme olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlandığında $\mathcal{Y}=((\mathfrak{A}_i)_{i\in I},(e_{ij})_{i,j\in I\wedge i\leq j})$'ye (**yukarı**) **yönlenmiş** bir **basit sistem** denir: Her $i,j,k\in I$ için*

(1) $\mathfrak{A}_i\in\operatorname{Yap} L$,

(2) $e_{ij}:\mathfrak{A}_i\hookrightarrow_b\mathfrak{A}_j$ *basit gömme,* $\quad(i\leq j)$,

(3) $e_{jk}\circ e_{ij}=e_{ik}$, $\quad(i\leq j\leq k)$.

Tanım 4.3.7 *Aşağıdaki koşullar sağlandığında $\mathfrak{A}\in\operatorname{Yap} L$ yapısına, birlikte verilen $(e_i)_{i\in I}$ yapı dönüşümleriyle $((\mathfrak{A}_i)_{i\in I},(e_{ij})_{i,j\in I\wedge i\leq j})$ yönlenmiş basit sisteminin **limiti** denir: Her $i,j\in I$ için*

(1) $e_i : \mathfrak{A}_i \hookrightarrow_b \mathfrak{A}$ *bir basit gömmedir.*

(2) $i \leq j$ *ise* $e_i = e_j \circ e_{ij}$.

(3) $A = |\mathfrak{A}| = \bigcup_{i\in I} e_i\,[A_i] = \{e_i(a) \,|\, i \in I$ *ve* $a \in A_i\}$.

$(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ bir basit zincirse $i, j \in I$ için $i \leq j$ olduğunda $e_{ij} : \mathfrak{A}_i \hookrightarrow_b \mathfrak{A}_j$ olarak $I_{ij} : A_i \hookrightarrow A_j$ özdeşliklerini alırsak $((\mathfrak{A}_i)_{i\in I}, (I_{ij})_{i,j\in I\wedge i\leq j})$ bir yukarı yönlenmiş basit sistemdir. Bu durumda (4.3.5)'te tanımlanan $\mathfrak{A}$ yapısı ise e_i olarak $I_i : A_i \hookrightarrow A$ özdeşlikleriyle bu yönlenmiş sistemin limitidir.

Ancak bir borcumuz var! "Bir limit" yerine "limit" söylemini seçtik. Nedeni, limitlerin eşyapı dışında tek olarak belirli olmasıdır. $(\mathfrak{A}, (e_i)_{i\in I})$ ve $(\mathfrak{A}', (e'_i)_{i\in I})$ eğer $\mathcal{E}$ yönlenmiş sisteminin limitleri ise $h_i := e'_i \circ e_i^{-1} : e_i\,[A_i] \rightleftarrows e'_i\,[A_i]$ olmak üzere $h_i : e_i\,[\mathfrak{A}_i] \overset{\frown}{\to} e'_i\,[\mathfrak{A}_i]$ eşyapı dönüşümleri yardımıyla bir $h : \mathfrak{A} \overset{\frown}{\to} \mathfrak{A}'$ eşyapı dönüşümü $h|e_i\,[A_i] := h_i$ olarak açıklanır. Söylenenleri göstermeyi alıştırma olarak bırakıyoruz.

Teorem 4.3.8 *Her yönlenmiş* $\mathcal{Y} = ((\mathfrak{A}_i)_{i\in I}, (e_{ij})_{i,j\in I\wedge i\leq j})$ *sisteminin limiti vardır.*

Kanıt. Gerekirse A_i kümelerinden $A_i^* := \{i\} \times A_i$ kümelerine geçerek her şeyden önce A_i kümelerinin ikişer ikişer ayrık olduklarını varsayabiliriz. $B := \bigcup_{i\in I} A_i$ kümesinde bir $\backsim$ denklik bağıntısı açıklayacağız. Her $a, b \in B$ için

$$a \backsim b :\Longleftrightarrow \exists i, j, k \in I\ (i \leq k \wedge j \leq k \wedge a \in A_i \wedge b \in A_j \wedge e_{ik}(a) = e_{jk}(b)).$$

$\leq$ yansımalı ve ters bakışımlı olduğundan $\backsim$ de yansımalı ve ters bakışımlıdır. Geriye geçişli özelliği görmek kalıyor.

$a, b, c \in B$ ve $a \backsim b$ ve $b \backsim c$ olsun. $i, i_*, j, j_*, k, k_* \in I$ damgaları $i \leq k$, $j \leq k$ ve $a \in A_i$, $b \in A_j$ öğeleri $e_{ik}(a) = e_{jk}(b)$ olacak biçimde ve $i_* \leq k_*$, $j_* \leq k_*$ ve $b \in A_{i_*}$, $c \in A_{j_*}$ ve $e_{i_*k_*}(b) = e_{j_*k_*}(c)$ olacak biçimde vardır. A_i kümeleri ikişer ikişer ayrık olduklarından $j = i_*$. Diğer yandan $\leq$ yukarı yönlenmiş olduğundan bir $k^* \in I$ damgası $k \leq k^*$ ve $k_* \leq k^*$ olacak biçimde seçilebilir. Bu durumda $e_{ik^*}(a) = e_{kk^*}(e_{ik}(a)) = e_{kk^*}(e_{jk}(b)) = e_{jk^*}(b) = e_{i_*k^*}(b) = e_{k_*k^*}(e_{i_*k_*}(b)) = e_{k_*k^*}(e_{j_*k_*}(c)) = e_{j_*k^*}(c)$ elde ederiz ki tanım gereği $a \backsim c$ olur. Böylece $\backsim$ bir denklik bağıntısıdır.

$A := B/_{\backsim}$ olsun ve bir $a \in B$ için $[a]$ ile a'nın denklik sınıfını gösterelim. $e_i : A_i \to A$ dönüşümü her $a \in A_i$ için $e_i(a) := [a]$ olarak tanımlansın. Şimdi $i, j \in I$ ve $i \leq j$ olsun. $a \in A_i$ ve $b \in A_j$ ile $b = e_{ij}(a)$ olsun. Buradan $e_{ij} = e_{jj} \circ e_{ij}$ olduğunu gözetirsek $e_{jj}(b) = e_{jj}(e_{ij}(a)) = e_{ij}(a)$ dolayısıyla $a \backsim b$, dd. $e_i(a) = [a] = [b] = e_j(b) = e_j(e_{ij}(a))$ elde ederiz. Dolayısıyla $e_i = e_j \circ e_{ij}$ ve (4.3.7)(2) sağlanmıştır. Elbette $A = \{e_i(a) \,|\, a \in A_i,\ i \in I\}$ ve

(4.3.7)(3) de sağlanmıştır. Geriye A'da L dilini yorumlayarak bir $\mathfrak{A}$ yapısını her $i \in I$ için $e_i : \mathfrak{A}_i \hookrightarrow_b \mathfrak{A}$ olacak biçimde tanımlamak kalıyor.

$c \in \mathcal{C}$ olsun. Her $i, j \in I$ için $k \in I$ öğesini $i \leq k$ ve $j \leq k$ olacak biçimde seçer ve e_{pq} dönüşümlerin basit gömmeler olduğunu gözetirsek $e_{ik}(c^{\mathfrak{A}_i}) = c^{\mathfrak{A}_k} = e_{jk}(c^{\mathfrak{A}_j})$ olduğundan $c^{\mathfrak{A}_i} \backsim c^{\mathfrak{A}_j}$ olur. Bu nedenle herhangi bir i ile yapacağımız $c^{\mathfrak{A}} := [c^{\mathfrak{A}_i}]$ tanımı kusursuzdur.

Şimdi $R \in \mathcal{R}_n$ ve $a_1, \ldots, a_n \in B$ olsun. $i_k \in I$ damgaları $a_k \in A_{i_k}$ olacak biçimde seçilsinler. $j \in I$ öğesini $i_1, \ldots, i_n \leq j$ olacak biçimde seçelim.

$$([a_1], \ldots, [a_n]) \in R^{\mathfrak{A}} :\iff (e_{i_1 j}(a_1), \ldots, e_{i_n j}(a_n)) \in R^{\mathfrak{A}_j}$$

olarak açıklayalım. e_{pq} dönüşümleri basit gömmeler ve I yukarı doğru yönlenmiş olduğundan bu tanım kusursuzdur. Özellikle $i_1 = \cdots = i_n =: i$ ve $i < j$ ise e_{ij} gömmesiyle

$$\begin{aligned} (a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}_i} &\iff (e_{ij}(a_1), \ldots, e_{ij}(a_n)) \in R^{\mathfrak{A}_j} \\ &\iff ([a_1], \ldots, [a_n]) \in R^{\mathfrak{A}} \\ &\iff (e_i(a_1), \ldots, e_i(a_n)) \in R^{\mathfrak{A}} \end{aligned} \tag{4.13}$$

olur.

Şimdi $f \in \mathcal{F}_n$ ve $a_1, \ldots, a_n \in A$ olsun. $i_1, \ldots, i_n$ ve j az önceki gibi seçilsinler.

$$\begin{aligned} f^{\mathfrak{A}}([a_1], \ldots, [a_n]) &:= [f^{\mathfrak{A}_j}(e_{i_1 j}(a_1), \ldots, e_{i_n j}(a_n))] \\ &:= e_j(f^{\mathfrak{A}_j}(e_{i_1 j}(a_1), \ldots, e_{i_n j}(a_n))) \end{aligned}$$

olarak açıklansın. Tanımın kusursuz olduğunu görmeyi okura bırakıyoruz. Özellikle $i_1 = \cdots = i_n =: i$ ise

$$\begin{aligned} f^{\mathfrak{A}}(e_i(a_1), \ldots, e_i(a_n)) = f^{\mathfrak{A}}([a_1], \ldots, [a_n]) &= e_j(f^{\mathfrak{A}_j}(e_{ij}(a_1), \ldots, e_{ij}(a_n))) \\ &= e_j(e_{ij}(f^{\mathfrak{A}_i}(a_1), \ldots, f^{\mathfrak{A}_i}(a_n))) \\ &= e_i(f^{\mathfrak{A}_i}(a_1), \ldots, f^{\mathfrak{A}_i}(a_n)),\ e_i = e_j \circ e_{ij}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

elde ederiz.

(4.13), (4.14) ve $e_i(c^{\mathfrak{A}_i}) = [c^{\mathfrak{A}_i}] = c^{\mathfrak{A}}$ önermelerinden $e_i : \mathfrak{A}_i \hookrightarrow \mathfrak{A}$ gömmesini kazanırız. (4.9) $h = e_i$ ve tüm açık φ formülleri için şimdiden sağlanmıştır. Geriye bu gömmenin basit olduğunu görmek kalıyor. Bunun için eğer her $\psi = \psi(x, \overline{y_n}) \in \operatorname{Fm} L$ ve her $b, \overline{a_n} \in A_i$ için

$$\mathfrak{A}_i \models \psi\,[b, a_1, \ldots, a_n] \iff \mathfrak{A} \models \psi\,[e_i(b), e_i(a_1), \ldots, e_i(a_n)] \tag{4.15}$$

kanıtlanmışsa

$$\mathfrak{A}_i \models \dot{\exists} x \psi[a_1, \ldots, a_n] \iff \mathfrak{A} \models \dot{\exists} x \psi\,[e_i(a_1), \ldots, e_i(a_n)]$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Varsayalım ki ψ verildiğinde (4.15) er $i \in I$ ve her $b, \overline{a_n} \in A_i$ için kanıtlanmış olsun.

Şimdi $i \in I$ ve $a_1, \ldots, a_n \in A_i$ verilsin.

$\Longrightarrow$ yönü: $\overline{a_n} \in A_i$ keyfi verilsin.

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_i \models \dot{\exists} x \psi[\overline{a_n}] &\Longrightarrow \exists b \in A_i : \ \mathfrak{A}_i \models \psi\left[b, a_1, \ldots, a_n\right] \\ &\Longrightarrow \mathfrak{A} \models \psi\left[e_i(b), e_i(a_1), \ldots, e_i(a_n)\right], \quad (4.15) \\ &\Longrightarrow \mathfrak{A} \models \dot{\exists} x \psi\left[e_i(a_1), \ldots, e_i(a_n)\right]. \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$ yönü: $\mathfrak{A} \models \dot{\exists} x \psi\left[e_i(a_1), \ldots, e_i(a_n)\right]$ olsun. Böylece bir $a \in A$ için $\psi[a, e_i(a_1), \ldots, e_i(a_n)]$. Bir $j \in I$ ve $b \in A_j$ ile $a = e_j(b)$ olacağından

$$\mathfrak{A} \models \psi\left[e_j(b), e_i(a_1), \ldots, e_i(a_n)\right] \tag{4.16}$$

elde ederiz. Bir $k \in I$ damgasını $i, j \leq k$ olacak biçimde seçelim. $e_i = e_k \circ e_{ik}$ ve $e_j = e_k \circ e_{jk}$ olduğundan (4.16)'dan ve varsayımımızdan

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &\models \psi\left[e_k(e_{jk}(b)), e_k(e_{ik}(a_1)), \ldots, e_k(e_{ik}(a_n))\right] \\ \mathfrak{A}_k &\models \psi\left[e_{jk}(b), e_{ik}(a_1), \ldots, e_{ik}(a_n))\right] \\ \mathfrak{A}_k &\models \dot{\exists} x \psi\left[e_{ik}(a_1), \ldots, e_{ik}(a_n))\right]. \end{aligned} \tag{4.17}$$

elde ederiz. $e_{ik} : \mathfrak{A}_i \hookrightarrow_b \mathfrak{A}_k$ basit gömme olduğundan (4.17)'den

$$\mathfrak{A}_i \models \dot{\exists} x \psi\left[a_1, \ldots, a_n\right]$$

elde ederiz. ■

Örnek 4.3.9 $\leq$ ile $\mathbb{R}$'deki bildik sıralamayı gösterelim. $n \geq 1$ için $A_n := [2^{-n}, 1]$ olsun. $\mathfrak{A}_n := (A_n, \leq)$ olmak üzere $(\mathfrak{A}_n)_{n\geq 1}$ bir zincirdir. Şimdi $\mathfrak{A} = \bigcup_{n\geq 1} \mathfrak{A}_n = ((0,1], \leq)$ olsun. Her bir $\mathfrak{A}_n$ yapısında bir en küçük ve bir en büyük öğe varken $\mathfrak{A}$ birleşiminde bir en küçük öğe yoktur. Diğer yandan tüm $\mathfrak{A}_n$ yapıları yoğun doğrusal sıralanmıştır; $\mathfrak{A}$ birleşimi de öyle. Yine $n \geq 1$ için bu kez $\mathfrak{B}_n = ([-n, n], \leq)$ alırsak $\mathfrak{B} := \bigcup_{n\geq 1} \mathfrak{B}_n = (\mathbb{R}, \leq)$ olur. Her bir $\mathfrak{B}_n$ en büyük ve ve en küçük öğelere sahipken $\mathfrak{B}$ birleşimi ne en büyük ne de en küçük öğeye sahiptir. $n \geq 1$ için $\mathfrak{C}_n := ((-1 + 2^{-n}, 1 - 2^{-n}), \leq)$ olmak üzere $\mathfrak{C} := \bigcup_{n\geq 1} \mathfrak{C}_n = ((-1, 1), \leq)$. Her bir $\mathfrak{C}_n$ ne üstten ne de alttan sınırlıdır; aynı şey $\mathfrak{C}$ birleşimi içinde geçerlidir. Bu arada elbette $(\mathfrak{B}_n)_{n\geq 1}$ ve $(\mathfrak{C}_n)_{n\geq 1}$ birer zincirdir. Zincirdeki yapıların bazı ortak özellikleri birleşime aktarılırken bazıları aktarılmamıştır. Şimdi

$$\sigma_1 := \exists y \forall x \left(x \leq y\right), \ \sigma_2 := \forall x \exists y \left(x \leq y \wedge x \neq y\right)$$

savlarından σ_1 bir en büyük öğenin varlığını, σ_2 ise bir üst sınırın olmadığını söyler. Örneklerimizde σ_1 birleşime aktarılmamış, σ_2 ise aktarılmıştır. σ_1 ve

σ_2'de niceleyicilerin sıralamaları zıttır. $\varphi(x,y) = x \leq y \wedge x \neq y$ açık formülü ile $\sigma_2 = \forall x \exists y \varphi(x,y)$ şeklindedir. Aktarılan özelliklerin bu yapıda olduğunu kanıtlayacağız. ▲

Tanım 4.3.10 *$\varphi(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m) \in \operatorname{Fm} L$ bir açık formül olmak üzere*

$$\dot\forall x_1,\ldots,x_n \dot\exists y_1,\ldots,y_m \varphi(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$$

tipindeki savlara bir ***$\dot\forall\dot\exists$-savı*** *denir. Eğer bir kuramın aksiyomlarını $\forall\exists$-savlarından seçebiliyorsak bu kurama bir* ***$\dot\forall\dot\exists$-kuramı*** *veya* ***tümevarımsal kuram*** *denir.*

Teorem 4.3.11 (Chang-Loś-Suszko) *$\mathcal{K} = (L,\Gamma)$ kuramının modellerinden oluşan her $(\mathfrak{A}_n)_{n<\omega}$ zincirinin birleşiminin yine $\mathcal{K}$ kuramının bir modeli olması için gerek ve yeter koşul $\forall\exists$-savlarından oluşan bir $\Gamma' \subseteq \operatorname{Fm} L$ aksiyom sisteminin $\Gamma \approx \Gamma'$ olacak biçimde bulunmasıdır.*

Kanıt. (1) Γ' aksiyomları $\forall\exists$-savlarından oluşsun. $\mathcal{K}' = (L,\Gamma')$ kuramının modellerinden oluşan bir $(\mathfrak{A}_n)_{n<\omega}$ zinciri verilsin. $\mathfrak{A} := \bigcup_{n<\omega} \mathfrak{A}_n$ birleşiminin de $\mathcal{K}'$ kuramının bir modeli olduğunu görelim. $\sigma = \dot\forall \overline{x_n} \dot\exists \overline{y_m} \varphi \in \Gamma'$ keyfi verilsin. $\mathfrak{A} \models \sigma$ olduğunu göstermeliyiz, dd. her $\overline{a_n} \in A$ için $\mathfrak{A} \models \dot\exists \overline{y_m} \varphi[\overline{a_n}]$ olduğunu göstermeliyiz. $\overline{a_n} \in A$ keyfi verilsinler. k damgasını yeterince büyük seçersek $\overline{a_n} \in A_k$ olmasını sağlayabiliriz. Koşulumuzdan $\mathfrak{A}_k \models \sigma$ olduğundan özelleştirme ile $\mathfrak{A}_k \models \dot\exists \overline{y_m} \varphi[\overline{a_n}]$ elde ederiz. Varlık önermeleri birleşimlere aktarıldığından $\mathfrak{A} \models \dot\exists \overline{y_m} \varphi[\overline{a_n}]$ olur. $\overline{a_n} \in A$ keyfi seçildiğinden $\mathfrak{A} \models \dot\forall \overline{x_n} \dot\exists \overline{y_m} \varphi$ elde ederiz. Dolayısıyla $\mathfrak{A}$ birleşimi $\mathcal{K}'$ kuramının bir modelidir. Eğer $\Gamma \approx \Gamma'$ ise $\mathcal{K} = (L,\Gamma)$ ve $\mathcal{K}' = (L,\Gamma')$ kuramları aynı modele sahip olacaklarından teoremimizin bir yönü kanıtlanmıştır.

(2) (4.3.9)'da birleşime aktarılmayan $\exists\forall$ tipinde bir sav örnekledik. Ancak bu önermenin diğer yönün kanıtı değildir. Bunun için [82]'ye bakabilirsiniz. ■

4.4 Aksiyomlaştırma, Tamlık ve Kesinlik

Matematiksel kuramlar kabaca iki tiptendirler:

1. Özel $\mathfrak{A}$ yapılarının $\operatorname{Th}\mathfrak{A}$ kuramları: Örneğin sayılar teorisi veya reel sayılar veya kompleks sayıların kuramları veya Öklid düzleminin kuramı gibi.
2. Belli bir $M \subseteq \operatorname{Yap} L$ model sınıfının

$$\operatorname{Th} M := \bigcap_{\mathfrak{A}\in M} \operatorname{Th}\mathfrak{A} = \{\sigma \in \operatorname{Sav} L \mid \forall \mathfrak{A} \in M : \mathfrak{A} \models \sigma\}$$

kuramı. Örneğin M olarak sırasıyla $\operatorname{Mod}\Lambda_g$, $\operatorname{Mod}\Lambda_c$ alırsak Gruplar ve Cisimler Kuramları'nı elde ederiz.

Her iki durumda da bizi ilgilendiren bazı sorular vardır. Örneğin $\mathfrak{N}$ yapısının $\operatorname{Th}\mathfrak{N}$ kuramını ele alalım: İlk işimiz, olabildiğince küçük, olabilirse sonlu bir $\Lambda \subseteq \operatorname{Fm} L_a$ aksiyom kümesini $\operatorname{Bt}\Lambda = \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ olacak biçimde bulmak. Biz Λ_a Peano ilksavlarını seçtik. Burada beklentilerimiz şunlardı:

1. Λ_a aksiyomlarımız $\mathfrak{N}$ yapısını eşyapı dışında tek olarak belirlemeli, dd. her $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \operatorname{Mod}\Lambda_a$ için $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ olmalıdır. Ancak $\mathfrak{N}$ yapısı Λ_a'nın bir sonsuz modeli olduğundan, Löwenheim-Skolem Teoremi'nden dolayı her $\kappa \geq \aleph_0$ çokluk sayısı için Λ_a'nın bir κ-modeli vardır; $\kappa > \aleph_0$ durumunda bu modelin $\mathfrak{N}$ ile eşyapılı olması söz konusu değildir.

2. Yukarıdaki olumsuzluktan sonra beklentimizi azaltıp şunu soruyoruz: $\kappa \geq \aleph_0$ olmak üzere Λ_a'nın herhangi iki κ-modeli eşyapılı mıdır? Ancak biz (4.2.8)'de Λ_a'nın $\mathfrak{N}$ ile eşyapılı olmayan sayılabilir modellerinin varlığını öğrendik. Bu sorunun yanıtı da her zaman olumlu değildir.

3. Elbette geriye bir başka temel soru kalıyor: $\operatorname{Bt}\Lambda_a = \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ midir? $\mathfrak{N}$ yapısı Λ_a'nın bir modeli olduğundan $\operatorname{Bt}\Lambda_a \subseteq \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ aşikârdır, dolayısıyla sorumuz şuna eşdeğerdir: Her $\sigma \in \operatorname{Sav} L_a$ için $\Lambda_a \vdash \sigma$ veya $\Lambda_a \nvdash \sigma$ midir, dd. Λ_a tam mıdır? Bir sonraki bölümde bu sorunun yanıtının "hayır" olduğunu öğreneceğiz.

4.4.1 Aksiyomlaştırma

Tanım 4.4.1 *Bir M model sınıfına*

$$\mathfrak{A} \in M \text{ ve } \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A} \implies \mathfrak{B} \in M$$

ise ***eşyapı kapalıdır*** *denir. $\Sigma \subseteq \operatorname{Sav} L$, $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod}\Sigma$ ve her $\mathfrak{B} \models \Sigma$ için $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ ise Σ savları $\mathfrak{A}$ yapısını* ***eşyapı dışında tek olarak belirler*** *denir.*

Teorem 4.4.2 *Bir $\mathfrak{A}$ yapısının eşyapı dışında tek olarak belirlenebilmesi için gerek ve yeter koşul $\mathfrak{A}$ yapısının sonlu olmasıdır.*

Kanıt. (1) $\mathfrak{A}$ bir sonsuz yapı ise Yukarı Doğru Löwenheim-Skolem Teoremi'nden dolayı eşyapı dışından tek olarak belirlenemez.

(2) $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ bir sonlu yapı ve $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ olsun.

(2)(a) $|L|$ sonlu olsun, dd. L dilinde en fazla sonlu sayıda sabit imi, sonlu sayıda fonksiyon ve bağıntı imi bulunsun. Bu durumda bir $\sigma \in \operatorname{Sav} L$ savımı $\mathfrak{A} \models \sigma$ ve her $\mathfrak{B} \in \operatorname{Mod}\sigma$ için $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$ olacak biçimde bulacağız. σ savı eklemelerden oluşan bir ψ formülüyle $\dot{\exists} x_1, \cdots, x_n \psi$ tipinde olacaktır. Şimdi

$u : A \to \mathcal{V}$ birebir dönüşüm ve $u(a_i) = x_i,\ 1 \le i \le n$ olsun. $\beta : \mathcal{V} \to A$ değerlemesi ise $i = 1, \ldots, n$ için $\beta(x_i) = a_i$ koşulunu sağlasın.

$$\sigma_{\ge n} = \dot{\exists} x_1, \ldots, x_n \ \neg x_1 \doteq x_2 \curlywedge \cdots \curlywedge \neg x_1 \doteq x_n \curlywedge \cdots \curlywedge \neg x_{n-1} \doteq x_n$$
$$\sigma_{\le n} = \dot{\forall} x, x_1, \ldots, x_n \ x \doteq x_1 \curlyvee x \doteq x_2 \curlyvee \cdots \curlyvee x \doteq x_n$$

olmak üzere $\sigma_{=n} = \sigma_{\le n} \curlywedge \sigma_{\ge n}$ formülünün modelleri n öğelidir.

Her $c \in L$ sabiti için $\sigma_{=n}$ formülüne $u(c^{\mathfrak{A}}) = x_j$ ise $x_j \doteq c$ formülünü ekleyelim ve bu formülü φ_c ile gösterelim. φ_C ise φ_c $(c \in C)$ formüllerinin herhangi bir sırada birbirine eklenmesi olsunlar. Elbette her $c \in C$ için $\mathfrak{A} \models \varphi_c[\beta]$ olduğundan $\mathfrak{A} \models \varphi_C[\beta]$ olur.

Şimdi $R \in L$ bağıntısı k basamaklı olsun ve $(a'_1, \ldots, a'_k) \in A^k$ keyfi verilsin. $y_i := u(a'_i)$ olarak açıklarsak elbette $i = 1, \ldots, k$ için $y_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ olacaktır. Şimdi $R^{\mathfrak{A}}(a'_1, \ldots, a'_k)$ ise $R(y_1, \ldots, y_k)$ formülünü, $\neg R(a'_1, \ldots, a'_k)$ ise $\neg R(y_1, \ldots, y_k)$ formülünü seçelim ve tüm bu şekilde seçilen formülleri birbirine herhangi bir sırada ekleyerek φ_R formülünü elde edelim. $\beta(y_i) = a'_i$ olduğundan elbette $\mathfrak{A} \models \varphi_R[\beta]$ ve ψ_R ile tüm $R \in L$ bağıntıları için oluşturduğumuz φ_R formüllerinin herhangi bir sırada birbirine eklenmelerini gösterirsek elbette $\mathfrak{A} \models \psi_R[\beta]$ olur.

Son olarak $f \in L$ bir p değişkenli bir fonksiyon imi ve $f^{\mathfrak{A}}(a'_1, \ldots, a'_p) = a'$ ise φ_f ile $y_i := u(a'_i)$, $1 \le i \le p$ ve $u(a') =: y$ olmak üzere $f(y_1, \ldots, y_p) \doteq y$ tipindeki formüllerin birbirine eklenmeleriyle elde edilen formül olsun. Elbette $\mathfrak{A} \models \varphi_f[\beta]$ ve φ_F ile her $f \in L$ fonksiyon imi için oluşturulan φ_f formüllerinin birbirine herhangi bir sırada eklenmelerini gösterirsek $\mathfrak{A} \models \varphi_F[\beta]$ olduğu aşikârdır ve $\deg \varphi \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Şimdi $\sigma := \dot{\exists} x_1, \ldots, x_n\, (\sigma_{=n} \curlywedge \varphi_C \curlywedge \psi_R \curlywedge \varphi_F)$ olsun. Tanım gereği $\mathfrak{A} \models \sigma$. Şimdi $\mathfrak{B} \models \sigma$ ise $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ olduğunu savunuyoruz. $\mathfrak{B} \models \sigma$ olduğundan her $\lambda \in D^{\mathfrak{B}}$ değerlemesi için $\mathfrak{B} \models \sigma[\lambda]$. Böyle bir λ değerlemesini keyfi seçelim ve $\lambda(x_i) := b_i,\ i = 1, \ldots, n$ olsun. Özellikle $\mathfrak{B} \models \sigma_{=n}[\lambda]$ olacağından $b_1, \ldots, b_n$ öğeleri ikişer ikişer birbirinden farklıdırlar. Dolayısıyla $h(a_i) := b_i$ ile tanımlanan $h : A \to B$ dönüşümü $|B|$ olduğundan bir tameşlemedir ve $\lambda = h \circ \beta$ olduğu aşikârdır. Biz $h : \mathfrak{A} \overset{\sim}{\to} \mathfrak{B}$ olduğunu savunuyoruz. Tanımın koşullarının sağlandığını göstermeliyiz; okura bırakılabilir, yine de bağıntılarla ilgili koşulu örnek olmak üzere gösterelim.

$R \in L$ bir k basamaklı bağıntı imi olsun. R bağıntı imi σ formülünün eklentileri içinde yalnızca φ_R formülünde geçer. Dolayısıyla $\mathfrak{A} \models \varphi_R[\beta]$ ve $\mathfrak{B} \models \varphi_R[\lambda]$. Şimdi $a'_1, \ldots, a'_k \in A$ ve $1 \le i \le k$ için $y_i = u(a'_i)$ olsun. $R^{\mathfrak{A}}(a'_1, \ldots, a'_k)$ ise tanım gereği φ_R eklenti olarak $R(y_1, \ldots, y_k)$ formülünü içerir. Bu ve $\mathfrak{B} \models \varphi_R$ önermelerinden $\mathfrak{B} \models R(y_1, \ldots, y_k)[\lambda]$, dd. $R^{\mathfrak{B}}(\lambda(y_1), \ldots, \lambda(y_k))$ ve $\lambda(y_i) = h(\beta(y_i)) = h(a'_i)$ olduğunu kullanarak

$R^{\mathfrak{B}}(h(a'_1),\dots,h(a'_k))$ elde ederiz. Böylece

$$R^{\mathfrak{A}}(a'_1,\dots,a'_k) \implies R^{\mathfrak{B}}(h(a'_1),\dots,h(a'_k))$$

kanıtlanmış olur. Benzer irdelemeyle $\neg R^{\mathfrak{A}}(a'_1,\dots,a'_k)$ ise φ_R eklenti olarak $\neg R(y_1,\dots,y_k)$ formülünü içerir ve biz $\neg R^{\mathfrak{B}}(h(a'_1),\dots,h(a'_k))$ formülünü elde eder ve

$$R^{\mathfrak{B}}(h(a'_1),\dots,h(a'_k)) \implies R^{\mathfrak{A}}(a'_1,\dots,a'_k)$$

çıkarımını kanıtlamış oluruz.

(2)(b) $|L|$ sonlu olmasın. $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ bir sonlu yapı ve $n := |A|$ olsun. $\Sigma := \operatorname{Th}\mathfrak{A}$ alalım. $\mathfrak{B} \models \operatorname{Th}\mathfrak{A}$ olsun. $\sigma_{=n} \in \operatorname{Th}\mathfrak{A}$ olduğundan $\mathfrak{B} \models \sigma_{=n}$ olur ve dolayısıyla B evreni de n öğelidir. A kümesinden B kümesine sonlu sayıda tameşleme vardır, bunlar $h_1,\dots,h_m$ olsunlar. Biz bunlardan en az bir tanesinin $\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$ yapıları arasında bir eşyapı dönüşümü olduğunu savunuyoruz. Öyle olmadığını varsayalım. Bu durumda her bir h_i için eşyapı tanımındaki koşullardan en az biri, en az bir kez bozulmuştur. Her bir h_i için bir bozan $l_i \in L$ seçelim; l_i bir sabit veya fonksiyon veya bağıntı imidir. $L_* := \{l_1,\dots,l_m\}$, $\mathfrak{A}_* := \mathfrak{A} \restriction L_*$ ve $\mathfrak{B}_* := \mathfrak{B} \restriction L_*$ olsun. Şimdi $\mathfrak{B}_* \models \operatorname{Th}\mathfrak{A}_*$ olacağından (2)(a)'dan dolayı $\mathfrak{A}_* \cong \mathfrak{B}_*$. Bu durumda en az bir k için $h_k : \mathfrak{A}_* \xrightarrow{\frown} \mathfrak{B}_*$ eşyapı dönüşümü olmalıdır; bu ise L_* dilinin seçiminden dolayı olamaz! Varsayımımız yanlıştır ve en az bir $h_i : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ bir eşyapı dönüşümüdür. ■

Not 4.4.3 (4.4.2)'den dolayı, $\mathbb{N}$ sonsuz olduğundan $\mathfrak{N}$ yapısı birinci dereceden bir dille eşyapı dışında tek olarak belirlenemez. Diğer yandan $\mathcal{K}^2_a$ ikinci dereceden Peano aritmetiğinin herhangi iki modelinin eşyapılı olduğunu biliyoruz. Bu iki kuram arasındaki temel fark bu kuramın α^2_{a7} tümevarım ilkesindedir. Buradan çıkan sonuç şudur: α^2_{a7} ilkesi hiçbir biçimde $\operatorname{Fm} L_a$ formülleriyle ifade edilemez, dd. tam olarak söylersek Λ_a aksiyomlarına başka hangi $\operatorname{Fm} L_a$ formüllerini eklersek ekleyelim elde edeceğimiz yeni kuram $\mathcal{K}^2_a$ kuramına denk olamaz! ▲

Tanım 4.4.4 *Bir $M \subseteq \operatorname{Yap} L$ sınıfına bir $\sigma \in \operatorname{Sav} L$ ile $M = \operatorname{Mod}\sigma$ ise bir **basit sınıf**, eğer bir $\Sigma \subseteq \operatorname{Sav} L$ ile $M = \operatorname{Mod}\Sigma$ ise bir **Δ-sınıfı** denir.*

Herhangi bir $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ için $\operatorname{Mod}\Gamma = \operatorname{Mod}\Gamma^{\dot\forall}$ olduğundan bu tanımda σ ve Σ savları yerine φ formülü ve Γ formül kümesini de alabilirdik; aynı kapıya çıkarlar.

Bir $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ kümesine her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ için $\Gamma \vdash \varphi \implies \varphi \in \Gamma$ ise, dd. $\operatorname{Bc}\Gamma = \Gamma$ ise çıkarımsal kapalı demiştik. $\Sigma \subseteq \operatorname{Sav} L$ ise çıkarımsal kapalılıktan her $\sigma \in \operatorname{Sav} L$ için $\Sigma \vdash \sigma \implies \sigma \in \Sigma$, dd. $\operatorname{Bt}\Sigma = \Sigma$ olmasını anlayacağız.

Tanım 4.4.5 *Bir $M \subseteq \operatorname{Yap} L$ sınıfı için bir $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ ile $M = \operatorname{Mod} \Gamma$ ise M sınıfı **aksiyomlaştırılabilir** denir. Eğer Γ sonlu seçilebilirse M sınıfı **sonlu aksiyomlaştırılabilir** denir.*

Önerme 4.4.6 *$M = \operatorname{Mod} \Gamma$ ve M sınıfı sonlu aksiyomlaştırılabilirse bir sonlu $\Delta \subseteq \Gamma$ ile de aksiyomlaştırılabilir.*

Kanıt. Genellikten bir şey kaybetmeden $\Gamma \subseteq \operatorname{Sav} L$. Bir sonlu $\Omega \subseteq \operatorname{Sav} L$ ile $M = \operatorname{Mod} \Omega$ olsun. $\Omega = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ ise $\sigma := \sigma_1 \curlywedge \cdots \curlywedge \sigma_n$ olsun. Elbette $M = \operatorname{Mod} \sigma = \operatorname{Mod} \Gamma$ olduğundan $\sigma \Vdash \Gamma$ ve $\Gamma \Vdash \sigma$. Gödel Tamlık Teoremi'nden $\Gamma \vdash \sigma$. Böylece sonlu sayıda $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \Gamma$ savları $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \vdash \sigma$ olacak biçimde vardır. Yine Gödel Tamlık Teoremi'nden $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \Vdash \sigma$ olur. Buradan $\Delta := \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ ile $\operatorname{Mod} \Delta \subseteq \operatorname{Mod} \sigma = \operatorname{Mod} \Gamma \subseteq \operatorname{Mod} \Delta$ olur ve $\operatorname{Mod} \Delta = M$ elde ederiz. ■

Önerme 4.4.7 *$M \subseteq \operatorname{Yap} L$ sınıfının sonlu aksiyomlaştırılabilmesi için gerek ve yeter koşul M ve $M^c := \operatorname{Yap} L \backslash M$ sınıflarının aksiyomlaştırılabilmesidir.*

Kanıt. $\Longrightarrow$: $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_n\} \subseteq \operatorname{Sav} L$ ve $M = \operatorname{Mod} \Delta$ olsun. $\delta := \delta_1 \curlywedge \cdots \curlywedge \delta_n$ olmak üzere $M = \operatorname{Mod} \delta$ ve $M^c = \operatorname{Mod} \neg\delta$.

$\Longleftarrow$: $\Delta, \Sigma \subseteq \operatorname{Sav} L$ ile $M = \operatorname{Mod} \Delta$ ve $M^c = \operatorname{Mod} \Sigma$ olsun.

$$\operatorname{Mod}(\Delta \cup \Sigma) = \operatorname{Mod} \Delta \cap \operatorname{Mod} \Sigma = M \cap M^c = \emptyset \tag{4.18}$$

eşitliği ve Kompaktlık Teoremi'nden sonlu $\Delta_1 \subseteq \Delta$ ve $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$ altkümeleri

$$\operatorname{Mod} \Delta_1 \cap \operatorname{Mod} \Sigma_1 = \operatorname{Mod}(\Delta_1 \cup \Sigma_1) = \emptyset \tag{4.19}$$

olacak biçimde vardır. (4.18) ve (4.19)'dan

$$M = \operatorname{Mod} \Delta \subseteq \operatorname{Mod} \Delta_1 \subseteq (\operatorname{Mod} \Sigma_1)^c \subseteq (\operatorname{Mod} \Sigma)^c = (M^c)^c = M$$

olur ve M sınıfı sonlu Δ_1 ile aksiyomlaştırılmıştır. ■

Örnek 4.4.8 Bazı örnekler verelim.

1. Bir $M \subseteq \operatorname{Yap} L$ sınıfındaki modeller sonlu olmakla beraber istenildiği kadar büyük sonlu modeller de içeriyorsa (3.17.5)'ten dolayı M sınıfı aksiyomlaştırılamaz.
2. **Bazı basit sınıflar:** Grupların, halkaların ve cisimlerin sonlu aksiyomları vardır; onların her birinin kapanışlarını da alabiliriz. Bu nedenle $M_g = \{\mathfrak{G} \mid \mathfrak{G} \in \operatorname{Mod} \Lambda_g\}$, $M_{ab} := \{\mathfrak{G} \mid \mathfrak{G} \in \operatorname{Mod} \Lambda_{ag}\}$, $M_h :=$

$\{\mathfrak{H} \mid \mathfrak{H} \in \operatorname{Mod} \Lambda_h\}$ ve $M_c := \{\mathfrak{C} \mid \mathfrak{C} \in \operatorname{Mod} \Lambda_c\}$ sınıfları birer basit sınıftır. p bir asal sayı olmak üzere karakteristiği p olan cisimlerin M_p sınıfı yine bir basit sınıftır; $M_p = \operatorname{Mod}(\sigma_C \curlywedge \chi_p)$.

Yine $\{(A, <) \mid \text{sıralanmış kümeler}\}$ bir basit sınıftır. $L_\emptyset = \emptyset$ dilinin yapılarının $M_{\leq n} = \{(A,) \mid |A| \leq n\}$, $M_{\geq n} = \{(A,) \mid |A| \geq n\}$ ve $M_{=n} = \{(A,) \mid |A| = n\}$ sınıfları basit sınıflardır: Bunlar sırasıyla $\sigma_{\leq n}, \sigma_{\geq n}$ ve $\sigma_{=n}$ savlarının modelleridirler.

3. **Basit olmayan Δ-sınıfları**: Sonsuz kümelerin M_∞ sınıfı bir Δ-sınıfıdır, çünkü $M_\infty = \operatorname{Mod} \Sigma_\infty$. Karakteristiği 0 olan cisimlerin M_{0c} sınıfı bir basit sınıf değildir ama bir Δ-sınıfıdır. $\Sigma := \{\sigma_C\} \cup \{\neg\chi_p \mid p, \text{asal}\}$ olmak üzere $M_{0c} = \operatorname{Mod} \Sigma$. Yine

$$M_{\infty g} := \{\mathfrak{G} \mid \mathfrak{G} \text{ sonsuz grup}\} = \operatorname{Mod}(\Sigma_\infty \cup \{\sigma_G\}) \text{ ve}$$
$$M_{\infty c} := \{\mathfrak{C} \mid \mathfrak{C} \text{ sonsuz cisim}\} = \operatorname{Mod}(\Sigma_\infty \cup \{\sigma_C\})$$

olduğu için sonsuz grupların sınıfı ile sonsuz cisimlerin sınıfı da birer Δ-sınıfıdırlar. Burada söz edilen Δ-sınıflarının basit sınıflar olmadıkları aşikârdır: Bu sınıfların hiçbiri (4.4.6)'dan dolayı sonlu aksiyomlaştırılamaz, dolayısıyla basit değillerdir. Örneğin $M_{\infty c}$ sonlu aksiyomlaştırılabilseydi (4.4.6)'dan dolayı bu sınıf bir sonlu $\Delta \subseteq \Sigma_\infty \cup \{\sigma_C\}$ ile de aksiyomlaştırılırdı. Δ kümesinde geçen ve Σ_∞'da olan aksiyomlar $\sigma_{\geq n_1}, \ldots, \sigma_{\geq n_k}$ olsunlar. p asal sayısını $n_1, \ldots, n_k$ sayılarından büyük olacak biçimde seçelim. $\mathbb{F}_p$ cismi Δ'nın modelidir, ancak p öğelidir!

Cebirsel kapalı cisimlerin sınıfının aksiyomlaştırılabildiğini biliyoruz. Yine (4.4.6) yardımıyla kolayca bu sınıfın sonlu aksiyomlaştırılamayacağı kolayca görülür. Yine bölünebilir Abel grupları sınıfı ve burulmasız Abel grupları sınıfı da birer Δ-sınıfıdırlar, ancak basit sınıflar değillerdir.

4. **Δ-sınıfı olmayan sınıflar:** Birinci örnekten dolayı sonlu kümelerin M_{sk}, sonlu grupların M_{sg} ve sonlu cisimlerin M_{sc} sınıfları birer Δ-sınıfı değillerdir.

▲

$\mathbb{F}$ bir sıralanmış cisim ve üstten sınırlı her $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{F}$ kümesinin supremumu varsa $\mathbb{F}$ cismi **tamdır** denir. Her ne kadar bir cismin tamlığını birinci dereceden bir dilde yazamıyorsak da yine de uygun seçilen bir $\Sigma \subseteq \operatorname{Fm} L_{sc}$ aksiyomlarının modellerinin tamı tamına tam sıralanmış cisimler olmasını umabiliriz. Aşağıdaki önerme bunun olamayacağını söyler.

Önerme 4.4.9 *Tam sıralanmış cisimlerin sınıfı—birinci dereceden bir dilde— aksiyomlaştırılamaz.*

Kanıt. Cebir dersinden herhangi iki tam sıralanmış cismin eş yapılı olduğunu biliyoruz. Diğer yandan $\mathbb{R}$ de bir tam sıralanmış bir cisimdir. Dolayısıyla hiçbir tam sıralanmış cisim sayılabilir olamaz. Eğer tam sıralanmış cisimler Σ aksiyomlarının modelleri olmuş olsaydı, $\mathcal{V}$ değişkenler kümesini sayılabilir seçerek, Aşağı Doğru Löwenheim-Skolem Teoremi'yle sayılabilir bir tam sıralanmış cismin olması gerekirdi! Öyleyse tam sıralanmış cisimler birinci dereceden bir dille aksiyomlaştırılamaz. ■

4.4.2 Tamlık ve Kesinlik

$\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ biçimsel tutarlı ve tam olsun. Her $\sigma \in \operatorname{Sav} L$ için ya $\Gamma \vdash \sigma$ ya da $\Gamma \vdash \neg\sigma$, dd. Γ her σ savı için bir karar verir. Daha önce (4.2.3)'te tutarlı Γ için:

$$\begin{aligned} \Gamma \text{ tamdır} &\iff \text{Her } \mathfrak{A} \in \operatorname{Mod}\Gamma \text{ için } \operatorname{Bt}\Gamma = \operatorname{Th}\mathfrak{A} \\ &\iff \text{Her } \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \operatorname{Mod}\Gamma \text{ için } \mathfrak{A} \equiv_b \mathfrak{B} \end{aligned}$$

olduğunu kanıtlamıştık. Dolayısıyla bir $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramının basit denk olmayan modelleri varsa Γ tam olamaz. Örneğin bir $\mathfrak{G}$ değişmeli grubu değişmeli olmayan bir $\mathfrak{H}$ grubuyla basit denk olamaz, dolayısıyla Λ_g tam değildir. Burada Gruplar Kuramı'na ilişkin $\sigma := \dot{\forall} x, y\,(x \bullet y = y \bullet x)$ savı için $\Lambda_g \nvdash \sigma$ ve $\Lambda_g \nvdash \neg\sigma$ olur. Diğer yandan Γ tutarlı ve tamsa her modelinde aynı teoremler geçerlidir; bir modelde kanıtlanan bir teorem tüm diğer modellerde de bir teoremdir.

Tanım 4.4.10 *κ bir çokluk sayısı olsun. $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramının en az bir κ-modeli varsa ve herhangi iki κ-modeli hep eşyapılı iseler $\mathcal{K}$ kuramı (veya Γ) **κ-kesindir** denir.*

$\mathcal{K}$ kuramının κ-kesin olması eşyapı dışında bir tek κ-modelinin olması demektir. Kesinlik ve tamlık arasındaki ilişkiyi veren bir teorem vereceğiz.

Teorem 4.4.11 (Vaught) *$\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ tutarlı ve $\kappa \geq \|L\|$ olsun. Γ'nın sonlu modeli yoksa ve Γ kuramı κ-kesinse Γ tamdır.*

Sonuç 4.4.12 *$\|L\| = \aleph_0$ ve $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ tutarlı ve sonlu modelleri yoksa herhangi bir sonsuz κ için Γ kuramı κ-kesinse tamdır.*

Kanıt. Γ'nın tam olmadığını varsayalım. En az bir $\sigma \in \operatorname{Sav} L$ ile $\Gamma \nvdash \sigma$ ve $\Gamma \nvdash \neg\sigma$ olur. Bu durumda $\Gamma_1 := \Gamma \cup \{\neg\sigma\}$ ve $\Gamma_2 := \Gamma \cup \{\sigma\}$ kuramları tutarlı olduklarından birer $\mathfrak{A}_1$ ve $\mathfrak{A}_2$ modellerine sahiptirler. $\mathfrak{A}_1$ ve $\mathfrak{A}_2$ aynı zamanda Γ'nın da modelleri olduğundan koşulumuzdan dolayı sonsuzdurlar. Duruma göre (4.2.19) veya (4.2.24) ile Γ_1 ve Γ_2'nin $\mathfrak{B}_1$ve $\mathfrak{B}_2$ κ-modellerini

$\mathfrak{A}_1 \equiv_b \mathfrak{B}_1$ ve $\mathfrak{A}_2 \equiv_b \mathfrak{B}_2$ olacak biçimde bulabiliriz. $\mathfrak{B}_1$ve $\mathfrak{B}_2$ aynı zamanda Γ'nın κ-modelleri olduklarından, varsayımdan dolayı $\mathfrak{B}_1 \cong \mathfrak{B}_2$ olur. Öyleyse $\operatorname{Th}\mathfrak{B}_1 = \operatorname{Th}\mathfrak{B}_2$ olmalıdır; bu ise söz konusu olamaz, çünkü $\neg\sigma \in \operatorname{Th}\mathfrak{A}_1 = \operatorname{Th}\mathfrak{B}_1$ ve $\sigma \in \operatorname{Th}\mathfrak{A}_2 = \operatorname{Th}\mathfrak{B}_2$. ■

Örnek 4.4.13 $\mathcal{K}_\infty$ sonsuz kümeler kuramı modeli olduğundan tutarlıdır ve her $\kappa \geq \aleph_0$ için κ-kesindir. Bu kuramda iki $(A, \emptyset)$ ve $(B, \emptyset)$ yapısının eşyapılı olması tam da A ve B kümelerinin eşgüçlü olmasıdır. (4.4.11)'den dolayı $\mathcal{K}_\infty$ sonsuz kümeler kuramı tamdır. ▲

Teorem 4.4.14 (Cantor) *$\mathcal{K}_{ydus}$ uç noktasız yoğun doğrusal sıralamalar kuramı $\aleph_0$-kesindir, dolayısıyla tamdır. Bu kuram $2^{\aleph_0}$-kesin değildir.*

Kanıt. Her şeyden önce $\mathcal{K}_{ydus}$ kuramının modelleri vardır ve tüm modelleri sonsuzdur. Şimdi bu kuramın $\aleph_0$-kesin olduğunu görelim. Bu kuramın herhangi bir $(S, \prec)$ modelinin, $|S| = \aleph_0$ ise $(\mathbb{Q}, <)$ ile eşyapılı olduğunu göstereceğiz. $h : \mathbb{N} \rightleftarrows S$ ve $h' : \mathbb{N} \rightleftarrows \mathbb{Q}$ tameşlemeleriyle S ve $\mathbb{Q}$'nun öğelerini $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olarak sıralayalım. Şimdi $\operatorname{dom} f_n \subseteq S$ olmak üzere kısmi $f_n : \operatorname{dom} f_n \to \mathbb{Q}$ fonksiyonlarını

$$f_n : (\operatorname{dom} f_n, \prec) \overset{\sim}{\to} (\operatorname{im} f_n, <) \text{ ve } f_0 \subset f_1 \subset f_2 \subset \cdots$$

ve her n için $\operatorname{im} f_n$ sonlu olacak biçimde tanımlayacağız. $f_0 := \emptyset$ olsun. Şimdi f_n koşullar sağlanacak biçimde tanımlanmış olsun.

(a) *n çift olsun.* $m := \min\{k \in \mathbb{N} \mid q_k \notin \operatorname{im} f_n\}$ olsun. Bu durumda üç durum söz konusudur:

(a)(1) q_m sayısı $\operatorname{im} f_n$'deki tüm öğelerden küçüktür. Bu durumda bir $s \in S$ öğesi $\operatorname{dom} f_n$'in tüm öğelerinden küçük olacak biçimde seçilsin. S'de uç noktalar olmadığından bu mümkündür.

(a)(2) q_m sayısı $\operatorname{im} f_n$'deki tüm öğelerden büyüktür. Bu durumda bir $s \in S$ öğesi $\operatorname{dom} f_n$'in tüm öğelerinden büyük olacak biçimde seçilsin. S'de uç noktalar olmadığından bu mümkündür.

(a)(3) q_m öğesi $\operatorname{im} f_n$'in iki öğesi arasındadır. Bu durumda $p \in \mathbb{Q}$ öğesi $\operatorname{im} f_n$ kümesinin q_m öğesinden küçük olan öğelerinin en büyüğü, q öğesi ise $\operatorname{im} f_n$ kümesinin q_m öğesinden büyük olan öğelerinin en küçüğü olsun. S yoğun sıralandığından $f_n^{-1}(p)$ ile $f_n^{-1}(q)$ arasında bir $s \in S$ seçebiliriz.

$f_{n+1} := f_n \cup \{(s, q_m)\}$. Elbette $f_n = f_{n+1}|\operatorname{dom} f_n$ ve f_{n+1} dönüşümü $(\operatorname{dom} f_{n+1}, \prec)$ ile $(\operatorname{im} f_{n+1}, <)$ arasında bir eşyapı dönüşümüdür.

(b) *n tek olsun.* Bu kez $m := \min\{k \mid s_k \notin \operatorname{dom} f_n\}$ olsun. Yukarıdaki irdelemelerin benzerleri ile bir $q \in \mathbb{Q}$ ile $f_{n+1} := f_n \cup \{(s_m, q)\}$ olarak açıklayarak bir kısmi f_{n+1} eşyapı dönüşümü tanımlanır.

$f := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ile bir $f : (S, \prec) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Q}, <)$ tanımlandığını görmeyi okura bırakıyoruz. Böylece $\mathcal{K}_{ydus}$ kuramı $\aleph_0$-kesindir ve tüm modelleri sonsuz olduğundan (4.4.11) ile $\mathcal{K}_{ydus}$ tamdır.

$(\mathbb{R}, <)$ ve $(\mathbb{R}^*, <)$ yoğun doğrusal uç noktasız sıralamalardır, ancak eşyapılı değillerdir (alıştırma). Dolayısıyla $\mathcal{K}_{ydus}$ kuramı $2^{\aleph_0}$-kesin değildir. ■

Aşağı Doğru Löwenheim-Skolem Teoremi'nden dolayı $(\mathbb{R}, <)$'nin kendisine basit denk olan sayılabilir bir $(A, <)$ altyapısı vardır. (5.4.14) Cantor Teoremi'nden dolayı ise $(\mathbb{Q}, <)$ ile $(A, <)$ eşyapılıdırlar. Dolayısıyla $(\mathbb{Q}, <) \equiv_b (\mathbb{R}, <)$ elde ederiz, dd. her $\sigma \in \operatorname{Sav} L_<$ için $\sigma \in \operatorname{Th}(\mathbb{Q}, <) \iff \sigma \in \operatorname{Th}(\mathbb{R}, <)$; ancak elbette $(\mathbb{Q}, <) \ncong (\mathbb{R}, <)$.

Bundan sonraki teorem veya örneklerimizde cebir ve doğrusal cebirden bazı bilgileri kanıtsız kullanacağız.

Önerme 4.4.15 *(a) K sayılabilir sonsuz bir cisimse her $\kappa > \aleph_0$ için K-vektör uzaylarının kuramı κ-kesindir, ancak $\aleph_0$-kesin değildir.*

(b) K bir sonlu cisimse K-vektör uzayları kuramı her sonsuz *κ için κ-kesindir.*

Kanıt. (a) V bir K vektör uzayı ve $|V| = \kappa > \aleph_0$ ise $\dim V = \kappa$. Boyutları aynı olan vektör uzayları ise eşyapılıdırlar. Öyleyse $\kappa > \aleph_0$ için K vektör uzayları κ-kesindir. Her $n \geq 1$ doğal sayısı için K^n bir K vektör uzayıdır; $|K^n| = \aleph_0$ ve $\dim K^n = n$. $m \neq n$ için K^m ve K^n eşyapılı değillerdir, dolayısıyla K vektör uzayları kuramı $\aleph_0$-kesin değildir.

(b) K sonlu bir cisim ve V bir sonsuz K vektör uzayı ise $\dim V = |V|$ olduğundan K vektör uzayları kuramı her sonsuz κ için kesindir. ■

Örnek 4.4.16 $(G, +, 0)$ bir bölünebilir burulmasız Abel grubu olsun. Her $x \in G$ ve her $n \geq 1$ doğal sayısı için tek olarak belirli bir $y \in G$ ile $ny = x$. Biz $y = x/n$ yazacağız ve her $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ için $\frac{m}{n}x := my = m\,(x/n)$ olarak açıklıyoruz. Bu tanımla G bir $\mathbb{Q}$ vektör uzayı olur. (4.4.15)(a)'dan dolayı *burulmasız bölünebilir gruplar Kuramı her $\kappa > \aleph_0$ için κ-kesindir.* Burulmasız ve birden çok elemanlı gruplar sonsuzdurlar. Dolayısıyla bu tür grupların sonlu modelleri olamaz. Böylece Vaught Teoremi'nden *birden çok elemanlı burulmasız, bölünebilir gruplar kuramının tam olduğunu* elde ederiz. $(\mathbb{Q}, +, 0)$ ve $(\mathbb{R}, +, 0)$ basit olmayan iki burulmasız bölünebilir gruptur. Dolayısıyla $\operatorname{Th}(\mathbb{Q}, +, 0) = \operatorname{Th}(\mathbb{R}, +, 0)$. ▲

Teorem 4.4.17 (Morley) *$\|L\| = \aleph_0$ olsun. Bir $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramı herhangi bir sayılamaz κ için kesinse her sayılamaz μ için kesindir.*

$\|L\| = \aleph_0$ olsun. Bu durumda $\kappa > \|L\|$ eşitsizliği κ'nın sayılamaz olması demektir. Herhangi bir $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramının sonsuz kesinliğine ilişkin karşılaşabileceğimiz durumlar Morley Teoremi'ne göre şunlardır:

1. Her sonsuz κ için kesin olan kuramlar. Örneğin $\mathcal{K}_\infty$ sonsuz kümeler kuramı veya K sonlu bir cisim olmak üzere K-vektör uzayları kuramı.
2. $\aleph_0$-kesin olmayıp her $\kappa > \aleph_0$ için kesin olan kuramlar. Örneğin K bir sayılabilir sonsuz cisim olduğunda K-vektör uzayları kuramı, (4.4.15) (a).
3. $\aleph_0$-kesin olup hiçbir sayılamaz κ için kesin olmayan kuramlar.
4. Hiçbir sonsuz κ için kesin olmayan kuramlar.

Biz uç noktasız yoğun doğrusal sıralamalar kuramının $\aleph_0$ kesin ancak $2^{\aleph_0}$ kesin olmadığını görmüştük. Şimdi Morley Teoremi bize bu kuramın her sayılamaz κ için kesin olmadığını söyler. Bu, üçüncü duruma bir örnektir.

Son olarak dördüncü duruma ilişkin bir örnek verelim. Her şeyden önce değişken kümesi olarak sayılabilir $\mathcal{V} = \{x_0, x_1, \ldots\}$ kümesini alcağız. $\mathfrak{A} = (A, <)$ yapısı şöyle tanımlansın. $A = \mathbb{N} \times \{0\} \sqcup \mathbb{N} \times \{1\}$ olsun, dd. A kümesi $\mathbb{N}$ kümesinin iki ayrık kopyasından oluşsun. $(m, i), (n, j) \in A$ için

$$(m, i) < (n, j) : \Longleftrightarrow \ i = j = 0 \text{ ve } m < n$$

olarak açıklansın. Özetle A kümesi $N := \mathbb{N} \times \{0\}$ ve $M := \mathbb{N} \times \{1\}$ gibi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin iki ayrık kopyasını içerir; N parçası sıralamasının tüm özellikleriyle $\mathbb{N}$ gibiyken M parçasının kendi öğeleri arasında $<$ bağıntısı olmadığı gibi ayrık parçaların öğeleri arasında da $<$ bağıntısı açıklanmamıştır. Elbette $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L_s$ ve $\operatorname{Th} \mathfrak{A}$ bir tam kuramdır.

Teorem 4.4.18 $\operatorname{Th} \mathfrak{A}$ *kuramı hiçbir sonsuz* κ *için* κ*-kesin değildir.*

Kanıt. Her şeyden önce N ve M kümeleri $\mathfrak{A}$ yapısının tanımlanabilir altkümeleridirler. Gerçekten de $\varphi(x) := \dot{\exists} y \, (x < y) \in \operatorname{Fm} L_s$ olmak üzere

$$N = \{a \in A \,|\, \mathfrak{A} \models \varphi(a)\} \text{ ve } M = \{a \in A \,|\, \mathfrak{A} \models \neg\varphi(a)\}.$$

$\Sigma := \operatorname{Th} \mathfrak{A}$ olmak üzere bize herhangi bir $\mathfrak{B} \in \operatorname{Mod} \Sigma$ verildiğinde $N_{\mathfrak{B}} := \{b \in B \,|\, \mathfrak{B} \models \varphi(b)\}$ kümesine $\mathfrak{B}$ yapısının **$\mathbb{N}$-kısmı** diyelim.

Önce Σ kuramının $\aleph_0$-kesin olmadığını göstereceğiz. L_s diline bir c sabiti ekleyelim ve $L_* := L_s \cup \{c\} = \{\prec, c\}$ dilini elde edelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için ψ_n ile

$$\dot{\exists} x_0, \ldots, x_n \ \varphi(c) \curlywedge x_0 < x_1 \curlywedge \cdots \curlywedge x_{n-1} < x_n \curlywedge x_n < c$$

formülünü gösterelim. Herhangi bir $\mathfrak{B} \in \operatorname{Yap} L_*$ için $\mathfrak{B} \models \Sigma \cup \{\psi_n\}$ ise bu $c^{\mathfrak{B}}$ öğesinin $\mathfrak{B}$ yapısının $\mathbb{N}$-kısmında olduğunu ve $\mathfrak{B}$ yapısının en az $n+1$ öğeli olduğunu söyler. Şimdi $\Omega := \Sigma \cup \{\psi_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ olsun. A kümesi sonsuz olduğundan her sonlu $\Delta \subseteq \Omega$ kümesinin bir modeli vardır: Bunun için Δ kümesindeki sonlu sayıdaki ψ_k formüllerindeki en büyük damga m

ise $n > m$ koşulunu sağlayan bir n seçip $c^{\mathfrak{A}} := (n, 0)$ seçelim. Böylece $(\mathfrak{A}, c^{\mathfrak{A}})$ yapısı Δ'nın bir modelidir. Kompaktlık Teoremi'nden dolayı Ω'nın bir $\mathfrak{B}_* \in \operatorname{Yap} L_*$ modeli vardır. Aşağı Doğru Löwenheim-Skolem Teoremi'nden dolayı $\mathfrak{B}_*$ modelini sayılabilir varsayabiliriz. Elbette $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}_* \restriction L_s$ yapısı Σ'nın bir modelidir. $c^{\mathfrak{B}_*} \in B$ öğesi $\mathfrak{B}$ yapısının $\mathbb{N}$-kısmındadır ve altında sonsuz çoklukta öğe olduğundan $\mathfrak{A}$ ile eşyapılı olamaz. Dolayısıyla $\operatorname{Th}\mathfrak{A}$ kuramı $\aleph_0$-kesin değildir.

Şimdi κ bir sayılamaz çokluk sayısı olsun. $L_s = \{\prec\}$ diline *ayrık* $C_\kappa := \{c_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ ve $D_\kappa := \{d_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ sabitlerini ekleyeceğiz ve ayrıca her $\alpha, \beta < \kappa$ ve $\alpha \neq \beta$ için $c_\alpha \neq c_\beta$ ve $d_\alpha \neq d_\beta$ olmasını isteyeceğiz. Şimdi her $\alpha < \beta < \kappa$ için $\xi_{\alpha\beta} := \neg c_\alpha \doteq c_\beta$ ve $\eta_{\alpha\beta} := \neg d_\alpha \doteq d_\beta$ olmak üzere Σ savlarına

$$\{\varphi(c_a) \curlywedge \neg\varphi(d_a) \mid \alpha < \kappa\} \cup \{\xi_{\alpha\beta} \mid \alpha < \beta < \kappa\} \cup \{\eta_{\alpha\beta} \mid \alpha < \beta < \kappa\}$$

aksiyomlarını ekleyerek elde edilen aksiyomlarımızı Φ ile gösterelim. Her sonlu $\Psi \subseteq \Phi$ bir modele sahiptir: Ψ formüllerinde geçen sonlu sayıda c_α sabit imi uygun biçimde $\mathfrak{A}$ yapısının $\mathbb{N}$-kısmında, Ψ formüllerinde geçen sonlu sayıda d_α sabit imi uygun biçimde $\mathfrak{A}$ yapısının diğer kısmında yorumlanarak Ψ'nin bir modeli kazanılır. Kompaktlık Teoremi'nden dolayı Φ'nin bir modeli vardır. Bu modelin gücü $\geq \kappa$ olmak zorundadır. Aşağı Doğru Löwenheim-Skolem Teoremi'nden Φ'nin gücü κ olan bir $\mathfrak{B}_* \in \operatorname{Yap}(L_s \cup C_\kappa \cup D_\kappa)$ modeli vardır. C_κ sabitlerinin yorumları $\mathfrak{B}_*$'ın $\mathbb{N}$-kısmında, D_κ imlerinin yorumları ise bu kısmın tümleyeninde olduğundan $\mathfrak{B}_*$ yapısının $\mathbb{N}$-kısmının da, tümleyeninin de gücü κ'dır. Şimdi $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}_* \restriction L_s$ olsun; elbette bu yapının da $\mathbb{N}$-kısmının ve tümleyeninin gücü κ'dır. $B = |\mathfrak{B}|$ kümesinin $\mathbb{N}$-kısmını N ile gösterelim ve $N^c := B \backslash N$ olsun. Yalınlık açısından $\prec$ iminin $\mathfrak{B}$ yapısındaki yorumunu $<$ ile gösterelim. N ve N^c kümelerinin gücü κ'dır ve N^c kümesinin öğeleri ne birbirleriyle ne de N kümesinin öğeleriyle $<$ bağıntısında değillerdir. Bu nedenle herhangi bir sayılabilir sonsuz $M \subseteq N^c$ ile oluşturulan $\mathfrak{C} := \mathfrak{B}|N \cup M$ altyapısı için $\mathfrak{C} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ olduğu (4.2.16) ile kolayca görülür. Böylece $\operatorname{Th}\mathfrak{A} = \operatorname{Th}\mathfrak{B} = \operatorname{Th}\mathfrak{C}$, ancak eşyapı dönüşümleri yapılarımızın $\mathbb{N}$-kısımlarına ve tümleyenlerine sadık kalacağı ve M ile N^c eşgüçlü olmadıkları için $\mathfrak{B}$ ve $\mathfrak{C}$ eşgüçlü, dolayısıyla eşyapılı olamaz. Bu nedenle $\operatorname{Th}\mathfrak{A}$ kuramı κ-kesin değildir. ■

p bir asal sayı olmak üzere $\mathcal{K}_{pck}$ ile karakteristiği p olan cebirsel kapalı cisimler kuramını ve $\mathcal{K}_{0ck}$ ile ise karakteristiği 0 olan cebirsel kapalı cisimler kuramını gösterelim.

Teorem 4.4.19 *$\kappa > \aleph_0$ olsun. Her asal p için $\mathcal{K}_{pck}$ kuramı ve $\mathcal{K}_{0ck}$ kuramı κ-kesindirler; ayrıca bu kuramlar tamdırlar.*

Kanıt. K bir cebirsel kapalı cisimse sonlu olamaz! Gerçekten de $K = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ise

$$(x - a_1) \cdots (x - a_n) + 1$$

polinomunun K cisminde kökü yoktur!

κ aşkınlık dereceleri sayılamaz sonsuz olan aynı karakteristikli iki cebirsel kapalı cisim eşyapılıdır (Steinitz) ve bu durumda bu cisimlerin gücünün de κ olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla kuramlarımız κ-kesindir ve (4.4.12)'den dolayı bu kuramlar tamdır. ■

Teorem 4.4.20 *$\sigma \in \operatorname{Sav} L_c$ için aşağıdaki önermeler denktirler:*

1. *σ savı $\mathbb{C}$ cisminde doğrudur.*
2. *σ karakteristiği 0 olan her cebirsel kapalı cisimde doğrudur.*
3. *σ karakteristiği 0 olan bir cebirsel kapalı cisimde doğrudur.*
4. *Bir m doğal sayısı, her asal $p > m$ için σ savı, karakteristiği p olan en az bir cebirsel kapalı cisimde doğru olacak biçimde vardır.*
5. *Bir m doğal sayısı, her asal $p > m$ için σ savı, karakteristiği p olan her cebirsel kapalı cisimde doğru olacak biçimde vardır.*

Kanıt. (4.2.3)'ten dolayı (1) $\iff$ (2) $\iff$ (3) ve (4) $\iff$ (5).

(2) $\implies$ (5): Şimdi σ savı karakteristiği 0 olan her cebirsel kapalı cisminde doğru olsun, dd. $\sigma \in \operatorname{Mt} \mathcal{K}_{0ck}$. Tamlık Teoremi'nden dolayı $\sigma \in \operatorname{Bt} \mathcal{K}_{0ck}$, dd. $\mathcal{K}_{0ck} \vdash \sigma$. Bu biçimsel kanıtta en fazla sonlu sayıda $\neg\chi_p$ tipinde aksiyom geçebilir; bunlarda geçen p sayılarının en büyüğü m ise her asal $p > m$ için $\mathcal{K}_{pck} \vdash \sigma$ ve buradan ise Tamlık Teoremi'yle $\mathcal{K}_{pck} \Vdash \sigma$ olur.

$\neg(2) \implies \neg(5)$: $\mathcal{K}_{0ck} \not\Vdash \sigma$ olsun. $\mathcal{K}_{0ck}$ tam olduğundan $\mathcal{K}_{0ck} \Vdash \neg\sigma$. Ancak (2) $\implies$ (5) olduğundan bir m_* doğal sayısı ile her asal $p > m_*$ için $\mathcal{K}_{pck} \Vdash \neg\sigma$ olur; dolayısıyla (5) yanlıştır. ■

Bu teoremde σ savının "doğruluğundan" söz edilmektedir; anlamsal alandayız. Bu şu demektir: L_c dilinde ifade edilmiş bir σ savının herhangi bir yöntemle ve herhangi bir araçla (topolojik, analitik, vs...) $\mathbb{C}$'de doğru olduğunu kanıtlarsak, σ savı karakteristiği 0 olan *her* cebirsel kapalı cisimde de doğrudur. Aşağıdaki teoremi cebirden ödünç alalım:

Önerme 4.4.21 *p bir asal sayı olmak üzere $\mathbb{K}_p$ ile p öğeli cismimizi ve $\overline{\mathbb{K}_p}$ ile bunun cebirsel kapanışı gösterelim. Bu durumda*

$$\overline{\mathbb{K}_p} = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{K}_{p^n}.$$

Özellikle $\overline{\mathbb{K}_p}$ cisminin sonlu eleman tarafından üretilen her altcismi sonludur.

Önerme 4.4.22 *p bir asal sayı ve*

$$f_1(X_1,\ldots,X_n),\ldots,f_n(X_1,\ldots,X_n)\in\overline{\mathbb{K}_p}[X_1,\ldots,X_n]$$

olmak üzere

$$f=(f_1,\ldots,f_n):\overline{\mathbb{K}_p}\to\overline{\mathbb{K}_p}$$

dönüşümü birebirse örtendir.

Kanıt. f dönüşümünün örten olmadığını varsayalım. $f_1,\ldots,f_n$ polinomlarında geçen tüm katsayılar $a_1,\ldots,a_k$ ve $(b_1,\ldots,b_n)\notin \operatorname{res} f$ olsun. $a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_n$ öğelerinin $\overline{\mathbb{K}_p}$'de ürettiği $\mathbb{K}$ cismi (4.4.21)'den dolayı sonludur. Bu durumda $f|\mathbb{K}^n:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n$ sonlu kümeler arasında birebir ama örten olmayan bir dönüşüm olur. Bu bir çelişkidir! ■

Teorem 4.4.23 *$\mathbb{K}$ bir cebirsel kapalı cisim ve*

$$f_1(X_1,\ldots,X_n),\ldots,f_n(X_1,\ldots,X_n)\in\mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n]$$

olmak üzere

$$f=(f_1,\ldots,f_n):\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n$$

dönüşümü birebirse örtendir.

Kanıt. $f_1,\ldots,f_n$ polinomlarının dereceleri en fazla m olsun. Önermemiz L_c dilinde formüle edilebilir, dd. "$f_1,\ldots,f_n$ dereceleri en fazla m olan polinomlar ve $f=(f_1,\ldots,f_n)$ dönüşümü birebirse örtendir" önermesi L_c dilimizin bir σ formülü ile ifade edilebilir.

p bir asal sayı olmak üzere $\mathbb{K}$ cismimizin karakteristiği p olsun. σ savımız (4.4.22)'den dolayı $\overline{\mathbb{K}_p}$ için doğrudur. (4.4.19)'dan dolayı σ savı $\mathbb{K}$ için doğrudur.

$\mathbb{K}$ cismimizin karakteristiği 0 ise sav doğrudan (4.4.22) ve (4.4.20)'den çıkar. ■

4.5 Yaban Aritmetik

$\mathcal{K}_a$ kuramının $\mathfrak{N}=(\mathbb{N},+,\cdot,S,0)$ modeline ve bununla eşyapılı olanlara bu kuramın **olağan** (**bildik** veya **standart**) **modeli**, bununla eşyapılı olmayan modellerine—ki bunlar $\mathfrak{N}$ yapısını bir altyapı olarak içerecekler ve fazlalıkları olacaktır —ise **yaban** (**aykırı** veya **olağandışı)** diyelim. $\mathcal{K}_a$ kuramının bir sayılabilir yaban modelini (4.2.8)'de tanıdık. Bu modele biraz yakından bakacağız.

Her şeyden önce L_a diline $\prec$ tanımlanabilir imini

$$x \prec y \leftrightarrow \neg x \dot{=} y \curlywedge \dot{\exists} z\,(z \dot{+} x \dot{=} y) \tag{4.20}$$

tanımlayan aksiyomuyla katalım. $\mathcal{K}_a^< := (L_a \cup \{\prec\}, \Lambda_a)$ ile göstereceğimiz bu kuramın bir modeli, $<$ bağıntısı $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesindeki bildik sıralama olmak üzere $\mathfrak{N}_< := (\mathbb{N}, +, \cdot, S, <, 0)$ yapısıdır. Ancak $\mathcal{K}_a^<$ kuramının $\mathcal{K}_a$ kuramının bir tutucu genişletilmişi olduğunu biliyoruz. Bu nedenle herhangi bir $\sigma \in \operatorname{Sav} L_a$ için $\sigma \in \operatorname{Th}\mathfrak{N}_<$ ise $\sigma \in \operatorname{Th}\mathfrak{N}$'dir. Diğer yandan $\sigma_< \in \operatorname{Sav}(L_a \cup \{\prec\})$ savında eğer $\prec$ imi geçiyorsa, bu (4.20) ile elimine edilerek bir $\sigma \in \operatorname{Sav} L_a$ savı elde edilir ve biz $\mathcal{K}_a^< \vdash \sigma_< \leftrightarrow \sigma$ olduğunu kanıtladık; dolayısıyla $\sigma_< \in \operatorname{Th}\mathfrak{N}_<$ ise $\sigma \in \operatorname{Th}\mathfrak{N}$. Ayrıca $\operatorname{Th}\mathfrak{N} \subseteq \operatorname{Th}\mathfrak{N}_<$ olduğundan eğer $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod}\operatorname{Th}\mathfrak{N}_<$ ise $\mathfrak{A} \restriction L_a \in \operatorname{Mod}\operatorname{Th}\mathfrak{N}$ olur. Bu nedenle, yaban modelimizi daha iyi çıkacağız. $L_a^< := L_a \cup \{\prec\}$ olsun.

(4.2.8)'in kanıtındaki Σ aksiyomları yerine bu kez

$$\Sigma_< := \{\underline{n} \prec c \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

aksiyomlarını alacağız.

Teorem 4.5.1 $\operatorname{Th}\mathfrak{N}_<$*'nin* $\mathfrak{N}_<$ *ile eşyapılı olmayan bir sayılabilir yaban modeli vardır.*

Kanıt. c sabit imi $L_a^<$ dilinde geçmeyen yeni bir sabit imi ve $L := L_a^< \cup \{c\}$ olsun. $\operatorname{Th}\mathfrak{N}_< \cup \Sigma_<$ kuramının her sonlu Δ altkümesinin bir modeli vardır. Gerçekten de Δ sonlu kümesinde $\Sigma_<$ kümesinden sonlu sayıda aksiyom bulunur. m doğal sayısını bunlarda geçen n doğal sayılarından büyük olacak biçimde seçer ve $c^{\mathfrak{A}} := m$ olarak yorumlarsak $(\mathfrak{N}_<, m)$ yapısı Δ'nın bir modelidir. Kompaktlık Teoremi'nden dolayı $\operatorname{Th}\mathfrak{N}_< \cup \Sigma_<$ kuramının bir $\mathfrak{B}'$ modeli vardır. Okur kolayca farklı m, n doğal sayıları için $\neg \underline{m} \dot{=} \underline{n}$ savının $\operatorname{Th}\mathfrak{N}_<$'de olduğunu görür; dolayısıyla $\underline{m}^{\mathfrak{B}'} \neq \underline{n}^{\mathfrak{B}'}$. Bu nedenle $B = |\mathfrak{B}'|$ bir sonsuz kümedir. $\mathcal{V}$ değişkenler kümemizi sayılabilir seçersek $\|L\| = \aleph_0$ olacağından (3.17.6)'dan dolayı $\|B\| = \aleph_0$ seçebiliriz. $\mathfrak{N}'_< := \mathfrak{B}' \restriction L_a^<$ yapısı özellikle $\operatorname{Th}\mathfrak{N}_<$'nın bir modeli olduğundan $\mathfrak{N}_< \equiv_b \mathfrak{N}'_<$, dd. $\operatorname{Th}\mathfrak{N}_< = \operatorname{Th}\mathfrak{N}'_<$ olur.

Görsellik açısından B yerine $\mathbb{N}'$ yazıp $\dot{+}, \bullet, \prec, \mathbf{S}, \mathbf{0}, \underline{n}$ ve c'nin $\mathfrak{N}'_<$ modelindeki yorumlarını $+', \cdot', <', S', 0', n'$ ve c' ile gösterelim. $\Sigma_<$ savlarından dolayı her $n \in \mathbb{N}$ için $n' < c'$ olacaktır. Bundan dolayı hiçbir $h : \mathfrak{N}_< \to \mathfrak{N}'_<$ eşyapı dönüşümü olamaz! Çünkü böyle bir durumda bir $m \in \mathbb{N}$ ile $h(m) = c'$ ve dolayısıyla her $m < n \in \mathbb{N}$ için $h(m) < h(n)$, dd. $c' < n'$ olması gerekirdi ki bu, söz konusu değildir. ■

$\sigma \in \operatorname{Sav} L_a^<$ için

$$\sigma^{\mathfrak{N}_<} \in \operatorname{Th}\mathfrak{N}_< \iff \sigma^{\mathfrak{N}'_<} \in \operatorname{Th}\mathfrak{N}'_< \tag{4.21}$$

Özellikle $\sigma^{\mathfrak{N}_<} \in \operatorname{Th}\mathfrak{N}_<$ ise $\sigma^{\mathfrak{N}_<}$ formülünde geçen her $+, \cdot, S, <, 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ yerine geçtikleri her yerde, sırasıyla $+', \cdot', S', <', 0'$ ve n' yazarak elde ettiğimiz $\sigma^{\mathfrak{N}'_<} \in \operatorname{Th}\mathfrak{N}'_<$ olur. Örneğin $\mathfrak{N}_<$ yapısında

$$\forall x \exists y\, (x = y + y \vee x = y + y + 1)$$

doğrudur; sözlerle her doğal sayı ya çifttir, ya da tektir. Bu önermenin $\mathfrak{N}'_<$ yapısındaki

$$\forall x \exists y\, \big(x = y +' y \vee x = y +' y +' 1'\big)$$

karşılığı da doğrudur. Öyleyse $\mathbb{N}'$ evreninde de çift ve tek sayılardan bahsedebiliriz. (4.21)'in doğrudan sonucu olarak her $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} m \neq n &\iff m' \neq n' \\ m + n = p &\iff m' +' n' = p' \\ m \cdot n = q &\iff m' \cdot' n' = q' \\ m < n &\iff m' <' n' \end{aligned}$$

Bunlar doğrudan aşağıdaki önermeyi verirler:

Önerme 4.5.2 *$h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$ $(n \rightsquigarrow n')$ ile bir $h : \mathfrak{N}_< \hookrightarrow \mathfrak{N}'_<$ gömmesi tanımlanır.*

$\mathfrak{N}_< \cong h[\mathfrak{N}_<]$ olduğundan $\mathfrak{N}_<$ yapısını $\mathfrak{N}'_<$ yapısının bir altyapısı olarak düşünebiliriz: $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısını n' ile özdeş kılacak ve $h\,[\mathbb{N}]$ kümesini, uygun gördüğümüz yerde $\mathbb{N}$ ile göstermekten çekinmeyeceğiz ve bu kümenin öğelerine $\mathfrak{N}'_<$ yapısının *doğal sayılarının* kümesi diyeceğiz. En azından $c' \notin \mathbb{N}' \backslash h\,[\mathbb{N}]$ olduğunu biliyoruz. $\mathbb{A} := \mathbb{N}' \backslash h\,[\mathbb{N}]$ kümesinin öğelerine $\mathfrak{N}'_<$ yapısının **aykırı** veya **yaban** veya **standart dışı sayıları** denir. Çoğu zaman kısaca **yaban sayı** diyeceğiz. $\mathbb{N}'$'nün öğelerine **yaban doğal sayılar** diyelim.

$a \in \mathbb{N}'$ bir yaban sayı olsun. $a_0 := a$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için $a_n := (S')^n a$ olsun, dd. $a_1 = S'a_0$, $a_2 = S'a_1, \ldots$ Ancak $\mathfrak{N}_<$ yapısında $\forall x\,(x < Sx)$ doğru olduğundan $\mathfrak{N}'_<$ yapısında $\forall x\,(x <' S'x)$ doğrudur ve bunun bir sonucu olarak $a_0 <' a_1 <' a_2 <' \cdots$ olur. Diğer yandan $\mathfrak{N}_<$ yapısında sıfırdan farklı her doğal sayının bir dolaysız öncülü vardır, dd. $\forall x\,(x \neq 0 \implies \exists! y\; x = Sy)$. Dolayısıyla $\mathfrak{N}'_<$ yapısında $\forall x(x \neq 0' \implies \exists! y\; x = S'y)$ doğrudur. a yaban sayımız için $a \neq 0'$ olduğundan tek olarak belirli bir $b \in \mathbb{N}'$ ile $S'b = a$ olur. $a_{-1} := b$ olarak tanımlansın. Elbette a_{-1} bir yaban sayıdır; olmasaydı ardılı olan a da doğal sayı olurdu! Her $n \geq 1$ için tek olarak belirli a_{-n-1} yaban sayıları $S'a_{-n-1} = a_{-n}$ olacak biçimde tanımlanır ve

$$\cdots <' a_{-2} <' a_{-1} <' a_0 <' a_1 <' a_2 <' \cdots$$

Böylece her a yaban sayımız $\mathbb{Z}$ benzeri bir

$$a_Z := \{\ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots\}$$

zinciri tanımlar. Okur kolayca $d \in a_Z$ ise $a_Z = d_Z$ olduğunu, bunun bir sonucu olarak a, b yaban sayıları için $a_Z \cap b_Z \neq \emptyset \implies a_Z = b_Z$ olduğunu görebilir. Dolayısıyla $\{a_Z \,|\, a \in \mathbb{N}'\}$ kümesi $\mathbb{N}'\backslash\mathbb{N}$ yaban sayılar kümesinin bir parçalanışıdır. Aritmetiğin $x\dot{+}\mathbf{0}\doteq x$ ve $x\dot{+}\boldsymbol{S}y\doteq\mathbf{S}\,(x+y)$ aksiyomlarından her a yaban sayısı için $a +' 0' = a$ ve

$$a_0 +' 1' = a_0 +' S'0' = S'\left(a_0 +' 0'\right) = S'a_0 = a_1$$

elde ederiz. Buradan yola çıkarak kolayca her $n, k \in \mathbb{N}$ için $a_n +' k = a_{n+k}$ olduğunu okur kolaca görür. $\forall x \neg\exists y(x < y < Sx)$ formülü $\mathfrak{N}_<$ yapısının bir teoremi olduğundan $\forall x \neg\exists y(x <' y < S'x)$ formülü $\mathfrak{N}_<$ yapısının bir teoremidir. Dolayısıyla $a, b \in \mathbb{A}$ farklı yaban sayılarsa ve $a_Z \cap b_Z = \emptyset$ ise şu iki durum söz konusudur: Her $a_n \in a_Z$ ve her b_m için ya hep $a_n <' b_m$, ya da hep $b_m <' a_n$ olur. Bu nedenle

$$\mathbb{A}_Z := \{a_Z \,|\, a \in \mathbb{A}\}$$

kümesinde her $a_Z, b_Z \in \mathbb{A}_Z$ için

$$a_Z <'' b_Z :\iff a_Z \neq b_Z \wedge a <' b$$

tanımı kusursuzdur.

Teorem 4.5.3 $(\mathbb{A}_Z, <'')$ *uç noktasız, yoğun ve doğrusal sıralanmış sayılabilir sonsuz bir yapıdır.*

Kanıt. (1) Bir yandan $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{N}'$ ve $\mathbb{N}'$ sayılabilir sonsuz olduğundan $\mathbb{A}$ kümesi en fazla sayılabilir sonsuz olabilir. Diğer yandan $c' \in \mathbb{A}$ ve c'_Z sonsuz ve $c'_Z \subseteq \mathbb{A}$ olduğundan $\mathbb{A}$ sayılabilir sonsuzdur.

(2) $<'$ bağıntısı $\mathbb{N}'$'de bir doğrusal sıralama olduğundan $<''$ bağıntısı $\mathbb{A}_Z$'de bir doğrusal sıralamadır.

(3) Şimdi $\mathbb{A}_Z$'de bir en büyük öğe olmadığını savunuyoruz. $b_Z \in \mathbb{A}_z$ öğesinin en büyük öğe olduğunu varsayalım. $b \in \mathbb{A}$ ve $b \neq 0'$. Diğer yandan $x \neq 0 \implies x < x + x$ formülü $\mathfrak{N}_<$ yapısında doğru olduğundan $x \neq 0 \implies x <' x +' x$ formülü $\mathfrak{N}'_<$ yapısında doğrudur. Özelleştirme ile $b \neq 0' \implies b <' b +' b$ doğrudur. Ayrıca $b \neq 0'$ olduğundan buradan $b <' b +' b$ elde ederiz. Eğer $b_Z \neq (b +' b)_Z$ ise son eşitsizlikten $b_Z <'' (b +' b)_Z$ elde ederiz ve bu b_Z'nin en büyük öğe olması ile çelişir. $b_Z = (b +' b)_Z$ olamayacağını görelim. Böyle olsaydı $b +' b \in b_Z$ dolayısıyla bir $n \in \mathbb{N}$ ile $b +' n' = b +' b$

olurdu ki buradan $n' = b$ çelişkisine ulaşırız: Bu çıkarımın kaynağı ise $\mathfrak{N}_<$ yapısında geçerli olan $\forall x, y, z(x + y = x + z \implies y = z)$ teoreminin $\mathfrak{N}'_<$ yapısındaki $\forall x, y, z(x +' y = x +' z \implies y = z)$ karşılığıdır.

(4) $\mathbb{A}_Z$'nin bir en küçük öğesi yoktur. $\mathfrak{N}_<$ yapısında 0 ve 1'den farklı her n doğal sayısı için $m < n$ olan bir doğal sayı $m+m = n$ veya $m+m = n+1$ olacak biçimde vardır; n çiftse ilk durum tekse ikinci durum söz konusudur ve m sayısı $n/2$ sayısının tam kısmıdır. Bu önerme $L_a^<$ ile ifade edilebilir: $\dot\forall x(\neg x\doteq\mathbf{0} \curlywedge \neg x\doteq\mathbf{S0} \to \dot\exists y(y \prec x \curlywedge (y\dot+y\doteq x \curlyvee y\dot+y\doteq x\dot+\boldsymbol{S0})))$. Bu elbette $\mathfrak{N}'_<$ yapısında da doğrudur. $a \in \mathbb{A}$ bir yaban sayı olmak üzere $a \neq 0'$ ve $a \neq 1'$ olduğundan, a hangi yaban sayı olursa olsun bir b sayısı $b <' a$ ve $b +' b = a$ veya $b +' b = a +' 1'$ olacak biçimde vardır. $\mathfrak{N}'_<$ yapısının doğal sayıları toplama işlemine göre kapalı olduğundan b bir doğal sayı olamaz, bir yaban sayıdır. $b_Z \neq a_Z$ olduğunu, (3)'tekine benzer bir irdelemeyle görmeyi okura bırakıyoruz; dolayısıyla $b_Z <'' a_Z$. Böylece her a_Z zincirine karşılık ondan daha küçük bir b_Z zincirimiz vardır.

(5) $(\mathbb{A}_Z, <'')$ yoğun sıralanmıştır. x, y herhangi iki doğal sayı ve z ise $(x+y)/2$ sayısının tam kısmı ise $z+z = x+y \vee z+z = S(x+y)$ doğrudur. z sayısına x, y sayılarının ortalaması diyelim

$$\theta(x, y, z) := z\dot+z\doteq x\dot+y \curlyvee z\dot+z\doteq\mathbf{S}(x\dot+y)$$

olmak üzere gereksinim duyduğumuz $\mathfrak{N}_<$ yapısının bazı teoremlerinin $L_a^<$ dilindeki ifadelerini verelim:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &:= \dot\forall x, y\dot\exists z\theta\,(x, y, z)\,,\\
\sigma_2 &:= \dot\forall x, y, z(\theta(x, y, z) \curlywedge x \prec y \curlywedge \neg y\doteq\mathbf{S}x) \to (x \prec z \curlywedge z \prec y),\\
\sigma_3 &:= \dot\forall x, y(x \prec y \to \neg\dot\exists z\,(y\dot+z\doteq x)),\\
\sigma_4 &:= \dot\forall x, y\ \ (x\dot+y)\dot+(x\dot+y)\doteq x\dot+(x\dot+(y\dot+y))\,,\\
\sigma_5 &:= \dot\forall x, y, z\,(x\dot+y\doteq x\dot+z \to y\doteq z)\,,\\
\sigma_6 &:= \dot\forall x, y, z\,(x\dot+(y\dot+z)\doteq y\dot+(x\dot+z))\,.
\end{aligned}$$

Bu teoremlerden σ_1 bize herhangi iki doğal sayının ortalamasının varlığını söylerken σ_2 ise eğer x, y doğal sayılar ve $x < y$ ve $y \neq x + 1$ ise z ortalaması için $x < z < y$ olduğunu söyler. $\sigma_1, \ldots, \sigma_6$ savları $\mathfrak{N}'_<$ yapısında da doğrudurlar.

Şimdi $a_Z, b_Z \in \mathbb{A}_Z$ zincirleri $a_Z <'' b_Z$ olacak biçimde keyfi verilsinler. Tanım gereği $a <' b$ olacaktır. σ_1'den dolayı bir a ve b'nin p ortalaması vardır. Ayrıca $a_Z \cap b_Z = \emptyset$ olduğundan $b \neq S'a$. Buradan σ_2 ile $a <' p <' b$ olur. $a <' p$ olduğundan $p \in \mathbb{A}$. Geriye $a_Z \neq p_Z$ ve $b_Z \neq p_Z$ olduğunu göstermek kalıyor. Bunun içinse $p \notin a_Z$ ve $p \notin b_Z$ olduğunu göstermek yeterlidir. Böyle olduğunu göstereceğiz.

Şimdi p ortalaması için $p+'p = a+'b$ olsun. $p \in a_Z$ olduğunu varsayalım. Bir $n \in \mathbb{N}$ ile ya $p +' n' = a$, ya da $a +' n' = p$ olmak zorundadır. σ_3'ten dolayı ilk şık olamaz; $a+'n' = p$ olmak zorundadır. Böylece $a+'b = p+'p = (a +' n') +' (a +' n') \overset{\sigma_4}{=} a +' (a +' (n' +' n'))$. Burada ise σ_5 ile $k' := n' +' n'$ bir doğal sayı olmak üzere $b = a +' (n' +' n') = a +' k'$ elde edilir. Bu ise $b \in a_Z$ demektir ki olamaz.

Şimdi $p \in b_Z$ olduğunu varsayalım. Benzer bir irdelemeyle bir $n \in \mathbb{N}$ ile $p +' n' = b$ olduğu görülür. $p +' p = a +' b = a +' (p +' n') \overset{\sigma_6}{=} p +' (a +' n')$ ve buradan σ_5 ile $p = a +' n'$ elde ederiz ki bu $p \in a_Z$ demektir ki $p \in b_Z$ ile çelişir. Dolayısıyla $p +' p = a +' b$ durumunda $a_Z \neq p_Z$ ve $p_Z \neq b_Z$ ve $a_Z <'' p_Z <'' b_Z$ olur.

$p+'p = a+'S'b$ durumunu benzer biçimde irdelemeyi okura bırakıyoruz. ■

Cantor Teoremi'nden dolayı uç noktasız yoğun doğrusal sıralamalar $\aleph_0$-kesindir. $\mathbb{Q}_0$ kümesi $(0,1)$ açık aralığındaki rasyonel sayılar olmak üzere, $<$ doğal sıralamasıyla alındığında $(\mathbb{A}_Z, <'') \cong (\mathbb{Q}_0, <)$. Diğer yandan her $n \in \mathbb{N}$ ve her yaban $a \in \mathbb{A}$ sayısı için $n' <' a$ olduğunu biliyoruz. Daha önce de söylediğimiz gibi her $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısını $n' = \underline{n}^{\mathfrak{N}'_<}$ ile özdeşlersek $\mathbb{N}'$ kümesinin bir resmini verebiliriz. Bu, $[0,1)$ aralığında 0 yerine $0, 1, 2, \ldots$ doğal sayılarının ve her bir $r \in (0,1)$ rasyonel sayısı yerine bir a_Z zincirinin konduğu bir kümedir. $a_Z, b_Z \in \mathbb{A}_Z$ ve $a_Z <' b_Z$ olmak üzere, öğeler $<'$ sıralamasına göre sıralanmak üzere $\mathbb{N}'$ kümesi

$$0, 1, 2, \ldots \quad \ldots a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots \quad \ldots b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \ldots \quad \ldots$$

gibidir.

4.6 Yaban Analiz

Diferansiyel ve integral hesabın kurucuları olan Newton ve Leibniz, "varlıklarını" asla kanıtlamadıkları, sıfırdan farklı ve mutlak değerleri her pozitif sayıdan küçük olan ve "*sonsuz küçük*" dedikleri büyüklükler kullandılar. Bunlara bazı özellikler yüklediler; örneğin sonsuz küçük bir sayıyı herhangi bir $r \neq 0$ gerçel sayısı ile çarpabilirdiniz ve sonuç yine sonsuz küçük bir büyüklük olacaktır.

Kimi matematikçiler sonsuz küçük büyüklükleri tümüyle reddederken, kimileri, örneğin Euler gibi, tereddütsüz kullandılar. Ondokuzuncu yüzyılda Weierstraß ve Cauchy'nin çalışmalarıyla analiz sonsuz küçük büyüklükleri tümüyle dışlayan bugünkü şekline getirildi. Ancak 1961'de Robinson "*sonsuz küçük*" ve "*sonsuz büyük*" sayıları matematiksel olarak sağlam bir zemine oturttu ve bizim Türkçe'de **Yaban Analiz** olarak adlandıracağımız

Nonstandard Analysis kendine yer buldu. "Nonstandard Analysis" terimini şanssız bir adlandırma olarak görüyoruz. Burada yapılan analiz standart dışı bir analiz değil, tam tersine analizin kurucularına soracak olursak "analizin kendisi"dir. Dolayısıyla belki de "Aşırı Analiz" adlandırması daha doğru olur, nedeni gerçel sayılardan daha fazla sayılarımızın olmasıdır.

4.6.1 $\mathfrak{R}^\star$'ın Kurulumu

Not 4.6.1 İzlemeyeceğimiz Yol: Sıralanmış $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, <, +, \cdot, 0, 1)$ cismimizden yola çıkacağız. Sıralanmış cisimler kuramının L_{sc} diline her $r \in \mathbb{R}$ sayısı için onun $\mathbf{r}$ adını ekleyerek önce $L_{sc\mathbb{R}}$ diline geçelim. Sonra bu $L_{sc\mathbb{R}}$ diline yeni bir $\boldsymbol{\rho}$ sabiti ekleyerek $L^* = L_{sc\mathbb{R}} \cup \{\boldsymbol{\rho}\}$ diline geçelim .

$$\Sigma_\rho := \{\mathbf{r} \prec \boldsymbol{\rho} \,|\, \mathbf{r} \in \mathbb{R}\}$$

olmak üzere, defalarca yaptığımız gibi, $\mathrm{Th}(\mathfrak{R} \cup \Sigma_\rho)$ kuramının her sonlu Δ altkümesinin bir modelinin olduğunu, $\rho^{\mathfrak{R}}$ yorumunu $\Delta \cap \Sigma_\rho$ formüllerinde geçen sonlu sayıdaki gerçel sayılardan büyük seçerek kolayca görürüz. Kompaktlık Teoremi'nden dolayı $\mathrm{Th}(\mathfrak{R} \cup \Sigma_\rho)$ kuramının bir modeli vardır. Bu modeli L_{sc} diline kısıtlayarak $\mathrm{Th}\,\mathfrak{R}$ kuramının bir $\mathfrak{R}'$ modelini kazanabiliriz ve bu modeli $\mathfrak{R} \preccurlyeq \mathfrak{R}'$ seçebiliriz. $\mathbb{R}' := |\mathfrak{R}'|$ olsun. Elbette $\mathfrak{R}'$ yapısının da $\mathbb{N}'$ doğal sayıları ve $\mathbb{Q}'$ rasyonel sayıları ve $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}'$, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}'$ ve $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}'$ olacaktır.

Bu yaklaşımda, Σ_ρ savlarından dolayı $\alpha := \rho^{\mathfrak{R}'}$ her $r \in \mathbb{R}$ gerçel sayısından büyük olacaktır. Bunun bir sonucu olarak $\mathfrak{R}$ ve $\mathfrak{R}'$ eşyapılı olamazlar. Ancak bu yaklaşım bize daha baştan α gibi sonsuz, $1/\alpha$ gibi sonsuz küçük sayıları verecektir. Biz Σ_ρ savlarını işin içine katmayan ancak analiz açısından daha uygun bir yol izleyeceğiz. Buna karşılık izleyeceğimiz yaklaşımda sonsuz sayıların ve sonsuz küçük sayıların varlığını kanıtlamak zorunda olacağız. ▲

Her $n \geq 1$ doğal sayısı ve her $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için, onun adı diyeceğimiz n değişkenli bir $\mathbf{f}$ fonksiyon imi, her $R \subseteq \mathbb{R}^n$ bağıntısı için onun adı diyeceğimiz bir n basamaklı $\mathbf{R}$ bağıntı imini de dilimize katacağız; farklı fonksiyonlara farklı imler, farklı bağıntılara farklı imler karşılık getireceğiz. Özellikle her $A \subseteq \mathbb{R}$ altkümesine—bu bir basamaklı bir bağıntı olduğu için—bir $\mathbf{A}$ imi karşılık getirilecektir. Ancak $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ altkümelerini koyu yazamadığımız için bunlara karşılık gelen imlerimiz $\mathbb{N}_\bullet$,$\mathbb{Z}_\bullet$ ve $\mathbb{Q}_\bullet$ ve $||$ mutlak değer imini koyu yazamadığımız için buna karşılık gelen imimiz $||_\bullet$ olsun. Böylece elde ettiğimiz tüm fonksiyon isimlerinin kümesi $\mathcal{F}$, tüm bağıntı imlerinin kümesi $\mathcal{R}$ ve tüm $\mathbf{r}$ isimlerinin kümesi ise $\mathcal{C}$ olsun. Her

zamanki gibi $\mathcal{R},\mathcal{F},\mathcal{C}$ kümelerinin ayrık olmasını ve ayrıca $\dot{+},\bullet,\prec$ imlerini içermemesini isteyeceğiz. Şimdi kullanacağımız dil

$$L^{\star}_{sc} := \mathcal{R} \sqcup \mathcal{F} \sqcup \mathcal{C} \sqcup \{\prec, \dot{+}, \bullet\}$$

olacaktır. $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, <, +, \cdot, 0, 1)$ sıralanmış cisim yapımızı her $\mathbf{f} \in \mathcal{F}$ için $\mathbf{f}^{\mathfrak{R}} := f$, her $\mathbf{R} \in \mathcal{R}$ için $\mathbf{R}^{\mathfrak{R}} := R$ ve her $\mathbf{r} \in \mathcal{C}$ için $\mathbf{r}^{\mathfrak{R}} := r$, dd. her "adın" yorumunu "adı olduğu şey" olarak yorumlayarak $L^{\star}_{sc}$ dilinin, yalınlık adına yine $\mathfrak{R}$ ile göstereceğimiz bir $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, <, +, \cdot, \mathcal{R}^{\mathfrak{R}}, \mathcal{F}^{\mathfrak{R}}, \mathcal{C}^{\mathfrak{R}})$ yapısını elde ederiz.

Not 4.6.2 Her $f \in \mathcal{F}_n$ için $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^n$'dir, dd. fonksiyonlarımız kısmi fonksiyonlar değildirler. Eğer kısmi fonksiyonları da biçimselleştirmek istersek onun da doğal bir yolu vardır. $A \subset \mathbb{R}^n$ ve $f : A \to \mathbb{R}$ olsun. Böyle bir fonksiyon $\mathbb{R}^{n+1}$'de $(= f)$ ile göstereceğimiz

$$(= f)\,(y, x_1, \ldots, x_n) : \Longleftrightarrow\ y = f\,(x_1, \ldots, x_n)$$

olarak açıklanan bir bağıntı tanımlar. Bu bağıntıyı $(\doteq \mathbf{f})$ ile biçimselleştireceğiz; ancak $(= f)$ ve $(\doteq \mathbf{f})$ bağıntılarını

$$(= f)\,(y, x_1, \ldots, x_n)\ \ ve\ \ (\doteq \mathbf{f})\,(y, x_1 \cdots, x_n)$$

olarak değil

$$y\,(= f)\,(x_1, \ldots, x_n)\ \ ve\ y \doteq (\doteq \mathbf{f})\,(x_1, \ldots, x_n)$$

olarak yazmayı yeğleyeceğiz. İstenirse böylece kazanılan $(\doteq \mathbf{f})$ bağıntı imleri de bağıntı imleri kümemize alınabilir. Bu, izleyen tartışmaları etkilemez. ▲

$\kappa > \max(|L^{\star}_{sc}|, |\mathbb{R}|)$ keyfi verilsin. (4.2.24) Yukarı Doğru Löwenheim-Skolem Teoremi'nden gücü κ olan bir $\mathfrak{R}^{\star} \in \operatorname{Yap} L^{\star}_{sc}$ yapısı $\mathfrak{R} \preccurlyeq \mathfrak{R}^{\star}$ olacak biçimde vardır. Her şeyden önce

$$\operatorname{Th}\mathfrak{R} = \operatorname{Th}\mathfrak{R}^{\star} \quad \text{ve} \quad \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}^{\star}.$$

$\mathfrak{R}^{\star}$ yapısının evrenini $\mathbb{R}^{\star}$ ile gösterelim. $|\mathbb{R}|^{\star} > |\mathbb{R}|$ olduğundan $\mathfrak{R}$ ve $\mathfrak{R}^{\star}$ yapıları eşyapılı değildirler. $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{\star}$ olduğundan $\mathbb{A} := \mathbb{R}^{\star} \backslash \mathbb{R} \neq \emptyset$. Bu durumda $\mathfrak{R}^{\star}$ sıralanmış gerçel sayılar cisminin bir **yaban** (veya **aykırı**, **olağan dışı**) modelidir. $\mathbb{R}^{\star}$'ın öğelerine **sayı** diyeceğiz, $\mathbb{A}$ kümesinin öğelerine bu modelin **yaban gerçel sayıları** denir; eğer $a \in \mathbb{R}^{\star}$ sayısı $\mathbb{R}$ altkümesinde ise a öğesi bir **gerçel sayıdır** (veya **standart sayıdır**) diyeceğiz.[2] Biz $\mathbb{A}$ kümesinin öğelerine kısaca **yaban sayılar** demeyi yeğleyeceğiz.

[2] "aşırı" ve "olağan dışı", " nonstandard" yerine kullanılmışlardır.

Her $l \in L_{sc}^{\star}$ öğesinin $l^{\mathfrak{R}^\star}$ yorumunu şimdilik kısaca $l^\star$ ile gösterelim. Örneğin $\mathbf{r} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{f} \in \mathcal{F}$ ve $\mathbf{R} \in \mathcal{R}$ ise bunların $\mathfrak{R}$'deki yorumları sırasıyla r, f, R iken $\mathfrak{R}^\star$'deki yorumları $r^\star, f^\star, R^\star$'dır. Benzer biçimde $\prec, \dot{+}, \bullet$ ve $-$ imlerinin $\mathfrak{R}$'deki yorumları $\mathbb{R}$ cisminin bildik $<, +$ ve $\cdot$ bağıntı ve fonksiyonları iken $\mathfrak{R}^\star$'deki yorumları $<^\star, +^\star$ ve $\cdot^\star$ bağıntı ve fonksiyonları olacaktır.

Uzlaşma: $\mathfrak{R} \preccurlyeq \mathfrak{R}^\star$ dolayısıyla $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}^\star$ olduğu için her $\mathbf{R} \in \mathcal{R}_n$, her $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$ ve her $\mathbf{r} \in \mathcal{C}$ için

$$R = R^\star \cap \mathbb{R}^n, \quad f = f^\star | \mathbb{R}^n \quad ve \quad r = r^\star. \tag{4.22}$$

Benzer biçimde

$$<=<^\star \cap \mathbb{R}^2, \; + = +^\star | \mathbb{R}^2, \; ve \; \cdot = \cdot^\star | \mathbb{R}^2. \tag{4.23}$$

(4.22)'den dolayı $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$ ise $f^\star : \mathbb{R}^{\star n} \to \mathbb{R}^\star$ fonksiyonu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonun bir genişlemesidir; $\mathbf{R} \in \mathcal{F}_n$ ise $\mathbb{R}^{\star n}$'deki $R^\star$ bağıntısı $\mathbb{R}^n$'deki R bağıntısının bir genişlemesidir. Aynı şeyler, (4.23)'ten dolayı $<^\star, +^\star, \cdot^\star$ ve $<, +, \cdot$ için de geçerlidir. Ancak biz geleneksel matematikte, yanlışlığa düşmeden, bir f fonksiyonun incelemekte olduğumuz bir genişlemesini de yine f ile göstermekte bir sakınca görmeyiz. Aynı yaklaşımı burada da sergileyeceğiz: Her bir $l \in L_{sc}^{\star}$ iminin $\mathfrak{R}^\star$'deki yorumu $\mathfrak{R}$'deki yorumu gibi gösterilecektir. $f^\star$, $R^\star$, $+^\star, \ldots$ yerine f, R, $+, \ldots$ yazacağız. Dolayısıyla $(\mathbb{R}, <, +, \cdot, 0, 1)$ bir sıralanmış cisimdir, benzer olarak $(\mathbb{R}^\star, <, +, \cdot, 0, 1)$ de bir sıralanmış cisimdir. $a, b \in \mathbb{R}^\star$ için $a + b$ toplamı $a, b \in \mathbb{R}$ olması durumunda $\mathbb{R}$'deki bildik toplamla örtüşecektir. $\mathbb{R}$'de tanımlı sin, cos, exp, log, $\ldots$ fonksiyonları $\mathbb{R}^\star$'de aynı isimli sin, cos, exp, log, $\ldots$ fonksiyonlarına genişletilmişlerdir. Son olarak analizde yaptığımız gibi $x \cdot y$ yerine kısaca xy yazacağız. Herhangi bir formülümüzde bir yaban sayı geçiyorsa, o formüllerdeki geçen tüm f fonksiyon, R bağıntı imleri , $+, \cdot$, işlemleri ve $<$ bağıntı imi aslında $\mathbb{R}^\star$'deki $f^\star$, $R^\star$, $+^\star$, $\cdot^\star$, $<^\star$ imleridir.

Korunum Kuralı: $\operatorname{Th}\mathfrak{R} = \operatorname{Th}\mathfrak{R}^\star$ olduğundan $\operatorname{Sav} L_{sc}^{\star}$'deki bir σ için $\sigma^{\mathfrak{R}} \iff \sigma^{\mathfrak{R}^\star}$. Ancak uzlaşmamızdan dolayı yorumların görünümleri aynı olacaktır. Bu ise şu demektir: $\sigma^{\mathfrak{R}}$ savı doğru ise şeklini aynen koruyarak $\mathfrak{R}^\star$'de de doğrudur ve tersine $\sigma^{\mathfrak{R}^\star}$ savı doğru ise şeklini koruyarak $\mathfrak{R}$'de de doğrudur. Elbette her $\varphi \in \operatorname{Fm} L_{sc}^{\star}$ formülü için de $\varphi^{\mathfrak{R}} \iff \varphi^{\mathfrak{R}^\star}$. Kabaca formal yaklaşımlar bir kenarda bırakılıp $\mathbb{R}$ cisminde nasıl analiz yapıyorsak $\mathbb{R}^\star$ cisminde de öyle yapacağız; ancak $L_{sc}^{\star\mathfrak{R}}$ ve $L_{sc}^{\star\mathfrak{R}^\star}$ dillerini kullanmak koşulumuzdur.

Örneğin $\mathfrak{R}$'de

$$\forall x, y \;\; \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

doğru olduğundan aynı teorem $\mathfrak{R}^\star$'de de doğrudur, dd. her $a, b \in \mathbb{R}^\star$ için

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

Ya da örneğin $\mathbb{R}$'de tanımlı $||$ mutlak değer fonksiyonu $\mathbb{R}^\star$'da tanımlı $||$ mutlak değer fonksiyonuna aynı tanımla: Her $a \in \mathbb{R}^\star$ için

$$|a|^\star := \begin{cases} a & 0 \leq a \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

olarak $\mathbb{R}^\star$'ye genişletilmiştir. Uzlaşmamız gereği $|a|^\star$ yerine $|a|$ yazacağız. $\mathfrak{R}$'de geçerli olan önermeler, Korunum Kuralı'ndan dolayı, oldukları gibi $\mathfrak{R}^\star$ yapısında da geçerlidirler: $\mathfrak{R}^\star$'da da

1. $\forall x\,(x \neq 0 \implies 0 < |x|)$,
2. $\forall x, y \;\; |xy| = |x|\,|y|$,
3. $\forall x, y \;\; |x+y| \leq |x| + |y|$

önermeleri doğrudurlar. Burada

1. $\dot{\forall} x\,(\neg x \doteq \mathbf{0} \to \mathbf{0} \prec |x|_\bullet)$,
2. $\dot{\forall} x, y \;\; |x \bullet y|_\bullet \doteq |x|_\bullet \bullet |y|_\bullet$,
3. $\dot{\forall} x, y \;\; |x \dot{+} y|_\bullet \leq |x|_\bullet \dot{+} |y|_\bullet$

formüllerinin $\mathfrak{R}$ ve $\mathfrak{R}^\star$ yapılarındaki yorumları söz konusudur.

$\mathfrak{R}$ yapısından $\mathfrak{R}^\star$ yapısına aktarılan birkaç şey daha verelim. Her $x, y, z \in \mathbb{R}^\star$ sayıları için

$$\begin{array}{ll} (1) & z < 0 \wedge x < y \implies zx > zy, \\ (2) & 0 < x \wedge x < 1/y \implies 0 < y \wedge y < 1/x, \\ (3) & |x \pm y| \leq |x| + |y|\,, \\ (4) & |x| \leq y \iff -y \leq x \leq y. \end{array} \tag{4.24}$$

Not 4.6.3 Korunum Kuralı yalnızca $L^\star_{sc}$ dilinin formülleri için bir söylemde bulunur. Örneğin $\mathbb{R}$ cisminde "*Boştan farklı ve üstten sınırlı her kümenin supremumu vardır.*" önermesi doğrudur. Bu önerme $L^\star_{sc}$ dilinin bir formülü ile ifade edilemez! Öyle olsaydı Korunum Kuralı'na göre $\mathbb{R}^\star$'da da doğru olurdu; o zaman bildik bir teoreme göre $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}^\star$ cisimleri eşyapılı olurlardı, ancak biz öyle olmadığını biliyoruz. ▲

Not 4.6.4 "$x \in \mathbb{R}$ ve her $p \in P$ için $|x| < p$ ise $x = 0$" önermesini, Korunum Kuralı ile "$x \in \mathbb{R}^\star$ ve her $p \in P$ için $|x| < p$ ise $x = 0$" olarak aktarmaya

kalkarsak bu Korunum Kuralı'nın yanlış kullanımı olur. Gerçekten de ilk önermenin $L_{sc}^{\star\mathfrak{R}}$ dilinde ifadesi

$$\forall x\ (\forall y\ (0 < y \implies |x| < y) \implies x = 0) \tag{4.25}$$

bunun $L_{sc}^{\star\mathfrak{R}^\star}$ dilindeki karşılığı, titiz gösterimle

$$\forall x(\forall y\ (0^\star <^\star y \implies |x|^\star <^\star y) \implies x = 0^\star) \tag{4.26}$$

formülüdür. Korunum Kuralı'na göre bu $\mathfrak{R}^\star$ yapısında da doğrudur; ancak bunu ilk önerme gibi dile getirirsek "$x \in \mathbb{R}^\star$ ve her $p \in P^\star$ için $|x| < p$ ise $x = 0^\star$" önermesini elde ederiz ki bu doğrudur. (4.26) ve (4.27) formülleri $L_{sc}^\star$ dilinin

$$\sigma := \dot\forall x\ (\dot\forall y\ (\mathbf{0} \prec y \to |x|_\bullet \prec y) \to x \doteq \mathbf{0}) \tag{4.27}$$

savının, ya da kısıtlanmış niceleyicilerle yazılmış olarak

$$\dot\forall x\ (\dot\forall y \in \mathbf{P}\ |x|_\bullet \prec y \to x \doteq \mathbf{0})$$

savının yorumlarıdır. Elbette $\mathbf{P}$ imi $\mathfrak{R}$'de P ile yorumlanırken $\mathfrak{R}^\star$'da $P^\star$ ile yorumlanır. (4.26) formülü $\sigma^{\mathfrak{R}^\star}$, (4.25) formülü $\sigma^{\mathfrak{R}}$ olmasına karşın uzlaşmamız gereği $\sigma^{\mathfrak{R}^\star}$ formülünü de (4.25) ile göstermeyi yeğliyoruz. ▲

Not 4.6.5 (4.6.1)'de verdiğimiz $\mathfrak{R}'$ yapısı ile bizim kullanacağımız $\mathfrak{R}^\star$ yapısının her ikisi de $\mathfrak{R}$ ile aynı teoremlere sahiptirler. $\mathbb{R}'$ ve $\mathbb{R}^\star$ cisimlerinin ikisi de $\mathbb{R}$ cisminin genişlemeleridirler. $\mathfrak{R}'$ ve $\mathfrak{R}^\star$ yapılarının her ikisi de $\mathfrak{R}$ ile eşyapılı değillerdir, dd. bunlar $\operatorname{Th}\mathfrak{R}$'nin standart olmayan modelleridirler.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}'$ ve $\alpha := \rho^{\mathfrak{R}'}$ olmak üzere her $r \in \mathbb{R}$ için $r < \alpha$ olduğundan $\mathbb{R}'$ cismi Arşimedik sıralanmamıştır. Ancak biz $\mathbb{R}$ cisminin Arşimedik sıralandığını biliyoruz. Bir cismin Arşimedik sıralanmış olması birinci dereceden bir $\sigma \in \operatorname{Sav} L_{sc}$ ile ifade edilemez: Öyle olsaydı $\sigma \in \operatorname{Th}\mathfrak{R} = \operatorname{Th}\mathfrak{R}'$ çelişkisine ulaşırdık.

$L_{sc}^\star$ dilindeki $\mathbb{N}_\bullet$, $\mathbb{Z}_\bullet$, $\mathbb{Q}_\bullet$, imlerinin $\mathfrak{R}^\star$ yapısındaki yorumları sırasıyla $\mathbb{N}^\star$, $\mathbb{Z}^\star$ ve $\mathbb{Q}^\star$ olacaktır. $\mathfrak{R}$'de $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ olduğundan $\mathbb{N}^\star \subset \mathbb{Z}^\star \subset \mathbb{Q}^\star \subset \mathbb{R}^\star$ olacaktır. Ayrıca $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}^\star$ olduğundan $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}^\star$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}^\star$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}^\star$ ve $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^\star$ olacaktır.

Herhangi bir $A \subseteq \mathbb{R}$ altkümesini bir basamaklı bağıntı olarak düşündüğümüzde $Ax \iff x \in A$ olduğundan $\mathbb{R}$ cisminin Arşimedik olduğunu şöyle şöyle yazabiliriz:

$$\forall x \exists y\ (\mathbb{N}y \wedge x < y) \tag{4.28}$$

Ancak bu önerme şimdi $L_{sc}^\star$ dilinde

$$\dot\forall x \dot\exists y\ (\mathbb{N}_\bullet y \curlywedge x \prec y) \tag{4.29}$$

olarak biçimselleştirilebilir. (4.29)'un $\mathfrak{R}$'deki (4.28) yorumu doğru olduğu için $\mathfrak{R}^\star$'daki

$$\forall x \exists y \ \ (\mathbb{N}^\star y \wedge x <^\star y)$$

yorumu da, yalın yazılımla $\forall x \exists y \ \ (\mathbb{N}^\star y \wedge x < y)$ formülü $\mathbb{R}^\star$'da doğrudur. ▲

4.6.2 $\mathfrak{R}^\star$'ın Cebirsel Yapısı

$P := \{p \,|\, p \in \mathbb{R},\ 0 < p\}$ ve $P^\star := \{p \,|\, p \in \mathbb{R}^\star,\ 0 < p\}$ sırasıyla $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}^\star$'ın pozitif öğelerinin kümesi olsunlar.

Tanım 4.6.6 *$a \in \mathbb{R}^\star$ olsun.*

$$\begin{aligned} a \ \textbf{\textit{sonludur}} &\iff \exists p \in P \ \ |a| < p, \\ a \ \textbf{\textit{sonsuz küçüktür}} &\iff \forall p \in P \ \ |a| < p \end{aligned}$$

*"Sonsuz küçük" yerine **aşırı küçük** de diyeceğiz. Bir a sayısına sonlu değilse **sonsuzdur** veya **aşırı büyüktür** diyeceğiz[3]. Sonlu sayıların kümesini $\mathbb{S}$ ile sonsuz küçük sayıların kümesini ise $\mathbb{A}_k$ ile göstereceğiz.*

Sonsuz küçük kavramı "infinitesimal"ın karşılığı olarak kullanılmıştır. Bu tanıma göre 0 bir sonsuz küçük sayıdır ve bu sonsuz küçük olan yegane gerçel sayıdır. Newton ve Leibniz'ten ayrıldığımız tek nokta budur: onların sonsuz küçükleri sıfırdan farklı idiler. Her şeyden önce gerçel sayılar sonludur: Gerçekten de her $r \in \mathbb{R}$ için $p := |r| + 1 > 0$ ve $|r| < p$.

Sonsuz küçük sayılarımızı $\iota, \epsilon, \ldots$ ve sonsuz büyük sayılarımızı genel olarak $\alpha, \beta, \ldots$ ile göstereceğiz.

Önerme 4.6.7 *(1) $\mathbb{S}$ kümesi $+, \cdot, -$ işlemlerine göre kapalıdır, dd. $\mathbb{S}$ kümesi $\mathbb{R}^\star$ cisminin bir althalkasıdır.*

(2) Her $x, y \in \mathbb{A}_k$ ve her $s \in \mathbb{S}$ için $x \pm y \in \mathbb{A}_k$ ve $sx \in \mathbb{A}_k$, dd. cebirsel dilde söylersek $\mathbb{A}_k$ kümesi $\mathbb{S}$ halkasında bir idealdir.

Kanıt. (1) $x, y \in \mathbb{S}$ ise $p, q \in P$ pozitif gerçel sayıları $|x| < p$ ve $|y| < q$ olacak biçimde vardır. Savımız $|-x| = |x|$ ve (4.24)(3) ile

$$|x \pm y| \le |x| + |y| < p + q \text{ ve } \ |xy| = |x|\,|y| < pq$$

eşitsizliklerinden çıkar.

(2) $p \in P$ keyfi verilsin. $x, y \in \mathbb{A}_k$ ise tanım gereği $|x| < p/2$ ve $|y| < p/2$ olacağından $|x \pm y| \le |x| + |y| < p$ olur. Dolayısıyla $x \pm y \in \mathbb{A}_k$.

Şimdi $x \in \mathbb{A}_k$ ve $s \in \mathbb{S}$ olsun. Bir $q \in P$ ile $|s| < q$. Her $p \in P$ için $p/q \in P$ olur. $x \in \mathbb{A}_k$ olduğundan $|x| < p/q$ ve sonuçta $|sx| = |s|\,|x| < q\,(p/q) = p$. Dolayısıyla $sx \in \mathbb{A}_k$. ■

[3] Aşırı büyüklük mutlak değer üzerinden tanımlı olduğu için aşırı büyük bir a sayısının pozitif olması gerekmez!

Tanım 4.6.8 *Her $x, y \in \mathbb{R}^\star$ sayıları için x, y sayıları birbirine* ***sonsuz yakın*** *veya* ***aşırı yakındır*** $: \iff x - y \in \mathbb{A}_k$. *$x, y$ sayıları birbirine aşırı yakınsa bunu $x \approx y$ ile göstereceğiz.*

Her sonsuz küçük ι sayısı sıfıra sonsuz yakındır, dd. $\iota \approx 0$. Diğer yandan $x \approx y \iff x - y \approx 0$ olduğu tanımdan apaçıktır. Yine

$$a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } a \approx b \text{ ise } a = b \tag{4.30}$$

olduğu kolayca görülür. Gerçekten de $a - b \in \mathbb{R}$ ve sonsuz küçük olacaktır. Ancak sonsuz küçük olan bir tek gerçel sayı vardır, o da 0'dır. Dolayısıyla $a - b = 0$.

Önerme 4.6.9 *(a) $\approx$ bağıntısı $\mathbb{R}^\star$'de bir denklik bağıntısıdır.*

(b) Her $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^\star$ için $a_1 \approx b_1$ ve $a_2 \approx b_2$ ise $a_1 + a_2 \approx b_1 + b_2$, $-a_1 \approx -b_1$.

(c) $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{S}$ ve $a_1 \approx b_1$, $a_2 \approx b_2$ ise $a_1 a_2 \approx b_1 b_2$.

Kanıt. (a) Her $x \in \mathbb{R}^\star$ için $x - x = 0 \in \mathbb{A}_k$ olduğundan $x \approx x$. Şimdi $x, y \in \mathbb{R}^\star$ ve $x \approx y$ olsun. Tanım gereği $x - y \in \mathbb{A}_k$ ve $\mathbb{A}_k$ bir ideal olduğundan $y - x = -(x - y) \in \mathbb{A}_k$, dolayısıyla $y \approx x$. Son olarak $x, y, z \in \mathbb{R}^\star$ ve $x \approx y, y \approx z$ olsun. Tanımdan $x - y, y - z \in \mathbb{A}_k$, buradan da $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{A}_k$ dolayısıyla $x \approx z$ olur.

(b) $\iota_1 := a_1 - b_1$ ve $\iota_2 := a_2 - b_2$ olsun. $\iota_1, \iota_2 \in \mathbb{A}_k$. Şimdi $(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) = \iota_1 + \iota_2 \in \mathbb{A}_k$. Bu ilk savımızı kanıtlar. Yine $-a_1 - (-b_1) = -\iota_1 \in \mathbb{A}_k$ olduğundan $-a_1 \approx -b_1$.

(c) $a_1 a_2 - b_1 b_2 = a_1 a_2 - b_1 a_2 + (b_1 a_2 - b_1 b_2) = \iota_1 a_2 + b_1 \iota_2 =: \eta$. (4.6.7)(2)'den dolayı $\eta \in \mathbb{A}_k$ ve $a_1 a_2 \approx b_1 b_2$ olur. ■

Bir görsel destek oluşturmanın tam yeridir. Gerçel sayıları bir gerçel sayılar doğrusuna yerleştirdiğimizi düşünürüz; bu resim bize çok destek sağlar. $\mathbb{R}^\star$ sayılarımızı da bir doğruya yerleştirmek istersek, elbette bunun Öklid düzleminde bir doğru olmasını istemek saflık olur; çünkü biz $|\mathbb{R}^\star| > |\mathbb{R}|$ seçtik.

Öncelikle $\mathbb{S}$ sonlu sayılarımıza odaklanacağız. Şöyle düşünelim. Öklid düzleminde bir doğruya, analizde yaptığımız gibi gerçel sayılarımızı, doğrusal sıralamalarına uygun yerleştirelim. $\mathbb{A}_k$ sonsuz küçük sayılarımızı da kendi sıralamalarıyla bir **yaban doğru parçacığına** yerleştirdiğimizi düşünelim. Bunun orta noktasında 0 gerçek sayısı, sağında pozitif sonsuz küçük sayılar solunda ise sonsuz küçük negatif sayılarımız olacaktır. $\mathbb{A}_k$ kümesinde bir tek gerçel sayı vardır, o da 0'dır. $\mathbb{A}_k$ kümesine bir **yaban açık aralık** veya

sonsuz küçük aralık diyelim. Şimdi reel doğru üzerindeki noktalarımızı $\mathbb{A}_k$ ile birbirinden ayıracağız. $r \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathbb{A}_k(r) := r + \mathbb{A}_k$$

kümesinin öğeleri, $\mathbb{R}^\star$'deki sıralamaya göre ortasında r sayısının bulunduğu bir yaban açık aralık gibi düşünülebilir. Elbette $\mathbb{A}_k(0) = \mathbb{A}_k$. Yine $\mathbb{A}_k(r)$ yaban açık aralığında r dışında bir gerçel sayı yoktur.

$$\forall r_1, r_2 \in \mathbb{R} : r_1 \neq r_2 \implies \mathbb{A}_k(r_1) \cap \mathbb{A}_k(r_2) = \emptyset.$$

Demek ki farklı yaban aralıklarımız ayrıktırlar ve her yaban açık aralığımızda bir tek gerçel sayı vardır. Gerçekten de a sayısının bu iki aralıkta da olduğunu varsayarsak, sonsuz küçük iki ι_1, ι_2 sayıları ile $r_1 + \iota_1 = a = r_2 + \iota_2$ ve buradan $r_1 - r_2 = \iota_2 - \iota_1 \in \mathbb{A}_k$ ve $r_1 \approx r_2$ olur. Bu ise (4.30) ile $r_1 = r_2$ çelişkisini verir. Aşağıdaki teoremimizde her sonlu sayımızın bu aralıkların tam bir tanesine düştüğünü, dd.

$$\mathbb{S} = \bigsqcup_{r \in \mathbb{R}} \mathbb{A}_k(r)$$

olduğunu göstereceğiz.

Önerme 4.6.10 *Her sonlu $s \in \mathbb{S}$ sayısı* tek *olarak belirli bir $r \in \mathbb{R}$ gerçel sayısına sonsuz yakındır, dd. her sonlu s sayısı* tek *olarak belirli bir $\mathbb{A}_k(r)$ yaban açık aralıktadır. Tek olarak belirli bu gerçel sayıya s sayısını **gerçel** (veya **standart**) **kısmı** denir ve $r = \mathrm{st}(s)$ olarak gösterilir.*

Sonuç 4.6.11 *Her sonlu $s \in \mathbb{S}$ sayısı tek olarak belirli bir $r \in \mathbb{R}$ gerçel sayısı ve tek olarak belirli bir $\iota \in \mathbb{A}_k$ ile $s = r + \iota$ olarak yazılabilir.*

Kanıt. Yukarıdaki tartışmalardan biliyoruz ki herhangi bir sonlu s sayısı iki farklı gerçel sayıya sonsuz yakın olamaz, dd. r varsa tektir. Şimdi varlığı kanıtlayalım. Eğer $s \in \mathbb{A}_k(r)$ olacaksa, bu yaban açık aralıkta başka gerçel sayı bulunmadığından r gerçel sayısının $A_s := \{a \,|\, a \in \mathbb{R},\ a < s\}$ kümesinin $\mathbb{R}$'deki supremumu olacağı apaçıktır. Bu ipucu yeterlidir. Şimdi $x \in \mathbb{S}$ için

$$\mathrm{st}(x) := \sup_{\mathbb{R}} \{a \,|\, a \in \mathbb{R},\ a < x\}$$

olarak açıklansın. $x \in \mathbb{R}$ ise açıkça $\mathrm{st}(x) = x$.

Şimdi $s \in \mathbb{S}$ olsun. s sonlu olduğundan bir p pozitif gerçel sayısı ile $|s| < p$, dolayısıyla $-p < s < p$ olur. Dolayısıyla $A_s \subset \mathbb{R}$ kümesi boştan farklı ve $\mathbb{R}$'de üstten sınırlıdır, dolayısıyla $\mathbb{R}$'de supremumu vardır ve $r := \mathrm{st}(s) = \sup_{\mathbb{R}} A_s$ olsun.

$s \approx r$ olduğunu savunuyoruz. $s \in \mathbb{R}$ ise $r = \mathrm{st}(s) = s$ ve sav aşikâr. $\mathbb{S} = \mathbb{R}$ ise işimiz biter.

$\mathbb{S}\backslash\mathbb{R} \neq \emptyset$ ve $s \in \mathbb{S}\backslash\mathbb{R}$ olsun. $s \not\approx r$ olduğunu varsayalım. Bu durumda en az bir $p \in \mathbb{R}$ pozitif gerçel sayısı ile

$$\mathbb{R}^\star\text{'da } p \leq |s - r| \tag{4.31}$$

olacaktır. İki durum söz konusudur.

(1) $|s - r| = s - r$ olsun. (4.31)'den $p + r \leq s$ buradan da $p + r$ bir gerçel sayı, ancak s gerçel olmadığından $p + r < s$ olur. Bu ise r gerçel sayısının A_s kümesinin $\mathbb{R}$'de supremumu olmasıyla çelişir.

(2) $|s - r| = r - s$ olsun. Bu durumda (4.31)'den $s \leq r - p < r$ elde edilir ki r gerçel sayısının tanımıyla çelişir.

Sonucun kanıtı: s sayısı yalnızca $\mathrm{st}(s)$ gerçel sayısına sonsuz yakındır. $r := \mathrm{st}(s)$ ve $\iota := s - r$ alınız. ■

Teorem 4.6.12 *Her $x, y \in \mathbb{S}$ için*

1. $x \geq 0 \implies \mathrm{st}\,(x) \geq 0$.
2. $\mathrm{st}\,(x \pm y) = \mathrm{st}\,(x) \pm \mathrm{st}\,(y)$.
3. $\mathrm{st}\,(xy) = \mathrm{st}\,(x)\,\mathrm{st}\,(y)$.
4. $\mathrm{st}(x) = 0 \iff x \in \mathbb{A}_k$.

Kanıt. (1) ve (4) besbellidir. (4.6.11)'den tek olarak belirli $\varepsilon, \eta \in \mathbb{A}_k$ ile $x = \mathrm{st}(x) + \iota$ ve $y = \mathrm{st}(y) + \epsilon$ olduğundan (2) ve (3) savları

$$\begin{aligned} x \pm y &= \mathrm{st}\,(x) \pm \mathrm{st}\,(y) + \iota \pm \epsilon \ \textit{ve} \\ xy &= \mathrm{st}\,(x)\,\mathrm{st}\,(y) + (\iota\,\mathrm{st}(y) + \mathrm{st}(x)\epsilon + \iota\epsilon) \end{aligned}$$

eşitlikleri ve (4.6.7)'den çıkarlar. ■

Bu durumda $\mathrm{st} : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ dönüşümü çekirdeği $\mathbb{A}_k$ olan bir yapı dönüşümüdür ve dolayısıyla

$$\mathbb{S}/\mathbb{A}_k \cong \mathbb{R},$$

dd. $\mathbb{S}/\mathbb{A}_k$ bölüm halkası $\mathbb{R}$ cismi ile eşyapılıdır. Eğer $\mathbb{A}_k = \{0\}$ ise, dd. sıfırdan başka sonsuz küçük sayılarımız yoksa st dönüşümü özdeşlik dönüşümü ve dolayısıyla $\mathbb{S} = \mathbb{R}$ olur. Biraz ileride $\mathbb{A}_k = \{0\}$ olamayacağını göreceğiz.

- **Anımsatma:** Eğer uzlaşmamızı yapmamış olsaydık (4.6.12)'deki, örneğin (1) önermesi $x \geq^\star 0^\star \implies \mathrm{st}(x) \geq 0$ olarak (3) önermesi $\mathrm{st}(x \cdot^\star y) = \mathrm{st}(x) \cdot \mathrm{st}(y)$ olarak yazılırdı!

$\mathbb{A}$ yaban sayılar kümemizin boş olmadığını biliyoruz. $\kappa = |\mathbb{R}^\star| > |\mathbb{R}|$ olduğundan $\|\mathbb{A}\| = \kappa$ olur; bu demektir ki yaban sayılarımız gerçel sayılarımızdan çok fazladır. Ancak bunların ne kadarı aşırı küçük, ne kadarı aşırı büyük, ne kadarı sonlu netleştirmedik. Sıra bunda.

$$\mathbb{A}_b := \{x \,|\, x \in \mathbb{R}^\star \backslash \mathbb{R} \; ve \; x \notin \mathbb{S}\}$$

ile aşırı büyük (sonsuz) sayılarımızın kümesini gösterelim. Her şeyden önce $\neg\dot{\exists}x(x \bullet \mathbf{0}) \doteq \mathbf{1} \in \mathrm{Fm}\, L^\star_{sc}$ savı $\mathfrak{R}$ yapısında doğru olduğu için $\mathfrak{R}^\star$ yapısında da doğrudur. Yani $\mathbb{R}^\star$'de de sıfıra bölmek yasaktır.

Önerme 4.6.13 *Her* $0 \neq x \in \mathbb{R}^*$ *için* $x \in \mathbb{A}_k \iff 1/x \in \mathbb{A}_b$. *Sözlerle: Sıfırdan farklı* x *bir sayısının sonsuz küçük olması* $1/x$ *sayısının sonsuz (dd. aşırı büyük) olmasına denktir. Ayrıca* $\mathbb{A}_k \neq \{0\}$, *dolayısıyla* $\mathbb{A}_b \neq \{0\}$.

Kanıt. (1) $0 \neq x \in \mathbb{R}^*$ ve x sonsuz küçük olsun. $p \in P$ pozitif gerçel sayısı keyfi verilsin. $1/p$ de bir pozitif gerçel sayıdır, dolayısıyla $x \in \mathbb{A}_k$ olduğundan $0 < |x| < 1/p$ olur. (4.24)(2) ile her p pozitif gerçel sayı için $0 < p < |1/x|$ elde ederiz; dolayısıyla $1/x$ sonsuzdur.

(2) Şimdi $0 \neq x \in \mathbb{R}^*$ ve $1/x$ sonsuz olsun. Her p pozitif gerçel sayısı için $1/p$ de bir pozitif gerçel sayı olduğundan $0 < 1/p < |1/x| = 1/|x|$. Buradan yine (4.24)(2) ile $|x| < p$ elde edilir. p pozitif sayısı keyfi olduğundan x sonsuz küçüktür.

$\mathbb{A}_k = \{0\}$ olamaz! Aksi halde bir yandan $\mathbb{S} = \mathbb{R}$ ve diğer yandan sonsuz büyük sayılarımız da olamayacağından $\mathbb{R}^\star = \mathbb{R}$ olur ki $|\mathbb{R}|^\star > |\mathbb{R}|$ olduğundan bu söz konusu olamaz! ■

$\mathbb{R}$'de $\forall x(x0 = 0)$ ve $\forall x(x1 = x)$ doğru olduğundan bunlar $\mathbb{R}^\star$'da da doğrudurlar.

Önerme 4.6.14 $\alpha, \beta \in \mathbb{A}_b$ *ise*

(a) $\alpha\beta \in \mathbb{A}_b$.

(b) $r\alpha \in \mathbb{A}_b,\ 0 \neq r \in \mathbb{R}$.

(c) $\alpha + r \in \mathbb{A}_b,\ r \in \mathbb{R}$.

Kanıt. (1) $p \in \mathbb{R}$ pozitif sayısı keyfi verilsin. $|\alpha| > p$ ve $|\beta| > 1$ olduğundan $|\alpha\beta| > p1 = p$. Öyleyse $\alpha\beta \in \mathbb{A}_b$.

(2) $0 \neq r \in \mathbb{R}$ ve $p \in P$ keyfi verilsinler. Varsayımdan $|\alpha| > p/|r|$, dolayısıyla $|r\alpha| > p$. Böylece $r\alpha \in \mathbb{A}_b$.

(3) p pozitif sayısı keyfi verilsin. α aşırı büyük olduğundan $p + |r| < |\alpha|$, dolayısıyla (a) $p < |\alpha| - |r|$. Diğer yandan $\mathbb{R}$'de $\forall x, y\,(|x| - |y| \leq |x + y|)$

olduğundan bu $\mathbb{R}^\star$'da da doğrudur; özelleştirme ile (b) $|\alpha| - |r| \leq |\alpha + r|$. (a) ve (b) savı verir. ■

Not 4.6.15 Titiz bir okurun $\alpha, \beta \in \mathbb{A}_b$ ise $\alpha - \beta$ ve α/β için, $\iota, \epsilon \in \mathbb{A}_k$ ise ι/ϵ için bir şey söylemediğimiz gözünden kaçmamıştır. Bunları analizden tanıdığımız $\infty - \infty, \infty/\infty$ ve $0/0$ belirsiz durumları bağlamında tartışalım.

$\infty - \infty : \beta \in \mathbb{A}_b$ ve herhangi bir $r \in \mathbb{R}$ ile $\alpha := \beta + r$ alırsak (4.6.13)'ten dolayı α da sonsuzdur. $\alpha - \beta = r$ olduğundan bu fark r'ye bağlıdır.

$\infty/\infty : \beta \in \mathbb{A}_b$ ve $0 \neq r \in \mathbb{R}$ ise (4.6.13)'ten dolayı $\alpha := r\beta$ da sonsuzdur. Bu durumda $\alpha/\beta = r$ olur ve sonuç duruma bağlıdır.

$0/0 : 0 \neq \iota \in \mathbb{A}_k$ ise (4.6.7)'den her $s \in \mathbb{S}$ için $\epsilon := s\iota \in \mathbb{A}_k$ ve bu durumda $\epsilon/\iota = s$ ve sonuç yine tek olarak belirli değildir. ▲

Önerme 4.6.16 *En az* $\mathfrak{c}$ *kadar sonsuz küçük ve en az* $\mathfrak{c}$ *kadar aşırı büyük sayımız vardır.*

Kanıt. $\mathbb{A} = \mathbb{R}^\star \backslash \mathbb{R} \neq \emptyset$ olduğundan en az bir $a \in \mathbb{A}$ yaban sayımız vardır. a sonsuz küçükse $\epsilon := a$ olsun. a sonsuzsa $\epsilon := 1/a$ olsun, bu sonsuz küçüktür. $a \in \mathbb{S}$ sonlu ise tek olarak belirli bir r sayısı ve bir ι sonsuz küçük sayısı ile $a = r + \iota$, bu durumda $\epsilon := \iota$ olsun. Elbette $\epsilon \neq 0$ ve bundan dolayı $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ olmak üzere $h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{A}_k$ $(r \rightsquigarrow r\epsilon)$ dönüşümü birebirdir; dolayısıyla $|\mathbb{A}_k| \geq \mathfrak{c}$. (4.6.13)'ten dolayı $|\mathbb{A}_b| \geq \mathfrak{c}$. ■

Teorem 4.6.17 $\mathbb{A}_s := \mathbb{A} \cap \mathbb{S}$ *olmak üzere*

$$|\mathbb{A}_k| = |\mathbb{A}_b| = |\mathbb{A}_s| = |\mathbb{S}| = |\mathbb{R}^\star| = \kappa$$

Sözlerle: Sonsuz küçük sayıların $\mathbb{A}_k$ *kümesi sonsuz sayıların* $\mathbb{A}_b$ *kümesi ve* $\mathbb{R}^\star$ *sayılar kümesi eşgüçlüdürler.*

Kanıt. $\mathbb{A}_k^*(r) := \mathbb{A}_k(r) \backslash \{r\}$ olsun. (4.6.13)'ten dolayı $\mathbb{A}_b \to \mathbb{A}_k^*(0)$ $(x \rightsquigarrow 1/x)$ dönüşümü tameşlemedir. $\mu := |\mathbb{A}_k^*(0)| = |\mathbb{A}_b|$ olsun. Elbette her $r \in \mathbb{R}$ için $|\mathbb{A}_k^*(r)| = \mu$'dür. μ sonlu olsaydı $\mathbb{A}_s = \bigsqcup_{r \in \mathbb{R}} \mathbb{A}_k^*(r)$ olduğundan $|\mathbb{A}_s| = \mu\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ olurdu ve buradan da

$$\mathbb{R}^\star = \mathbb{A}_b \sqcup \mathbb{A}_s \sqcup \mathbb{R} \tag{4.32}$$

eşitliğinden

$$\kappa = |\mathbb{R}^\star| = |\mathbb{A}_b| + |\mathbb{A}_s| + |\mathbb{R}| = \mu + \mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$$

olurdu ki bu $\kappa > \mathfrak{c}$ ile çelişir. Demek ki μ sonsuzdur. μ sonsuz olduğundan $|\mathbb{A}_k| = |\mathbb{A}_k^*| = \mu$.

Yine (4.32) ile μ ve $\mathfrak{c}$ sonsuz olduklarından

$$\kappa = \mu + \mu\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \max(\mu, \mathfrak{c})$$

elde edilir. $\kappa > \mathfrak{c}$ olduğundan $\mu = \kappa$ olur. Aynı zamanda $|\mathbb{A}_s| = \mu\mathfrak{c} = \kappa\mathfrak{c} = \max(\kappa, \mathfrak{c}) = \kappa$. $\mathbb{S} = \mathbb{A}_s \sqcup \mathbb{R}$ ve $\mathfrak{c} < \kappa$ olduğundan $|\mathbb{S}| = \kappa + \mathfrak{c} = \kappa$. ■

Son bilgiler ışığında yaban sayı doğrumuzu şöyle görselleştirebiliriz. Sayı doğrumuza önce gerçel sayıları analizde yaptığımız gibi yerleştirelim. Şimdi bu doğru üzerindeki sayılarımızı $\mathbb{R}^\star$'da birbirinden uzaklaştıracağız. Her r gerçel sayısının yerine $\mathbb{A}_k(r)$ yaban açık aralığını, r yine r'nin üzerine gelmek üzere yerleştirdiğimizi düşünelim. Bunu her r gerçel sayısı ile yapalım. Bu durumda $\mathfrak{R}$ yapısında r gördüğümüz yerde $\mathfrak{R}^\star$ yapısında $\mathbb{A}_k(r)$ yaban açık aralığını görürüz. Bu aralıkta yalnızca bir tek r gerçel sayısı varken, tüm gerçel sayılardan daha çok, tam κ kadar sonlu yaban sayımız vardır. Böylece tüm sonlu sayılarımızı yerleştirdikten sonra sağ yana, yerleştirdiklerimizden uzağa pozitif sonsuz sayılarımızı, ki bunlar κ kadardır, kendi sıralarında, sol yana ise daha önce yerleştirdiklerimizden uzağa κ kadar negatif sonsuz sayımızı kendi sıralarında yerleştirelim. İşte bu bizim yaban sayı doğrumuzdur. Bu sayı doğrusunda gerçel sayılar inanılmaz derecede seyrektirler: Her gerçel sayının sağında, herhangi bir gerçel sayıya rastlamadan κ kadar yaban sayının sıralandığını görürüz, aynı şey sol yan içinde geçerlidir. $\mathbb{A}_k(r)$ yaban açık aralıklarına gelince, $\mathbb{R}$'nin özelliklerinden dolayı iki farklı $\mathbb{A}_k(r_1), \mathbb{A}_k(r_2)$ açık aralığının arasında $\mathfrak{c}$ kadar farklı $\mathbb{A}_k(r)$ açık aralığı bulunur.

Görsel bir anlatımla şöyle diyebiliriz: Elimizde bir yaban mikroskop ve bir de bir yaban teleskobumuz vardır. Yaban mikroskobumuz bize reel doğru üzerinde normalde r gerçel sayısını gördüğümüz yerde $\mathbb{A}_k(r)$'yi gösterir. Peki yaban teleskobumuz uzaklara baktığımızda bize neler gösterir? $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^\star$ bir althalka olduğundan $x, y \in \mathbb{R}^\star$ için $x \sim y :\Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{S}$ ile $\mathbb{R}^\star$'da bir denklik bağıntısı açıklanır. $x \in \mathbb{R}^\star$ ögesinin bu denklik bağıntısına göre denklik sınıfına x'in **galaksisi** denir; bunu $\mathrm{glk}(x)$ ile gösterelim. $\mathbb{R}^\star$ uzayımız ayrık galaksilerden oluşur. Açıkça $\mathrm{glk}(0) = \mathbb{S}$. Eğer $\mathrm{glk}(x) \cap \mathrm{glk}(y) = \emptyset$ ise $b := y - x \notin \mathbb{S}$ dolayısıyla her $p \in P$ için $|y - x| > p$ olur. Bunun bir sonucu olarak bu galaksilerinin öğeleri birbirinden sonsuz uzaktadırlar. Diğer yandan her $0 < r < 1$ gerçel sayısı için rb sonsuz büyük ve $0 < r_1 < r_2 < 1$ için $\mathrm{glk}(r_1 b) \neq \mathrm{gkl}(r_2 b)$ olduğundan farklı galaksiler arasında daima $\mathfrak{c}$ kadar galaksi vardır. Teleskobumuz $\mathbb{R}^\star$ evreninin hangi noktasında olursa olsun, teleskobumuzla ister sağa, ister sola doğru bizden sonsuz uzakta olan bir x noktasına odaklandığımızda $\mathrm{glk}(x)$ galaksisinin bir parçasını görürüz. Diğer yandan $\mathbb{S} \to \mathrm{glk}(x)$ $(s \rightsquigarrow x +^\star s)$ bir tam eşleme olduğundan tüm galaksilerimiz eşgüçlüdürler.

(4.6.5)'te her $a \in \mathbb{R}^\star$ için $a < n$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}^\star$ olduğunu görmüştük.

Önerme 4.6.18 *Her $a \in \mathbb{R}^\star$ için $a < n$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}^\star$ vardır. $\mathbb{N} = \mathbb{S} \cap \mathbb{N}^\star$, dd. $\mathbb{N}$ kümesi $\mathbb{N}^\star$ kümesinin sonlu öğelerinden oluşur.*

Kanıt. Önermenin ilk kısmını biliyoruz. $x \in \mathbb{N}^\star$ sonlu olsun. Tanım gereği bir $p \in \mathbb{R}$ pozitif sayısı ile $x < p$. Şimdi p'den küçük doğal sayılarımızın en büyüğü n olsun. Bu durumda

$$\forall x \, (x \in \mathbb{N} \wedge x < p \implies x = 0 \vee x = 1 \vee \cdots \vee x = n)$$

önermesi $\mathfrak{R}$'de doğrudur, dolayısıyla, yalın yazılımla,

$$\forall x \, (x \in \mathbb{N}^\star \wedge x < p \implies x = 0 \vee x = 1 \vee \cdots \vee x = n)$$

$\mathfrak{R}^\star$'da doğrudur. Dolayısıyla $x < p$ koşulunu sağlayan $x \in \mathbb{N}^\star$ sayımız $0, 1, \ldots, n$ doğal sayılarımızdan biridir. ■

Her $a \in \mathbb{A} = \mathbb{R}^\star \backslash \mathbb{R}$ için onun $\mathbf{a}$ adını $L^\star_{sc}$ diline ekleyelim. $\mathcal{A} := \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in \mathbb{A}\}$ olmak üzere $L^{\star\prime}_{sc} := L^\star_{sc} \cup \mathcal{A}$ alarak $\mathfrak{R}^\star$ yapısını $\mathfrak{R}^{\star\prime}$ yapısına yükseltelim; burada $\mathbf{a}^{\mathfrak{R}^{\star\prime}} := a$ alınacaktır. $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_k) \in \operatorname{Fm} L^\star_{sc}$ ve $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathcal{A}$ olmak üzere Yeni Sabitler Teoremi'nden $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}^\star$ için

$$\mathfrak{R}^{\star\prime} \models \varphi[\overline{r_n}, \overline{a_k}] \Longleftrightarrow \mathfrak{R}^\star \models \dot\forall y_1, \ldots, y_k \varphi(\overline{\mathbf{r_n}}, \overline{y_k}) \tag{4.33}$$

olduğunu biliyoruz.

Tanım 4.6.19 *Ancak ve ancak* $\operatorname{Sb}\varphi = \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k\}$ *olan bir* $\varphi \in \operatorname{Fm} L^\star_{sc}$ *ve* $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{A}$ *ile*

$$A := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{\star n} \mid \mathfrak{R}^{\star\prime} \models \varphi(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots a_k)\}$$

ise A kümesine $\mathfrak{R}^\star$'da ***parametrik tanımlanabilir*** *denir. Bir $f : \mathbb{R}^{\star n} \to \mathbb{R}^\star$ fonksiyonuna ise*

$$G_f := \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in (\mathbb{R}^\star)^{n+1} \mid f(x_1, \ldots, x_n) = x_{n+1}\}$$

grafı parametrik tanımlanabilirse $\mathfrak{R}^\star$'da ***parametrik tanımlanabilir*** *veya yalın olarak* ***içseldir*** *denir.*

$\mathfrak{R}^\star$'da parametrik tanımlanabilen kümeler ve fonksiyonlar $\mathfrak{R}^\star$ yapısının gördüğü, yani bu yapının içinden görülebilen–elbette $\varphi \in \operatorname{Fm} L^\star_{sc}$ ile görülebilen–kümeler ve fonksiyonlardır.

Lemma 4.6.20 (Taşma Lemması) *$A \subseteq \mathbb{R}$ kümesi $\mathfrak{R}$'de sınırsızsa $A^\star$ kümesi sonsuz öğeler içerir; özellikle $A^\star \not\subseteq \mathbb{R}$.*

Kanıt. A kümesi $\mathfrak{R}$'de üstten sınırsız olsun. Bu durumda $\mathfrak{R}$ yapısında $\forall x \exists y \ (Ay \wedge x < y)$ savı doğrudur ($Ay \iff y \in A$ olduğunu anımsatalım). Korunum Kuralı'na göre $\forall x \exists y \ (A^\star y \wedge x < y)$ savı $\mathfrak{R}^\star$ yapısında doğrudur. Dolayısıyla keyfi verilen pozitif b sonsuz sayısına karşılık $b < a^\star$ olan bir $a^\star \in A^\star$ sayımız vardır.

A kümesi $\mathfrak{R}$'de alttan sınırsızsa benzer biçimde irdelenir. Özetle A kümesi $\mathfrak{R}$'de sınırsızsa $A^\star$ kümesi $\mathbb{R}$'nin dışına taşar. ■

$\mathbb{R}^\star$ kümesinin içsel altkümelerinin kümesini $\mathcal{P}^\star(\mathbb{R}^\star)$ ile gösterelim. $\mathbb{R}^\star$'ın güç kümesi $\mathcal{P}(\mathbb{R}^\star)$ olmak üzere Taşma Lemması bize $\mathcal{P}^\star(\mathbb{R}^\star) \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R}^\star)$ olduğunun ip ucunu verir. Bir örnek oluşturmak üzere $\mathbb{N} \notin \mathcal{P}^\star(\mathbb{R}^\star)$ olduğunu kanıtlayacağız.

Önerme 4.6.21 *$\mathbb{N}$ kümesi $\mathfrak{R}^\star$'da parametrik tanımlanamaz.*

Kanıt. $\mathbb{N}$ kümesinin $\mathfrak{R}^\star$'da bir $\varphi(x, \overline{y_k}) \in \operatorname{Fm} L^\star_{sc}$ ve $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{A}$ ile parametrik tanımlanabilir olduğunu varsayalım. $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}^\star$ olduğundan

$$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{N}^\star \mid \mathfrak{R}^{\star\prime} \models \varphi(x, \overline{a_k})\}. \tag{4.34}$$

Böylece bir yandan $\mathfrak{R}^{\star\prime} \models \varphi(0, \overline{a_k})$, diğer yandan $x \in \mathbb{N}$ ise $x + 1 \in \mathbb{N}$ olduğunu ve (4.34)'ten dolayı $\mathfrak{R}^{\star\prime} \models x \in \mathbb{N}^\star \wedge \varphi(x, \overline{a_k})$ ise $x \in \mathbb{N}$ olduğundan

$$\mathfrak{R}^{\star\prime} \models \varphi(0, \overline{a_k}) \wedge \forall x (x \in \mathbb{N}^\star \wedge \varphi(x, \overline{a_k}) \implies \varphi(x+1, \overline{a_k}))$$

olur ve bu bize (4.33) ile

$$\mathfrak{R}^\star \models \forall \overline{y_k} (\varphi(0, \overline{y_k}) \wedge \forall x (x \in \mathbb{N}^\star \wedge \varphi(x, \overline{y_k}) \implies \varphi(x+1, \overline{y_k})))$$

dolayısıyla

$$\mathfrak{R} \models \forall \overline{y_k} (\varphi(0, \overline{y_k}) \wedge \forall x (x \in \mathbb{N}^\star \wedge \varphi(x, \overline{y_k}) \implies \varphi(x+1, \overline{y_k})))$$

elde ederiz. Buradan ise tümevarım ilkesiyle $\mathfrak{R} \models \forall \overline{y_k} \forall x (x \in \mathbb{N} \implies \varphi(x, \overline{y_k}))$ ve buradan da korunum ilkesiyle $\mathfrak{R}^\star \models \forall \overline{y_k} \forall x (x \in \mathbb{N}^\star \implies \varphi(x, \overline{y_k}))$ elde ederiz. Dolayısıyla $\mathfrak{R}^{\star\prime} \models \forall \overline{y_k} \forall x (x \in \mathbb{N}^\star \implies \varphi(x, \overline{y_k}))$ ve buradan da özelleştirmeyle $\mathfrak{R}^{\star\prime} \models \forall x (x \in \mathbb{N}^\star \implies \varphi(x, \overline{a_k}))$ olur ve

$$\mathbb{N}^\star = \{x \in \mathbb{N}^\star \mid \mathfrak{R}^\star \models \varphi(x, \overline{a_k})\} \neq \mathbb{N}$$

olur ve varsayımımız yanlıştır. ■

Böylece $\mathcal{P}^\star(\mathbb{R}^\star) \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R}^\star)$ ve biz benzeri bir durumla Skolem açmazında da karşılaşmıştık. $\mathfrak{R}$ yapısına ilişkin bazı önermeler—ki bunlar zorunlu olarak birinci dereceden ifade edilemeyenler arasında olacaklardır—$\mathfrak{R}^\star$ yapısına

aktarılamaz! Örneğin $\mathbb{R}$'nin boştan farklı ve üstten sınırlı her altkümesinin supremumu varken bu $\mathbb{R}^\star$'da doğru değildir. $\mathbb{R}$'nin kendisi $\mathbb{R}^\star$'da üstten sınırlıdır, ancak bir supremumu yoktur. Böyle bir supremum olsaydı bu bir b büyük sayısı olmak zorundaydı; ancak böyle bir durumda herhangi bir sonsuz küçük pozitif ι sayısı ve her $r \in \mathbb{R}$ için $r < b - \iota < b$ olurdu ki bu b'nin $\mathbb{R}$'nin supremumu olmasıyla çelişirdi!

4.6.3 $\mathfrak{R}^\star$'da Limit

Limit önemli bir kavram olduğu için bu altkesimde uzlaşmayı bir kenara bırakıp titiz gösterimi yeğleyeceğiz. Ancak türevle ilgili olanları uzlaşma doğrultusunda Leibniz-Newton tarzında işleyeceğiz.

Önünde sonunda $\mathbb{R}^\star$ cismimizde $\mathbb{R}$ cismimiz gibi sıralanmış bir cisimdir. Burada da tıpkı $\mathbb{R}$'de olduğu gibi, açık, kapalı, yarı açık aralıklar ve bir topolojiyi tanımlarız. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^\star$ ve $\alpha < \beta$ için

$$[\alpha, \beta]^\star := \{x \in \mathbb{R}^\star \,|\, \alpha \leq^\star x \leq^\star \beta\}$$
$$(\alpha, \beta)^\star := \{x \in \mathbb{R}^\star \,|\, \alpha <^\star x <^\star \beta\}$$

olarak açıklansın. $[\alpha, \beta)^\star$ ve $(\alpha, \beta]^\star$ aralıklarının tanımını okura bırakıyoruz. Herhangi bir $\alpha \in \mathbb{R}^\star$ ve herhangi bir $p \in \mathbb{R}^\star$ pozitif sonlu sayısı için $\mathbb{I}_p(\alpha) := (\alpha -^\star p, \alpha +^\star p)^\star$ açık aralığına α-merkezli p **yarıçaplı açık aralık**,$\mathbb{I}_p^*(\alpha) := \mathbb{I}_p(\alpha) \backslash \{\alpha\}$ kümesine ise **delinmiş** aralık denir.

$$\mathbb{A}_k^+ := \{\iota \in \mathbb{A}_k \,|\, 0 <^\star \iota\} \text{ ve } \mathbb{A}_k^- := \{\iota \in \mathbb{A}_k \,|\, \iota <^\star 0\}$$

olmak üzere $\mathbb{A}_k = \mathbb{A}_k^- \sqcup \mathbb{A}_k^+ \sqcup \{0\}$.

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ verilsin[4]. $f^\star : \langle a, b\rangle^\star \to \mathbb{R}^\star$ olacaktır. Her $\iota \in \mathbb{A}_k^+$ için $a +^\star \iota \in \langle a, b\rangle^\star$ olduğundan $f^\star(a +^\star \iota)$ ve her $\iota \in \mathbb{A}_k^-$ için $b +^\star \iota \in \langle a, b\rangle^\star$ olduğundan $f^\star(b +^\star \iota)$ tanımlıdır. Özellikle f fonksiyonu $(a, c) \cup (c, b)$ aralığında tanımlıysa $f^\star$ fonksiyonu her $\iota \in \mathbb{A}_k^*$ için $c +^\star \iota$'de tanımlıdır.

Tanım 4.6.22 (Leibniz-Newton Limit Tanımı) *$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ve $a < c < b$ olsun. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ ve $r \in \mathbb{R}$ olsun.*

1: $\lim_{x \to a^+} f(x) = r :\iff$ *Her $\iota \in \mathbb{A}_k^+$ için $f^\star(a +^\star \iota) \approx r$. Eğer f fonksiyonu a noktasında da tanımlı ve $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ ise f fonksiyonu a noktasında sağdan süreklidir denir.*

2: $\lim_{x \to b^-} f(x) = r :\iff$ *Her $\iota \in \mathbb{A}_k^-$ için $f^\star(b +^\star \iota) \approx r$. Eğer f fonksiyonu b noktasında da tanımlı ve $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ ise f fonksiyonu b noktasında soldan süreklidir denir.*

[4]Burada $\langle$ ile [veya (ve $\rangle$ ile ise] veya)'den herhangi biri kastedilmektedir.

3: Şimdi $f : \langle a, c\rangle \cup \langle c, b\rangle \to \mathbb{R}$ *olduğunu varsayalım. Her* $\iota \in \mathbb{A}_k^*$ *için* $f^\star(c +^\star \iota) \approx r$ *ise* $\lim_{x\to c} f(x) := r$ *olarak açıklanır. Eğer* f *fonksiyonu* c *noktasında da tanımlı ve* $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ *ise* f *fonksiyonu* c *noktasında süreklidir denir.*

4. $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty :\iff$ *Her* $\iota \in \mathbb{A}_k^+$ *için* $f^\star(a +^\star \iota)$ *pozitif ve sonsuz büyük. Benzer biçimde tüm yukarıdaki durumlarda* $\pm\infty$*'a yakınsaklık açıklanır.*

Not 4.6.23 Her şeyden önce $\lim_{x\to a^+} f(x)$, $\lim_{x\to c} f(x)$ ve $\lim_{x\to b^-} f(x)$ tanımlarında f fonksiyonu a, b, c noktalarında tanımlı olsa bile f'nin bu noktalardaki değerlerinin asla bu limit tanımlarında yer almadıklarını belirtelim. Şimdi örneğin tanımın 3. kısmındaki $f : \langle a, c\rangle \cup \langle c, b\rangle \to \mathbb{R}$ durumunu ele alalım. Biz her $\iota \in \mathbb{A}_k^+$ için $c +^\star \iota \in \langle c, b\rangle^\star$ olduğunu kanıtlayacağız ve tanımlarda karşımıza çıkan tüm diğer durumlarda benzeri iredelemeleri yapmayı okura bırakacağız. $\iota \in \mathbb{A}_k^+$ olsun. $b - c \in P$ olduğundan $b - c \in P^\star$ ve $\iota <^\star (b - c)/2 < b - c$'den ise $c <^\star c +^\star \iota < c + \frac{b-c}{2} < c + b - c = b$, dolayısıyla $c +^\star \iota \in (c, b)^\star$ olur. Şimdi ise f fonksiyonu (c, b) aralığında tanımlı ise $f^\star$ fonksiyonunun $(c, b)^\star$ aralığında tanımlı olduğunu görelim. $\forall x(c < x < b \implies \exists! y\ f(x) = y)$ savı $\mathfrak{R}$'de doğru olduğundan $\forall x(c <^\star x <^\star b \implies \exists! y\ f^\star(x) = y)$ savı $\mathfrak{R}^\star$'da doğrudur, dd. $f^\star$ fonksiyonu $(c, b)^\star$ aralığında tanımlıdır. ▲

Not 4.6.24 Leibniz-Newton limit kavramlarımızdaki $f^\star$ yerine bu bilim adamları uzlaşmamızda da olduğu gibi yine f yazmışlardır. Şimdi bu limit kavramlarının, analizde kullandığımız Cauchy-Weierstraß'ın ε-δ tanımlarıyla örtüştüğünü kanıtlayacağız. Örneğin $r \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\lim_{x\to c} f(c) = r \iff \forall \iota \in \mathbb{A}_k^*\ (\operatorname{st} f^\star(c +^\star \iota) = r)$$

olduğu kolayca görülür. Tüm diğer limitler de yaban analizde bu türden eşitliklere dönüştürülür. Yaban analizde limitlerle çalışırken eşitliklerle çalıştığımız için bu, eşitsizliklerle çalışan Cauchy-Weierstraß'ın ε-δ yaklaşımına nazaran büyük bir kolaylık sağlar. Örneğin $f, g : \langle a, c\rangle \cup \langle c, b\rangle \to \mathbb{R}$ ve $\lim_{x\to c} f(c) = \alpha$ ve $\lim_{x\to c} g(c) = \beta$ olsun. Bu durumda her $\iota \in \mathbb{A}_k^*$ için

$$\operatorname{st}(fg)^\star(c +^\star \iota) = \operatorname{st}(f^\star(c +^\star \iota) \cdot^\star g^\star(c +^\star \iota)) = \operatorname{st}(f^\star(c +^\star \iota) \operatorname{st}(g^\star(c +^\star \iota) = \alpha\beta$$

olduğu için fg fonksiyonunun da $x \to c$ için limiti vardır ve bu limit limitlerin çarpımına eşittir. Eşitliklerle çalışan bu yalın kanıt—bir de ustalar gibi tüm yıldızları attığınızda—kuşkusuz geleneksel matematikteki ε-δ kanıtlarından daha güzeldir. $\operatorname{st} f^\star(c +^\star \iota)$ tek olarak belirli olduğundan, limit varsa tektir. Biz f fonksiyonumuzu $\langle a, b\rangle$ aralığında tanımlı aldık. İster daha

önce belirttiğimiz gibi G_f bağıntısı ile yola devam ederiz, istenirse f fonksiyonunu *herhangi* bir biçimde, yine f ile göstereceğimiz $\mathbb{R}$'de tanımlı bir fonksiyona genişleterek yola devam edebiliriz. Yukarıda verilen limit tanımları bu genişletmelerden bağımsızdır. Tüm bu limitleri bir başlık altında şöyle de dillendirebiliriz:

$$LN: \lim_{x\to c} f(x) = r \iff \forall x \in \langle a,b\rangle^\star \ (\operatorname{st} x = c \implies \operatorname{st} f^\star(x) = r) \quad (4.35)$$

Bu formülde $c = a$ veya $c = b$ olabilir; elbette bu durumlarda $x \to a^+$ ve $x \to b^-$ limitleri söz konusudur. ▲

Şimdi Leibniz-Newton limit kavramlarıyla Cauchy-Weierstraß limit kavramlarının örtüştüğünü kanıtlayacağız; biz kanıtı Tanım (4.6.22)'nin 3. durumu için vereceğiz, diğer durumlar benzer biçimde kanıtlanır. Elimizden geldiğince titiz ve ayrıntılı olmaya çalışacağız. $a,b,c \in \mathbb{R}$ ve $a < c < b$ olmak üzere $A := \langle a,c\rangle \cup \langle c,b\rangle$ olsun. $f : A \to \mathbb{R}$ ve $r \in \mathbb{R}$ olsun. ε, δ yerine p, q yazarsak Cauchy-Weierstraß anlamında $\lim_{x\to c} f(x) = r$ olması

$$\forall p > 0 \ \ \exists q > 0 \ \ \forall x \ (x \in A \wedge 0 < |x - c| < q \implies |f(x) - r| < p) \quad (4.36)$$

demektir. Bu

$$\forall p \in P \ \ \exists q \in P \ \ \forall x \ (x \in A \wedge 0 < |x - c| < q \implies |f(x) - r| < p)$$

olarak ifade edebileceği gibi titiz davranılarak $\mathfrak{R}$ yapısının dilinde

$$\forall y \in P \ \ \exists z \in P \ \ \forall x \ (x \in A \wedge 0 < |x - c| < z \implies |f(x) - r| < y) \quad (4.37)$$

olarak ifade edilir. Bu ise

$$\sigma := \dot\forall y \in \mathbf{P} \ \ \dot\exists z \in \mathbf{P} \ \ \dot\forall x(\mathbf{A}x \curlywedge (\mathbf{0} \prec |x - \mathbf{c}|_\bullet \prec z \to |\mathbf{f}(x) - \mathbf{r}|_\bullet \prec y)$$

savının $\mathfrak{R}$ yapısındaki yorumundan başka bir şey değildir.

Teorem 4.6.25 *Leibniz-Newton limit kavramlarıyla Cauchy-Weierstraß limit kavramları örtüşürler, dd. $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$, $A := \langle a,c\rangle \cup \langle c,b\rangle$, $f : A \to \mathbb{R}$ ve $r \in R$ olmak üzere*

1. $\forall \iota \in \mathbb{A}_k^* \ (f^\star(c +^\star \iota) \approx r)$,

2. $\forall y \in P \ \ \exists z \in P \ \ \forall x \ (x \in A \wedge 0 < |x - c| < z \implies |f(x) - r| < y)$

önermeleri birbirine denktir.[5]

[5]Burada analizden alışık olduğumuz $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0$ yerine $\forall \varepsilon \in P \ \ \exists \delta \in P$ yazdık.

Kanıt. (1)$\Longrightarrow$(2): (4.36)'yı, titiz yazılımla (4.37)'yi kanıtlamalıyız. Bu ise keyfi seçilen $y = p \in P$ pozitif gerçel sayısı için

$$\exists z \in P \;\; \forall x \; (x \in A \wedge 0 < |x - c| < z \Longrightarrow |f(x) - r| < p) \tag{4.38}$$

savının $\mathfrak{R}$ yapısında doğru olduğunu kanıtlamak demektir. (4.38) ise

$$\rho := \dot{\exists} z \in \mathbf{P} \;\; \dot{\forall} x (\mathbf{A}x \curlywedge (\mathbf{0} \prec |x - \mathbf{c}|_\bullet \prec z \to |\mathbf{f}(x) - \mathbf{r}|_\bullet \prec \mathbf{p})$$

savının $\mathfrak{R}$ yapısındaki yorumundan başka bir şey değildir. Dolayısıyla $\rho^{\mathfrak{R}^\star}$ yorumunun, dd.

$$\exists z \in P^\star \;\; \forall x \; (x \in A^\star \wedge 0 <^\star |x - c|^\star <^\star z \Longrightarrow |f^\star(x) - r|^\star <^\star p) \tag{4.39}$$

önermesinin $\mathfrak{R}^\star$ yapısında doğru olduğunu kanıtlamak yeterlidir[6]. (4.39)'u kanıtlamak demek ise uygun bir $z = q \in P^\star$ ile

$$\forall x \; (x \in A^\star \wedge 0 <^\star |x - c|^\star <^\star q \Longrightarrow |f^\star(x) - r|^\star <^\star p) \tag{4.40}$$

önermesinin $\mathfrak{R}^\star$ yapısında doğru olduğunu kanıtlamak demektir.

Biz q olarak $\mathbb{A}_k^+$'nın herhangi bir ι öğesini seçiyoruz, dd. $q = \iota$. Şimdi $x \in A^\star \wedge 0 <^\star |x - c| <^\star \iota$ olsun. $|x - c| \in \mathbb{A}_k^+$ ve $-|x - c| \leq x - c \leq |x - c|$ olacağından $x - c \approx 0$ olur. $\tau := x - c \in \mathbb{A}_k^*$ olduğundan varsayımımızdan, $c + \tau = x \in A^\star = \langle a, c\rangle^\star \cup \langle c, b\rangle^\star$ olduğunu da gözetirsek, $f^\star(c +^\star \tau) -^\star r \approx 0$ olur. Dolayısıyla her $s \in P$ pozitif gerçel sayısı için $|f^\star(c +^\star \tau) -^\star r|^\star <^\star s$, dolayısıyla p pozitif gerçel sayısını içinde $|f^\star(c +^\star \tau) -^\star r|^\star <^\star p$ olur. Böylece (4.40), dolayısıyla (4.39) kanıtlanmış olur.

(2)$\Longrightarrow$(1): (4.37) doğru olsun. Her $\iota \in \mathbb{A}_k^*$ için $f^\star(c +^\star \iota) \approx r$ olduğunu, dd. her gerçel $p \in P$ için $|f^\star(c +^\star \iota) -^\star r|^\star <^\star p$ olduğunu göstermeliyiz.

Şimdi $\iota \in \mathbb{A}_k^*$ keyfi verilip sabit tutulsun. $p \in P$ keyfi verilsin. Varsayımımızdan $\mathfrak{R}$'de (4.38) doğru olduğundan uygun bir $q \in P$ ile

$$\forall x \; (x \in A^\star \wedge 0 < |x - c| < q \Longrightarrow |f(x) - r| < p) \tag{4.41}$$

savı $\mathfrak{R}$ yapısında doğrudur. Bu sav $L_{sc}^\star$ dilinin

$$\gamma := \dot{\forall} x \; (\mathbf{A}x \curlywedge (\mathbf{0} \prec |x - \mathbf{c}|_\bullet \prec \mathbf{q} \to |\mathbf{f}(x) - \mathbf{r}|_\bullet \prec \mathbf{p})$$

savının $\mathfrak{R}$'deki yorumudur. Dolayısıyla $\gamma^{\mathfrak{R}^\star}$ dd. (4.40) doğrudur. $x = c +^\star \iota$ alırsak ι'nın seçiminden dolayı ve $q \in P$ olduğundan $x \in A^\star$ ve $0 <^\star |x -^\star c| <^\star q$ olur ve biz (4.40)'ı kullanarak bu x sayısı için özelleştirmeyle $|f^\star(c +^\star \iota) -^\star r|^\star < p$ elde ederiz; buradansa $p \in P$ keyfi seçilebildiğinden her $p \in P$ için $|f^\star(c +^\star \iota) -^\star r|^\star < p$, dolayısıyla $f^\star(c +^\star \iota) -^\star r \approx 0$, dd. $f^\star(c +^\star \iota) \approx r$ olur. $\iota \in \mathbb{A}^*$ keyfi seçildiğinden biz $\forall \iota \in \mathbb{A}_k^* \; (f^\star(c +^\star \iota) \approx r)$ önermesini kanıtlamış olduk. ■

[6]Burada $p \in \mathbb{R}$ olduğundan $\mathbf{p}^{\mathfrak{R}^\star} = p$ olduğunu anımsatalım.

Sonuç 4.6.26 *$f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ ve $c \in \langle a,b\rangle$ olsun. f fonksiyonu c noktasında süreklidir $\iff$ Her $x \in \langle a,b\rangle^\star$ için $x \approx c$ ise $f^\star(x) \approx f(c)$.*

Türev ve süreklilik yerel özellikler olduğundan, kısmi fonksiyonlar söz konusu ise bunları herhangi bir biçimde tüm $\mathbb{R}$'ye genişletip daha baştan $\mathbb{R}$'de tanımlı fonksiyonlara odaklanabiliriz. Ancak bir a noktasında türevden söz edeceksek fonksiyonumuz a'nın bir komşuluğunda baştan tanımlı olmalıdır.

Teorem 4.6.27 *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ olsunlar. f fonksiyonunun a noktasında türevlenebilir ve türevinin b olması için gerek ve yeter koşul her $dx \in \mathbb{A}_k^*$ için*

$$\frac{f^\star(a +^\star dx) -^\star f^\star(a)}{dx} \approx b, \ \ dd.\ \mathrm{st}\, \frac{f^\star(a +^\star dx) -^\star f^\star(a)}{dx} = b \qquad (4.42)$$

olmasıdır.

Kanıt. Tanımlardan ve (4.6.25)'ten apaçıktır. ■

$df^\star(a,dx) := f^\star(a +^\star dx) -^\star f^\star(a)$ olarak açıklarsak a noktasında türevimiz varsa $f'(a) := b$ olarak tanımlanır ve

$$f'(a) \approx \frac{df^\star(a,dx)}{dx}, \ \ \mathrm{dd.}\ f'(a) = \mathrm{st}\, \frac{df^\star(a,dx)}{dx}$$

olur.

Not: Yukarıda türevle ilgili teoremlerimizde tümüyle Leibniz'e sadık kalmak istersek: (4.42)'deki $f^\star, +^\star, -^\star$ imlerinin yerine $f, +, -$ imlerini yazarız. Bu $\mathfrak{R}$ yapısındaki işlemlerin, fonksiyonların, bağıntıların $\mathfrak{R}^\star$ yapısında da, uzlaşmamızda olduğu gibi, aynı imlerle, yıldızsız gösterilmesi demektir. dx ile *daima* sıfırdan farklı bir sonsuz küçük sayı gösterilecektir. Bundan sonra bizde Leibniz gösterimini yeğleyeceğiz ve okurun $\mathfrak{R}^\star$ yapısında mı yoksa $\mathfrak{R}$ yapısında mı olduğumuzu bağlamdan çıkaracağını umuyoruz.

Genelde analiz derslerinde $df(a,dx)$ yerine yalın olarak df yazılır ve türev fonksiyonu $f' = df/dx$ olarak gösterilir ve öğrenci özenle uyarılır: df/dx ifadesi iki sayının bölümü değildir! Bu ifade bir bütün olarak anlaşılmalıdır! Yaban analizde ise bu gerçekten iki sayının birbirine bölümüdür. Örneğin $f(x) = x^2$ fonksiyonun a noktasındaki türevi

$$f'(a) = \mathrm{st}\, \frac{(a+dx)^2 - a^2}{dx} = \mathrm{st}(2a + dx) = 2a.$$

Analizden bazı basit teoremleri verelim. Aşağıdaki basit bilgi çok kullanışlıdır.

Önerme 4.6.28 *f fonksiyonunu a noktasında türevlenebilirse her $\iota \in \mathbb{A}_k$ için*

$$f(a+\iota) \approx f(a) + f'(a)\iota, \;\; dd.\; df(a,\iota) \approx f'(a)\iota$$

Kanıt. $f'(a) \in \mathbb{R}$ olduğundan (4.6.9), (4.6.7)(2)'den ve (4.6.25)'ten $\iota = dx \neq 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{f(a+dx)-f(a)}{dx} \approx f'(a) &\implies f(a+dx)-f(a) \approx f'(a)dx \\ &\implies f(a+dx) \approx f(a) + f'(a)dx \end{aligned}$$

$\iota = 0$ için $f(a+\iota) \approx f(a) + f'(a)\iota$ elbette doğrudur. ■

Sonuç 4.6.29 *f fonksiyonu a noktasında türevlenebilirse a noktasında süreklidir.*

Kanıt. (4.6.28)'den her $\iota \in \mathbb{A}_k$ için

$$f(a+\iota) - f(a) \approx f'(a)\iota \in \mathbb{A}_k,$$

dolayısıyla $f(a+\iota) \approx f(a)$ olur ve f, a'da süreklidir. ■

Teorem 4.6.30 *$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsinler.*

1. f, g fonksiyonları a noktasında türevlenebilirlerse $f \pm g$ ve fg fonksiyonları ve ayrıca $g(a) \neq 0$ ise f/g fonksiyonu da a noktasında türevlenebilir ve

$$\begin{aligned} (f \pm g)'(a) &= f'(a) \pm g'(a), \;\; (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \\ (f/g)'(a) &= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}, \quad g(a) \neq 0 \end{aligned}$$

2. f fonksiyonu a noktasında, g fonksiyonu ise $b = f(a)$ noktasında türevlenebilirse $g \circ f$ fonksiyonu da a noktasında türevlenebilir ve

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

Kanıt. (1.): f, g fonksiyonları a noktasında türevlenebilirlerse

$$df(a,dx)/dx \approx f'(a) \text{ ve } dg(a,dx)/dx \approx g'(a)$$

olduğundan (4.6.9) ile

$$\frac{d(f \pm g)(a,dx)}{dx} = \frac{df(a,dx)}{dx} \pm \frac{dg(a,dx)}{dx} \approx f'(a) \pm g'(a).$$

Yine basit bir işlemle

$$\frac{d(fg)(a,dx)}{dx} = \frac{df(a,dx)}{dx} g(a+dx) + f(a)\frac{dg(a,dx)}{dx} \tag{4.43}$$

olur. (4.43)'ün sağ yanındaki tüm terimler sonlu olduğundan (4.6.12) ve (4.6.29) ile

$$\begin{aligned}(fg)'(a) &= \operatorname{st} \frac{d(fg)(a,dx)}{dx} \\ &= \operatorname{st} \frac{df(a,dx)}{dx} \operatorname{st} g(a+dx) + \operatorname{st} f(a) \operatorname{st} \frac{dg(a,dx)}{dx} \\ &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a).\end{aligned}$$

Şimdi $g(a) \neq 0$ olsun. g fonksiyonu a'da sürekli olduğundan ((4.6.29)) bu noktanın bir gerçel komşuluğunda $g(x) \neq 0$ olur. Dolayısıyla her dx için $g(a+dx) \neq 0$ olur.

$$\begin{aligned}d\frac{1}{g}(a,dx) &= \frac{1}{g(a+dx)} - \frac{1}{g(a)} \\ &= -\frac{g(a+dx)-g(a)}{g(a)g(a+dx)} = -\frac{1}{g(a)g(a+dx)} dg(a,dx)\end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan da, en sağda sonlu sayılar olduğundan

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g}\right)'(a) &= \operatorname{st} \frac{d\frac{1}{g}(a,dx)}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{st} g(a) \operatorname{st} g(a+dx)} \operatorname{st} \frac{dg(a,dx)}{dx} \\ &= -\frac{1}{(g(a))^2} g'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}\end{aligned}$$

elde edilir. f fonksiyonu da a'da türevlenebilir olduğundan $\frac{f}{g} = f\frac{1}{g}$ fonksiyonu da a noktasında türevlenebilir. Bu çarpımın türevi $(f/g)'$ türevini verir.

(2.): f fonksiyonu a'da ve g fonksiyonu ise $b = f(a)$'da türevlenebilir olsunlar. (4.6.28)'den $df(a,dx) = f(a+dx) - f(a) =: \iota \in \mathbb{A}_k$. Bu gösterimle $f(a+dx) = f(a) + \iota$ olur.

$$\begin{aligned}d\left(g \circ f\right)(a,dx) &= g(f(a+dx)) - g(f(a)) = g(f(a)+\iota) - g(f(a)) \\ &= dg(f(a),\iota)\end{aligned}$$

elde ederiz.

Şimdi $\iota \neq 0$ ise

$$\frac{d\left(g \circ f\right)(a,dx)}{dx} = \frac{dg(f(a),\iota)}{\iota}\frac{\iota}{dx} = \frac{dg(f(a),\iota)}{\iota}\frac{df(a,dx)}{dx}$$

eşitliğinin en sağında iki sonlu sayının çarpımı ve ayrıca g fonksiyonu $f(a)$ noktasında ve f fonksiyonu ise a noktasında türevlenebilir olduğundan olduğundan

$$\operatorname{st}\frac{d\,(g\circ f)\,(a,dx)}{dx}=\operatorname{st}\frac{dg(f(a),\iota)}{\iota}\operatorname{st}\frac{df(a,dx)}{dx}=g'(f(a))f'(a)$$

olur. Eğer $\iota=0$ ise $d\,(g\circ f)\,(a,dx)=0$ ve $f'(a)=\operatorname{st}0/dx=0$ olacağından

$$\operatorname{st}\frac{d\,(g\circ f)\,(a,dx)}{dx}=g'(f(a))f'(a) \tag{4.44}$$

denklemi yine sağlanır. (4.44) her $dx\in\mathbb{A}_k^*$ için sağlandığından sav kanıtlanmıştır. ■

Elbette bunlar analizin bildik teoremleridirler; yeni olan yalın kanıtlardır.

$\mathfrak{R}^\star$ yapısı için elimizde sonsuz çoklukta aday olduğu okurun gözünden kaçmamıştır. Yukarıdaki irdelemelerimizde $\mathfrak{R}^\star$ yapısından kullandıklarımızı özetlersek bunlar şunlardır:

1. $\mathfrak{R}^\star=(\mathbb{R}^\star,+^\star,\cdot^\star,<^\star)$ sıralanmış cismi $\mathfrak{R}=(\mathbb{R},+,\cdot,<)$ sıralanmış cisminin tam olmayan bir öz genişlemesidir.
2. $\mathbb{R}^\star$'da bir $\iota\in\mathbb{R}^\star$ sayısı her pozitif $r\in\mathbb{R}$ için $0<^\star|\iota|^\star<^\star r$ olacak biçimde vardır. Bu tür sayılar ve 0 sayısından oluşan $\mathbb{A}_k$ kümesi bir idealdir ve öğelerine sonsuz küçük sayılar denir. Her $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^\star$ için $\alpha\approx\beta:\Longleftrightarrow\alpha-^\star\beta\in\mathbb{A}_k$ ile $\mathbb{R}^\star$'da bir denklik bağıntısı tanımlanır. $\alpha\in\mathbb{R}^\star$ ve bir $r\in\mathbb{R}$ ile $\alpha\approx r$ ise α sayısı sonludur denir. $\mathbb{S}$ sonlu sayılarımızın kümesi olmak üzere $\mathbb{S}/\approx$ sıralanmış cismi $\mathbb{R}$ sıralanmış cismi ile eşyapılıdır. $\mathbb{A}_b:=\mathbb{R}^\star\backslash\mathbb{S}$ kümesine sonsuz (aşırı) büyük sayılar demiştik ve sıfırdan farklı her $\iota\in\mathbb{A}_k$ için $1/\iota\in\mathbb{A}_b$. Her sonlu $x\in\mathbb{S}$ sayısı tek olarak belirli ve $\operatorname{st}(x)$ ile gösterilen bir reel sayıya denktir.
3. Her $n\geq1$ doğal sayısı ve her $A\subseteq\mathbb{R}^n$ altkümesi bir $A^\star\subseteq\mathbb{R}^{\star n}$ kümesine (fonksiyonları graflarıyla özdeşlersek f fonksiyonlarımız da $f^\star$ fonksiyonlarına) aşağıdaki Korunum Kuralı geçerli olacak biçimde genişletilmiştir:

   Korunum Kuralı: $\mathfrak{R}$ yapısındaki birinci dereceden her σ savına $\mathfrak{R}^\star$ yapısında kanonik biçimde bir $\sigma^\star$ savı karşılık gelir ve σ savının $\mathfrak{R}$ yapısında doğru olması $\sigma^\star$ savının $\mathfrak{R}^\star$ yapısında doğru olmasına denktir.

$\mathfrak{R}^\sharp=(\mathbb{R}^\sharp,+^\sharp,\cdot^\sharp,<^\sharp)$ sıralanmış cismi, $\mathfrak{R}$ cisminin yukarıdaki üç koşulu sağlayan bir üstcismi ise yaban analizde $\mathfrak{R}^\star$ cismi yerine $\mathfrak{R}^\sharp$ cisminde de çalışabiliriz. Burada modeller kuramı kullanmadan bize böyle bir cisim veren bir yol göstereceğiz.

$\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ kümesine aşağıdaki koşullar sağlandığında $\mathbb{N}$'de bir **ultra süzgeçtir** denir:

(1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$,

(2) $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$,

(3) $A \in \mathcal{F}$ ve $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$ ise $B \in \mathcal{F}$,

(4) Her $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ için ya $A \in \mathcal{F}$ ya da $A^c \in \mathcal{F}$.

Eğer $\mathcal{F}$ yalnızca (1), (2) ve (3)'ü sağlarsa, $\mathcal{F}$ ailesi $\mathbb{N}$'de bir **süzgeçtir** denir. $\mathbb{N}$'nin sonlu altkümelerinin ailesini $\mathcal{S}$ ile gösterelim ve $\mathcal{S}^c := \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A^c \in \mathcal{S}\}$ olsun. $\mathcal{S}^c$ bir süzgeçtir ve ayrıca $\bigcap \mathcal{S}^c = \emptyset$ sağlanır. $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$ koşulunu sağlayan süzgeçlere **serbest** süzgeçler denir.

$\mathcal{F}$ bir serbest süzgeç olsun. Reel değerli $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dizilerinin kümesi bilindiği gibi $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ile gösterilir. $\mathcal{F}$ süzgeci aracılığı ile $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ kümesinde yine $\mathcal{F}$ ile göstereceğimiz bir denklik bağıntısı her $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ için

$$f \mathcal{F} g :\Longleftrightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = g(n)\} \in \mathcal{F}$$

olarak açıklanır. $\mathbb{R}^\sharp_{\mathcal{F}} := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{F}$ olarak alacak ve f'nin denklik sınıfını $[f]_{\mathcal{F}}$ veya yalın olarak $[f]$ ile göstereceğiz. Her $r \in \mathbb{R}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $s_r(n) = r$ olsun. $r_1 \neq r_2 \Longrightarrow [s_{r_1}] \neq [s_{r_2}]$ olduğundan $[s_r]$ yerine yalın olarak yine r yazacak ve $\mathbb{R}$'yi bu şekilde $\mathbb{R}^\sharp_{\mathcal{F}}$'ye gömeceğiz ve böylece $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^\sharp_{\mathcal{F}}$ alacağız. Şimdi her $R \subseteq \mathbb{R}^n$ bağıntısına bir $R^\sharp_{\mathcal{F}} \subseteq \mathbb{R}^{*n}_{\mathcal{F}} := \left(\mathbb{R}^\sharp_{\mathcal{F}}\right)^n$ bağıntısını şöyle karşılık getireceğiz:

$$([f_1]_{\mathcal{F}}, \ldots, [f_n]_{\mathcal{F}}) \in R^\sharp_{\mathcal{F}} :\Longleftrightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid (f_1(n), \ldots, f_n(n)) \in R\} \in \mathcal{F}.$$

Bu tanımla $R^\sharp_{\mathcal{F}} \cap \mathbb{R}^n = R$ olur. Fonksiyonlar da özel bağıntılar olduğundan böylece f fonksiyonlarımızı da $f^\sharp$ fonksiyonlarına genişletmiş oluruz. $\mathbb{R}$'deki $<$ ikili bağıntısı, $+$ ve $\cdot$ üçlü bağıntıları $\mathbb{R}^\sharp_{\mathcal{F}}$'ye $<^\sharp$ ikili, $+^\sharp$ ve $\cdot^\sharp$ üçlü bağıntılarına genişletilirler. $\mathbb{R}$'deki $=$ ikili bağıntısı için $=^\sharp$ ise $\mathbb{R}^\sharp_{\mathcal{F}}$'deki eşitlik bağıntısıdır. Aşağıdaki teorem geçerlidir:

Teorem 4.6.31 (Luxemburg, [67]) $\left(\mathbb{R}^\sharp_{\mathcal{F}}, <^*, +^\sharp, \cdot^\sharp\right)$ *'ın bir sıralanmış cisim olması için gerek ve yeterli koşul* $\mathcal{F}$ *süzgecinin bir ultra süzgeç olmasıdır.*

Bu teoremin kanıtını ve ayrıca $\left(\mathbb{R}^\sharp_{\mathcal{F}}, <^\sharp, +^\sharp, \cdot^\sharp\right)$ ile yukarıdaki (1)–(3) koşullarının sağlandığını modeller kuramı işleyen herhangi bir kitapta, örneğin [71]'de bulabilirsiniz.

[64]'te yazarlar $\mathcal{S}^c$ süzgecinden yola çıkmışlardır. Bu durumda gerçi $\mathcal{S}^c$ bir ultra süzgeç olmadığından $\mathbb{R}^\sharp_{\mathcal{S}^c}$ artık bir cisim değildir ve $<^\sharp$ bir tümel sıralama değildir; yine de tüm bu eksikliklere karşın yaban analiz yapabilmişlerdir ve sonsuz küçük kavramına ilk matematiksel yaklaşım bu çalışmada verilmiştir.

Bölüm 5

GÖDEL EKSİKLİK TEOREMLERİ

5.1 Gödel Teoremlerine Giden Yol

Öklid geometri yaparken somut bir modelle uğraştı; modeli somut dünyamızdı. O nedenle *nokta, doğru* ve *düzlem* gibi kavramları bu bildik (standart) modelden alırken aksiyomlarını da bu modelin temel doğrularından seçti. Temel kavramlarını *tanımladı,* aksiyomları *kanıtlanamaz* temel doğrulardı.

Herhangi bir aksiyoma diğer aksiyomlardan kazanılamıyorsa, diğerlerinden bağımsızdır denir. *Paraleller aksiyomunun* diğerlerinden bağımsız olup olmadığı asırlar boyu yanıtsız kaldı. Ancak 19. asırda Lobachevski ve Bolya bu soruyu yanıtladılar. İlk kez bu çalışmalarla "bildik" ("olağan" veya "standart") model terk edilmiş ve temel kavramlar farklı yorumlanarak "yaban" ("aykırı" veya "standart dışı") modellere geçilmiş, uygun bir yaban modelde paraleller aksiyomu yanlışken diğer aksiyomların doğru olduğu gösterilerek paraleller aksiyomunun diğer aksiyomlardan bağımsızlığı kanıtlanmıştır. Bu olayı biçimsel kuramlara giden çalışmaların başlangıcı varsayabiliriz. Biçimsel kuramlar Frege ve özellikle Hilbert'in çalışmalarıyla büyük bir ivme kazanmıştır. Ancak farklı modellere izin vermek bazı şeyleri tepetaklak etmiştir: Bir biçimsel kuramın temel kavramları (bir modelden yola çıkılarak) *tanımlanamazlar,* ancak aksiyomlarla *belirlenirler*, buna karşın aksiyomlar artık kanıtlanamaz temel doğrular değildirler ve *kanıtlanabilirler.* Gerçekten her $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramının her $\varphi \in \Gamma$ aksiyomu bu kuramda kanıtlanabilir; biçimsel kanıtın tanımı gereği $\mathcal{K} \vdash \varphi$.

Hilbert'in 1900 Paris konferansı ve bu konferansta sunduğu 23 problem 20. asır matematiğini derinden etkilemiştir (bkz. [51]). Matematikçilere

çözmeleri için 23 problem sunduğu bu konferansta Hilbert doğaldır ki önce genel anlamda problemler ve çözülemeyen problemler hakkında genel görüşlerini dile getirir. Çözümlerden genel beklenti olarak

> "[. . .], yanıtın doğruluğunun, sonlu sayıda çıkarımlarla, hem de her zaman tam olarak ifade edilmesi gereken, problemin soruluşundan kaynaklanan sonlu sayıda varsayımlarına dayanarak sunulmasını" ([51], s. 216, [55], s. 293)[1]

ister. Matematikçilerin ilginç bir kanaatine değinir:

> "[. . .] Bu her matematikçinin paylaştığı, ancak şimdiye kadar kimsenin bir kanıtla desteklemediği—ister sorunun yanıtını vererek olsun ister çözümünün olanaksızlığını, dolayısıyla tüm girişimlerin başarısızlığının zorunluluğunu ortaya koyarak olsun—her bir matematiksel problemin zorunlu olarak kesin halledilebilir olması kanaatidir *([51], s.220-21, [55], s. 297-8).*"[2]

Vurgulamakta yarar var: Hilbert ister *problemi çözerek* ister *çözümün olanaksızlığını kanıtlayarak her bir matematiksel problemin halledilebilirliğinin* bir kanıtını beklemektedir. Bu kanıt verilmemişken, kendisi de ona inandığı için ondan bir aksiyom olarak söz eder:

> "Bu her problemin çözülebilirliği aksiyomu matematik düşünceye özgü bir özellik midir, veya aklımızın doğasında olan, kendisinin sorduğu her sorunun yine kendi tarafından yanıtlanabilir olduğuna ilişkin bir yasa mıdır?" [. . .]. "Bu her bir matematik problemin çözülebilirliği kanısı bize çalışmalarımız süresince güçlü bir özendiricidir; içimizde sürekli şu seslenişi duyarız: *İşte problem, çözümü ara. Sen onu saf düşünceyle bulabilirsin; çünkü matematikte bilinemezlik yoktur.*" ([51], s.220-21, [55], s. 297-8).[3]

[1] "[. . .], die Richtigkeit der Antwort durch eine endliche Anzahl von Schlüssen darzutun, und zwar auf Grund einer endlichen Anzahl von Voraussetzungen, welche in der Problemstellung liegen, und die jedesmal genau zu formulieren sind"

[2] "Diese [. . .] Überzeugung, die jeder Mathematiker gewiß teilt, die aber bis jetzt wenigstens niemand durch Beweise gestützt hat—ich meine die Überzeugung, daß ein jedes bestimmte mathematische Problem einer Erledigung notwendig fähig sein müsse, sei es, daß es gelingt, die Beantwortung der gestellten Frage zu geben, sei es, daß dieUnmöglichkeit seiner Lösung und damit die Notwendigkeit des Mißlungensaller Versuche daretan wird."

[3] "Ist dieses Axiom von der Lösbarkeit eines jeden Problems eine dem mathematischen Denken allein charakteristische Eigentümlichkeit, oder ist es vielleicht ein allgemeines dem Wesen unseres Verstandes anhaftendes Gesetzt, daß alle Fragen, die er stellt, auch

Bu problemler bağlamında *nesnelerin matematiksel varlığı* konusundaki görüşünü belirtir:

> "Bir kavrama birbiriyle çelişen özellikler yüklendiğinde diyorum ki: Bu kavram matematiksel olarak yoktur. Örneğin karesi -1 olan bir gerçel sayı matematiksel olarak yoktur. Buna karşın bir matematik kavrama yüklenen özelliklerin, sonlu sayıda mantıksal çıkarımlarla asla bir çelişkiye götürmediği kanıtlanırsa kavramın, örneğin bazı istekleri yerine getiren bir sayının veya bir fonksiyonun matematiksel varlığı kanıtlanmıştır diyorum." ([51], [55] s. 300).[4]

Hilbert'in sunduğu problemlerden bizi ilgilendirenler 2. ve 10. problemlerdir.

2. Problem: Aritmetik aksiyomlarının çelişkisizliği: Aksiyomlara ilişkin gösterilmesi gereken şeyler arasında en önemlisi olarak tutarlılık kanıtını görür.

> "Geometri aksiyomlarının tutarlılığının kanıtı şu şekilde başarılıyor; reel sayıların uygun bir kısmı o şekilde belirlenir ki, geometrinin aksiyomları bu sayılar arasında ilişkilere dönüştürülür ve böylece geometri aksiyomlarının çıkarımlarından kaynaklanan her tutarsızlık seçilen sayı alanının aritmetiğinde belirlenebilir olmak zorunda olur. Böylece geometrinin aksiyomlarının tutarlılığının arzu edilen kanıtı, aritmetik aksiyomlarının tutarlılığı teoremine indirgenmiş olur.
>
> Buna karşın aritmetiğin tutarlılık kanıtı için doğrudan bir yol izlenmelidir." ([51], [55], s. 300)[5]

---

durch ihn einer Beantwortung fähig sind? [...] . Diese Überzeugung von der Lösbarkeit eines jeden matheatischen Problems ist uns ein kräftiger Ansporn während der Arbeit; wir hören in uns den steten Zuruf: *Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durchreines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus!*"

[4]"Wenn man einem Begriff Merkmale erteilt, die einander widersprechen, so sage ich: der Begriff existiert mathematisch nicht. So existiert z. B. mathematisch nicht eine reelle Zahl, deren Quatrat gleich -1 ist. Gelingt es jedoch zu beweisen, daß die dem Begriff erteilten Merkmale bei Anwendung einer endlichen Anzahl von logischen Schlüssen niemals zu einem Widerspruche führen können, so sage ich, daß damit die mathematische Existenz des Begriffes, z. B. einer Zahl oder einer Funktion, die gewisse Forderungen erfüllt, bewiesen worden ist."

[5]"In der Geometrie gelingt der Nachweis der Widerspruchlosigkeit der Axiome dadurch, daß man einen gewissen Bereich von Zahlen konstruiert, derart, daß den geometrischen Axiomen analoge Beziehungen zwischen den Zahlen dieses Bereiches entsprechen, und daß demnach jeder Widerspruch in den Folgerungen aus den geometrischen Axiomen

10. Problem: Diophant Denklemlerinin Çözülebilirliğinin Belirlenmesi:

> "Bir takım bilinmeyenlerle tamsayı katsayılı bir Diophant denklemi verilmiş olsun: *Bu denklemin tamsayılarda bir çözümü olup olmadığını sonlu sayıda işlemle belirleyen bir yöntem verilmelidir.*[6] *"([51], [55] s.310).*[7]

Şimdi yalnızca bu iki problemin nelere yola açtığına kısaca değineceğiz.

Her şeyden önce 10. problemde istenen "*... sonlu sayıda işlemle belirleyen bir yöntem verilmelidir"* isteğinde "işlem", "belirlemek" ve "yöntem" gibi, her birimizde belirli çağrışımlar uyandıran bir takım sezgisel kavramlar var. Bunlar matematiksel kavramlar değildirler ve netleştirilmeleri gerekir. Bunu bir sonraki kesime bırakacağız.

İzleyen yıllarda Kümeler Kuramı'nda ortaya çıkan açmazlar altüst olmaları beraberinde getirdi; bu konuda kısaca bilgi için [17]'ye, özellikle I.8 numaralı kesime bakılabilir. Kısaca söylemek gerekirse başını Brouwer'in çektiği sezgiciler üçüncünün olmazlığı ilkesini reddettiler ve $\exists$ ve $\forall$ niceleyicilerinin *sonsuz* evrenlerde kullanımını tartışmaya açtılar. Üçüncünün olmazlığı ilkesinin reddinin doğal sonucu olarak Hilbert'in *matematiksel varlık=tutarlılık* yaklaşımı yerini *matematiksel varlık=kurgusallık* yaklaşımına bıraktı. Bir nesnenin yok olduğunu varsayıp bir çelişkiye ulaşıldığında sezgiciler için bu o nesnenin varlığının kanıtlandığı anlamına gelmez. Somut nesnelerden yola çıkıp yeni nesneleri adım adım kurgusal olarak oluşturdukları için *tutarlılık kanıtları* gibi bir sorunları olmadı. Burada okurun üçüncü bölümün başında Hilbert'ten verdiğimiz alıntıları yeniden okumasını öneririz. Birinci dereceden kuramların nesneleri belli bir abecenin sözcükleri olarak *somut* nesnelerdir, sonlu sayıda çıkarım kurallarımız vardır. Biçimsel kuramlar kurgusallık bağlamında sezgicilerin isteklerini tam anlamıyla karşılar; ancak Hilbert geleneksel matematikte o zamana kadar kanıtlarda kullandığımız mantıksal çıkarımlardan vazgeçmez.

Sezgicilerin yolu izlenecek olursa geleneksel matematiğinin büyük bir kısmından vazgeçmek gerekecekti. Hilbert gemisini terk etmeyen kaptan gibi davrandı:

---

auch in der Arithmetik jenes Zahlenbereiches erkennbar sein müsste. Auf diese Weise wird also der gewünschte Nachweis der Widerspruchlosigkeit der geometrischen Axiome auf den Satz von Widerspruchlosigkeit der arithmetischen Axiome zurückgeführt."

[6]Böyle bir yöntemin olmadığı Davis tarafından kanıtlandı, bkz. Davis, M., Hilbert's tenth problem is unsolvable, American Math. Monthly, Vol. 80 (1973).

[7]"Eine diophantische Gleichung mit irgendwelchen Unbekannten und mit ganzen rationalen Zahlkoeffizienten sei vorgelegt: *man soll ein Verfahren angeben, nach welchem sich mittels einer endlivhen Anzahl von Operarionen entscheiden läßt, ob die Gleichung in ganzen rationalen Zahlen lösbar ist.*"

> "Genel anlamdaki küme kavramına koşulsuz izin verilemez olması asla tamsayılar kümesi kavramının doğru olmadığı anlamına gelmez. Kümeler Kuramı'nın açmazları asla tamsayılar kümesi kavramının çelişkilere yol açacağının kanıtı olarak görülemez." ([49])

Kümeler kuramının ortaya çıkan açmazları Zermelo'nun çalışmasıyla küme tanımındaki serbestliğe ve kümelerin öğelerine ilişkin önermelere bazı kısıtlamalar getirerek giderildi. Ancak açmazlar çıktıkça uygun değişiklerle bunları gidermek yerine her aksiyomatik kuramın tutarlı olduğunun kanıtlanması temel problemlerden biri olarak karşımıza çıktı.

Matematiğin bir alanındaki nesne ve ilişkilerin başka bir alanda kodlanmasına ilk Descartes ile tanık olduk. "Aritmetik imler yazılmış şekiller ve geometrik şekiller çizilmiş formüllerdir [51]". Bir kuramın bir diğerinde yorumlanması ve göreceli tutarlılık kanıtına ise ilk Hilbert ile tanık oluyoruz. Göreceli tutarlılık kanıtlarının bir sınırı vardır. "Yalnızca iki durumda, *tamsayıların* aksiyomları ve *Kümeler Kuramı'nın* kurulması söz konusu olduğunda bir başka bilim alanına gönderme yapan bu yöntem işlemez, çünkü mantık dışında gönderme yapacağımız hiçbir alan kalmamıştır [50], [55] s.153)"..Tutarsızlık incelemelerinden kaçış olmadığından, mantığın kendisinin, Sayılar Teorisi ve Kümeler Kuramı'nı da mantığın bir parçası olacak biçimde aksiyomlaştırılması zorunlu görülmektedir. Hilbert, Russell'ın bunu o zaman için en iyi biçimde ele aldığını belirtir. Ancak halledilmesi gereken başka problemler ve sorular vardır. Bunları şöyle sıralar:

> "[. . .] İlke olarak *her bir matematik sorunun çözülebilirliği problemi*, bir matematiksel araştırmanın sonuçlarının sonradan *kontrol edilebilmesi* problemi, matematiksel kanıtların *basitlik ölçütleri* sorusu, matematik ve mantıktaki *içeriksellik ve biçimsellik arasındaki ilişki* sorusu, son olarak matematiksel soruların sonlu sayıda işlemlerle *belirlenebilirliği* sorusu.
>
> Bu sorular arasında sonuncusu, yani sonlu sayıda işlemlerle belirlenebilme sorusu, matematik düşüncenin özüne derinden dokunduğu için, en çok bilineni ve en çok tartışılanıdır." ([50], [55], s.153)[8]

[8] "[. . .], das Problem der prinzipellen *Lösbarkeit einer jeden mathematischen Frage*, das Problem der nachträglichen *Kontrollierbarkeit* des Resultates einer mathematischen Untersuchung, ferner die nach einem *Kriterium für die Einfachheit* von mathematischen Beweisen, die Frage nach dem Verhältniss zwischen *Inhaltlichkeit und Formalismus* in Mathematik und Logik und endlich das Problem der *Endscheidbarkeit* einer mathematischen Frage durch endliche Anzahl von Oprationen.

> "Tüm bu temel sorular [...], bana açılması ve fethedilmesi gereken yeni bir araştırma alanı oluşturuyor gibi görünüyor, [...] bu alanın fethi için, tam da astronomun bulunduğu noktanın hareketini gözetmesi, fizikçinin aletlerinin teorisini dert etmesi ve filozofun aklın kendisini eleştirmesi gibi matematiğe özgü kanıtları bir araştırmanın konusu yapmak zorundayız." ([50], [55], s. 155).[9]

İçeriksellik ve biçimsellik arasındaki ilişki sorusunu ele alalım. İlk akla gelen sorular bir $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramı ve $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ için

$$\begin{array}{lll} (1) & \Gamma \vdash \varphi \implies \Gamma \Vdash \varphi? & \text{Doğruluk, Dürüstlük} \\ (2) & \Gamma \Vdash \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi? & \text{Yeterlilik} \end{array}$$

sorularıdır. Yaygın olmayan bu adlandırmaları açalım: "Doğruluk" ve "Dürüstlük" ile $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramının bize karşı dürüst olup yalnızca Γ'nın tüm modellerinde doğru olan φ'leri kanıtladığını kast ediyoruz. "Yeterlilik" ile biçimsel çıkarımlarımızın her Γ ilksavları için bunların mantıksal çıkarımlarını kazanmaya yeterli olduğunu kast ediyoruz. Gödel "$\Gamma \Vdash \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$" teoremine "Tamlık Teoremi" adını vermiştir. Ancak buradaki "tamlık" kavramının biraz ileride açıklanan ve "Eksiklik Teoremleri"nde geçen tamlıkla hiçbir ilişkisi yoktur. Çıkarım kurallarımız $\Gamma \Vdash \varphi$ ise $\Gamma \vdash \varphi$ olacak kadar yeterlidir. Birinci dereceden mantık bir yana, önerme mantığında hepdoğru kavramına ilk kez Bernays'de (1926) rastlıyoruz. İkinci soruya yazılı olarak ilk Hilbert-Ackermann'da (1928) rastlıyoruz.

Bu soruların birincisi en kolay yanıtlananıdır: Çıkarım kurallarımız $\mathfrak{A} \models \Gamma$ ve $\Gamma \vdash \varphi$ ise $\mathfrak{A} \models \varphi$ olacak biçimde seçilmişlerdir. Dolayısıyla ilk sorunun yanıtı evettir. İkinci soruyu yanıtlamak, dd. seçtiğimiz çıkarım kurallarının yeterli olduğunu göstermek daha zordur ve 1929 yılında Gödel tarafından "*Über die Vollständigkeit des Logikkalküls*" adlı çalışmasında olumlu olarak yanıtlanmıştır (bkz. [24]).

Bu iki sorunun olumlu yanıtlanması her matematik sorunun çözülebilirliğine olan güveni artırmıştır. Neredeyse tüm matematiği Kümeler Kuramı'nda dile getirebildiğimize göre

---

Unter den genannten Fragen ist die letzte, nämlich die Frage nach der Entscheibarkeit durch endliche Anzahl von Operationen, die bekannteste und die am häufigsten diskutierte, weil sie das Wesen der Mathematischen Denkens tief berührt."

[9]"Alle solche prinzipiellen Fragen, [...] scheinen mir ein wichtiges, neu zu erschließendes Forschungsfeld zu bilden, [...], und zur Eroberung dieses Feldes müssen wir, den Begriff des spezifisch mathematischen Beweises selbst zum Gegenstand einer Untersuchung machen, gerade wie ja auch der Astronom die Bewegung seines Standortes berücksichtigen, der Physiker sich an die Teorie seines Apparates kümmern muß und der Philosoph die Vernunft selbst kritisiert."

$$(3) \quad \text{Her } \sigma \in \operatorname{Sav} L_k \text{ için } \mathcal{K}_{ZF} \vdash \sigma \text{ veya } \mathcal{K}_{ZF} \vdash \neg\sigma \ ? \quad \text{(Tamlık)}$$

sorusunun yanıtının da evet olması beklenir. Bir başka beklentimiz ise en iyi tanıdığımızı düşündüğümüz $\mathcal{K}_a$ aritmetik kuramımızın tam olduğudur, dd.

$$(3^*) \quad \text{Her } \sigma \in \operatorname{Sav} L_a \text{ için } \mathcal{K}_a \vdash \sigma \text{ veya } \mathcal{K}_a \vdash \neg\sigma \ ?$$

sorusunun da yanıtının evet olduğudur. Ancak Gödel "*Über formal unentscheibare Sätze der Principia matematica und verwandter Systeme I,* (Monatsh. Math. u. Phys. 38 (1931))" adlı çalışmasında, beklentinin tersine, her iki sorunun da yanıtının " hayır" olduğunu kanıtlamıştır. Gödel'in *Eksiklik Teoremi*, Einstein'ın *Görecelik Teoremi* ile aynı kaderi paylaşmıştır: Bunlar matematik ve fizik dünyası dışında en çok bilinen ve bir o kadar da yanlış yorumlanan teoremlerdir. Buna ileride döneceğiz.

Gödel Eksiklik Teoremi'ne giden yolu şöyle özetleyebiliriz.

Cantor [10]: Her $d : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ fonksiyonuna bir ikili dizi diyelim ve böyle bir diziyi $d = d(0), d(1), \ldots$ ile gösterelim. Cantor ikili dizilerin sayılamaz olduğunu şöyle kanıtlamıştır: Dizilerin sayılabilir olduğunu varsayıp onları $d_0, d_1, \ldots$ olarak sıralar. $d_{ij} := d_i(j)$ olmak üzere köşegen karşıtı bir d' dizisini $d'_{jj} := d'(j) := 1 - d_j(j) = 1 - d_{jj}$ olarak tanımlar. Elbette her i için $d' \neq d_i$. Biz Cantor'un köşegen yönteminin şimdiye kadar matematiğe yapılan en önemli katkılardan biri olduğunu düşünüyoruz.

Hilbert: Hilbert'in rolü hakkında yeterince bilgi daha önce verildi. Özellikle aritmetiğin çelişkisizliğini kanıtlamak için Hilbert, Bernays ve Ackermann'ın başarıyla sonuçlanmayan çalışmaları olmuştur.

Richard [80]: Herhangi bir yazı dilinin abecesindeki büyük ve küçük harflere noktalama imlerini, 0–9 rakamlarını ve kelimeleri birbirinden ayıran boşluğu da im olarak alarak yeni bir abece oluşturalım. Bu sonlu kümenin öğelerini herhangi bir biçimde sıralayalım. Bu sıralamaya bağlı olarak bu abecenin sözcüklerini önce uzunlukları 1, sonra uzunlukları 2 olanları vs. sıralayalım. Elbette bunar sayılabilir sonsuzluktadırlar. Bunlardan bazıları gerçel sayılar tanımlar. Herhangi bir r gerçel sayısını ondalık gösterimde r_0 tam kısmı olmak üzere $r = r_0, r_1 r_2 \cdots$ olarak yazalım. Sözcük dizimizden gerçel sayı tanımlamayanların üstünü çizelim. Kalanlar $u_1, u_2, \ldots$ gibi bir dizi oluşturur. Bunlar sonlu sözcükle tanımlanabilen gerçel sayılardır ve $E := \{u_1, u_2, \ldots\}$ olsun. "E kümesindeki n. sayının n. ondalığı p_n olsun; tam kısmı 0 olan bir sayıyı şöyle tanımlayalım: Bu sayının n. ondalığı p_n sayısı 8 veya 9 değilse p_n'nin bir fazlası, diğer durumlarda ise 1 olsun"[10] tümcesini G ile gösterelim. G bir r sayısı tanımlar ve r'nin n. ondalığı u_n'in

[10]Richard, G cümlesinde "p'nin bir fazlası" yerine p+1 yazmıştır. Biz abecemize sadık kalmak için bu şekilde yazmayı yeğledik.

n. ondalığından farklı olduğundan her $n \geq 1$ için $r \neq u_n$ olur. G sonlu uzunluklu bir sözcüktür ve bir r gerçel sayısı tanımlar ve $r \notin E$. Richard " İşte çelişki!" der. Ancak hemen ardından bu çelişkinin görünüşte bir çelişki olduğunu kanıtlar. Açıklaması çok yalındır. Eğer G'nin uzunluğu m ise bu sözcüğe m uzunluklu sözcükleri sıraladığım yerde rastlarım. Ancak orada bu bir sayı tanımlamaz, çünkü o anda E kümesi henüz tanımlanmamıştır ve G bir sayı tanımlamaz ve dolayısıyla G'nin üstü çizilmiştir. Elbette burada Cantor köşegen yöntemi devrededir. $u_i = u_{i0}.u_{i1}u_{i2}\cdots$ olmak üzere $r_i \neq u_{ii}$ seçilmiştir.

Brouwer: Brouwer daha 1907'de olacakları tüm açıklığıyla dile getirir:

> "Dahası, her ne kadar Hilbert 'Matematiksel Problemler" de, her matematikçinin buna derinden ikna olmuş olduğuna inansa da her matematiksel problemin ya çözülebileceği ya da çözülemeyeceğinin kanıtlanabileceği kesin değildir ([8], s. 79, 3. dipnot)."[11]

Behmann: Behmann Mayıs 1921'daki "Entscheidungsproblem und Algebra der Logik" başlıklı sunumunda belirlenebilirlik probleminden matematiküstü bir problem olarak bahseder:

> "Bilindiği gibi biçimsel mantık *aksiyomlaştırılabilir,* dd. *teoremlerin kanıtları* artık *yalnızca bir hesap yöntemi* olacak biçimde oldukça az sayıda formüller ve temel kurallar sistemine indirgenebilirler. Yalnızca verilen formüllere yenilerini yazmak yeterlidir ve her defasında ne yazacağımız kurallarla önceden belirlenmiştir. Kanıtlamak bir anlamda *bir oyun karakterini* almıştır. Bu örneğin, insanların kendi taşlarını sürerek ve gerektiğinde rakibin bir taşını alarak her defasında *o anki durumun bir yenisine dönüştürüldüğü* satranç oyunu gibidir; burada taşı sürmeye ve rakip taşı almaya oyunun kuralları izin veriyor olmak zorundadır.
>
> Tam da bu kıyaslama bize göze batacak biçimde, az önce betimlediğimiz *biçimsel mantığın bakış açısının* problemimiz [belirleme problemi, y.n.] için *henüz hiçbir biçimde yetmeyeceğini* gösterir. Çünkü bu bize satranç oyunun kuralları gibi *yalnızca yapmaya izinli olduklarımızı* söyler ve *ne yapmamızın uygun olduğunu (ne yapmamız gerektiğini)* söylemez. Bu [ne yapmamız gerektiği, y.n.], duruma göre yaratıcı *(yoğunlaşmış) düşüncenin*

[11]"A fortiori it is not certain that any mathematical problem can either be solved or proved to be unsolvable, thought Hilbert, in 'Mathematische Probleme', believes that every mathematician is deeply convinced of it."

> veya şanslı *kombinasyonların* işidir. Biz daha fazlasını, yalnızca tek tek izinli işlemlerin değil, aynı zamanda *hesaplamanın kendisinin seyrinin* kurallarla belirlenmiş olmasını, başka sözlerle *mekanik hesaplama lehine düşünmenin devre dışı bırakılmasını* istiyoruz. İstediğimiz yöntem, bize herhangi bir matematik mantıksal bir önerme verildiğinde bunun *doğru veya yanlış* olduğunu *tümüyle zorunlu hesaplamalarla sonlu adımda* nasıl bulacağımıza ilişkin eksiksiz direktifler vermelidir. Yukarıda dillendirilen probleme *genel belirleme problemi* demek istiyorum.
>
> Kanıt aracı olarak, verilmiş bir yönergeye göre, dar anlamda herhangi bir düşünce etkinliği olmaksızın *yalnızca tümüyle mekanik hesaplamalara* izin verilmiş olması problemimizin karakteri için ilkesel anlamdadır. İnsan, isterse, burada *mekanik* veya *makina tarzı* düşünmekten söz edebilir (Belki ileride bu [hesaplama, y.n.] makinalara yaptırılabilir)." ([4], s.5-6)[12]

1920'lerde çok benimsenmiş olan satranç benzetmesine böylesine net ve farkı bir yaklaşımı Behmann'da görüyoruz. Biçimsel mantığın bakış açısıyla, matematikçinin düşünce tarzının farkı çok net ortaya konmuştur ve

[12]"Bekanntlich läßt sich die symbolische Logik *axiomatisieren*, d.h. auf ein system verhältnismäßig weniger Grundformeln und Grundregeln zurückführen, sodaß auch das *Beweisen von Sätzen* nunmehr als ein *bloßes Rechenverfahren* erscheint. Man braucht nur noch zu gegebenen Formeln neue hinzuschreiben, wobei durch Regeln bereits festgelegt ist, was man jeweils hinschreiben darf. Das Beweisen hat sozusagen den *Charakter eines Spieles* angenommmen. Es ist etwa wie beim Schachspiel, wo man durch verschieben eines der eigenen Steine, gegebenfalls mit Wegnahme einer gegnerischen, die *jeweils vorliegende Stellung in eine neue* verwandelt, wobei nun das Verschieben und das Wegnehmen durch die Regel des Spieles erlaubt sein muß.

Aber gerade dieser Vergleich zeigt uns in krasser Weise, daß uns der eben geschilderte *Standpunkt der symbolische Logik* für unser Problem *noch keineswegs genügen* kann. Denn diser sagt uns wie die Regeln des Schachspiels *nur, was man tun darf,* und *nicht, was man tun soll*. Dies bleibt in dem einen wie in den anderen Falle eine Sache des erfinderischen *Nahdenkens*, der glücklichen *Kombination*. Wir verlangen aber weit mehr: daß nicht etwa nur die erlaubten Operationen im einzelnen, sondern auch der *Gang der Rechnung selbst* durch Regeln festgelegt sein soll, m.a.W. eine *Ausschaltung des Denkens zugunsten des mechanischen Rechnens*. Ist irgend eine logische mathematische Aussage vorgelegt, so soll das verlangte Verfahren eine vollständige Anweisung geben, wie man *durch eine ganz zwangsläufige Rechnung durch endlich vielen Schritten* ermitteln kann, ob die gegebene Aussage *richtig oder falsch* ist. Das oben formulierte Problem möchte ich *das allgemeine Entscheidungsproblem* nennen.

Für das Wesen des Problems ist von grundsätzlicher Bedeutung, daß als Hilfsmittel des Beweises *nur das ganz mechanische Rechnen* nach einer gegebenen Vorschrift, ohne irgendwelche Denktätigkeit im engeren Sinne, zugelassen wird. Man könnte hier, wenn man will, von *mechanischem* oder *maschinenmäßigem* Denken reden. (Vielleicht kann man es später sogar durch eine maschine ausführen lassen."

Behmann biçimsel mantığın yaklaşımının belirlenebilirlik problemine yetmeyeceğini belirtir.

von Neumann: [73]'te von Neumann geleneksel matematiğin çelişkisizliğini kanıtlamak ister. Bundan anladığı Kümeler Kuramı'nın çelişkiler çıkmadan önceki düzeyidir; örneğin kümelerin çokluk sayısı reel sayıların çokluğu olan $\mathfrak{c}$'den büyük olmayacaktır. Aritmetikten tek basamaklı bir Z bağıntısı ve iki değişkenli bir $\dot{+}$ toplama imi ile yetinir. Seçtiği dilde $\mathbf{0}$ ve $\mathbf{1}$ ile adlandırdığı sabitlerle, Hilbert'te olduğu gibi Za ifadesi "a bir doğal sayıdır" olarak yorumlanmak üzere, aritmetiğin aksiyomları olarak

1. $Z\mathbf{0}$
2. $Za \to Z(a \dot{+} \mathbf{1})$
3. $\neg(a \dot{+} \mathbf{1} \doteq \mathbf{0})$
4. $a \dot{+} \mathbf{1} \doteq b \dot{+} \mathbf{1} \to a \doteq b$

aksiyomlarını alır[13]. Bunlar farklı biçimde dile getirilmiş olsalar da tümevarım aksiyomu dışında özünde Peano aksiyomlarını kapsar. Von Neumann geleneksel matematiğin çelişkisizliğini kanıtlayamaz; ancak matematiğin Brouwer ve Weyl'i tatmin edebilecek ve yarı-sezgici denebilecek bir kısmını, ayrıca Russell Matematiğinin "İndirgenebilirlik aksiyomu" dışında kalan kısmını da kapsayan bir bölümü için çelişkisizlik kanıtı verir. Bu arada Ackermann'ın çelişkisizlik kanıtında onarılamayacak bir yanlışa değinir. Bu çalışmada ayrıca önemli bulduğumuz, von Neumann'ın belirlenebilirlik konusunda söyledikleridir. Von Neumann çıkarım kuralı olarak yalnızca modus ponensi kullanır. Formüllerin belirlenebilir olduğunu belirttikten sonra şöyle devam eder[14]:

> "[...] burada a ve $a \to b$'den kanıtlanabilir b formülü kazanılır. Orada [formüllerde, y.n.] tüm eski yenide bulunurken burada bu hiç de öyle değildir: b'nin, kazanılmasında ('kanıtında') geçen a ile hiçbir ilişkisi yokken $a \to b$ ile kısmen bir ilişkisi vardır. b'nin hangi a, $a \to b$ ile kazanıldığı ('kanıtlandığı') asla görülemez. [...] Verilen bir a savının biçimsel kanıtlanabilir olduğunu genel olarak belirleme ölçütünün bir yolu olmadığı görülüyor (elbette şimdilik kanıtlayamayız. Ayrıca böyle bir belirlenemezlik kanıtının nasıl verileceğine ilişkin bir çıkış noktası da yoktur). Ancak bu belirsizlik şu tespitte bulunmamızı engellemez: Bugün için bize verilen herhangi bir a formülünün (ileride açıklayacağımız aksiyomlarla) kanıtlanıp kanıtlanamayacağı bugün

[13] Burada von Neumann'ın gösterimlerini kitabımızdaki kullanıma göre düzenledik.
[14] Bu çalışmanın dergiye sunuluşu Temmuz 1925'tir.

için genelde belirlenemez ve belirlenemezlik aslında bugünkü buluşsal yöntemlerle matematik yapmanın olmazsa olmaz koşuludur. Belirlenemezlik biterse o gün matematik bugünkü anlamıyla biter; yerini, kendisinin yardımıyla herkesin verilen bir savın kanıtlanabilir olup olmadığını belirleyebileceği mutlak mekanik bir yönerge alır." ([73], [74] s. 265)[15]

Finsler [18]: Finsler'in çalışması ayrıntılara girilmemiş bir taslaktır; ancak içeriği önemlidir. Finsler Almanca'daki harfler ve matematikte kullanılmakta olan ve ileride de kullanılabilecek olan imlerden oluşan bir sonlu $\mathfrak{S}$ abecesi alır ve bu onun formal dilidir. Bu abecenin sözcüklerinin bazılarına, özellikle Almanca sözcük olanlara, kullanımdaki anlamlarını veren, farklı anlamlara gelen sözcüklerin farklı anlamlarını gerekirse damgalarla gözeten ve grameri de içeren bir $\mathfrak{B}$ sözlüğü verilmiş olacaktır. Bu sözlük tümüyle farklı bir dilde yazılmış olabilir. Terimleri 0 ve 1'lerden oluşan $d : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ dizilerine **ikili diziler** der. $\mathfrak{S}$ sonlu olduğundan bunların sözcüklerinin $\mathfrak{S}^*$ kümesi sayılabilir sonsuzdur. Tıpkı Richard'ın yaptığı gibi $\mathfrak{S}^*$ sözcüklerini kısadan uzuna doğru sıralar. Bu sözcüklerden bazıları ikili diziler tanımlar; bunlar

$$d_i = d_{i0}, d_{i1}, d_{i2}, \ldots, \ i = 0,1,2,\ldots, \ d_{ij} \in \{0,1\} \tag{5.1}$$

olsunlar. $d' = 1 - d_{00}, 1 - d_{11}, 1 - d_{22}, \ldots$ köşegen karşıtı dizisi $\mathfrak{S}$ sisteminde tanımlanamaz.

Herhangi bir d ikili dizisi için $\sigma(d)$ savı "d dizisinin terimlerinin sonsuz tanesi 0'dır" olsun. $\tau(d) := \sigma(d) \vee \neg\sigma(d)$, dd. bu tam da "$d$ dizisinin terimlerinin sonsuz tanesi 0'dır veya d dizisinin terimlerinin sonsuz tanesi 0

[15]"[...] hier entsteht aus $a, a \to b$ die Beweisbare Normalformel b. Während dort im Neuen alles alte mitenthalten war, ist es hier durchaus nicht der Fall: b steht mit a, das bei seiner Herstellung (seinem 'Beweise') benütz wurde, in gar keiner Beziehung, und mit $a \to b$ auch nur teilweisen. Man kann dem b gar nicht einsehen aus welchen $a, a \to b$ es gebildet ('bewiesen')wurde.

Es scheint also, daß es keinen Weg gibt, um das allgemeine Entscheidungskriterium dafür, ob eine gegebene Normalformel a beweisbar ist, aufzufinden. (Nachweisen können wir freilich gegenwärtig nichts. Es ist auch kein Anhaltspunkt dafür vorhanden, wie ein solcher Unentscheidbarkeitsbeweis zu führen wäre.) Dise Ungewißheit hindert uns aber nichts daran, festzustellen: Heute ist es nicht allgemein zu entscheiden, ob irgendeine gegebene Normalformel a (bei der im folgenden zu beschriebenden Axiomregeln) beweibar ist oder nicht. Und die Unentscheibarkeit ist sogar die Conditio sine qua non dafür, daß es überhaupt einen Sinn habe, mit den heutigen heuristischen Methoden Mathematik zu treiben. An dem Tage, an dem Unentscheidbarkeit aufhörte, würde auch die Mathematik in heutigen Sinne aufhören zu existieren; an ihre Stelle würde eine absolut mechaische Vorschrift treten, mit deren Hilfe jedermann von jeder gegebenen Aussage entscheiden könnte, ob diese bewiesen werden kann oder nicht."

değildir" demektir. $\mathfrak{S}$ siteminin tüm formal kanıtları sayılabilir sonsuz tanedir. Bunları bir biçimde sıralayalım. Bu kanıtlardan bazıları uygun bir i ile $\tau(d_i)$ savının kanıtıdır. Kanıtların sıralamasına sadık kalarak kanıtlayabildiğimiz $\tau(d_i)$'lerdeki d_i dizilerini $e_0, e_1, \ldots$ olarak sıralayalım. Burada, $\tau(d)$ için farklı kanıtlarımız olabileceğinden $i \neq j$ için $e_i = e_j$ olabilir. $e_0, e_1, \ldots$ ikili dizilerinin köşegen karşıt $e' = 1 - e_{00}, 1 - e_{11}, \ldots$ dizisi her bir e_i'den farklıdır. Dolayısıyla $\tau(e')$ savı formal kanıtlanamaz. Formal olarak biz ne $\sigma(e')$ savını ne de $\neg\sigma(e')$ savını kanıtlayamıyoruz. Ancak formal sistemi terkedersek kolayca $\sigma(e')$ savının doğru, dolayısıyla $\neg\sigma(e')$ savının yanlış olduğunu kanıtlayabiliriz. Gerçekten de sadece 1'lerden oluşan $b = 1, 1, \ldots$ dizisi için $\tau(b)$ savının sonsuz kanıtı vardır. Bu demektir ki b dizisi e_i'ler arasında sonsuz kez geçer ve her geçişi bize e' dizisinde bir 0 terimi verir. Bu irdelemelerde köşegen yöntemi ve Richard açmazının devrede olduğu apaçık ortadadır.

Finsler'in çalışmasında ayrıntılara girilmemiş olsa da ve formal sistemi Gödel'in formal sisteminden farklı olsa da burada formal sistemlerin yetersiz kalabileceği, formal kanıtlanamaz, ancak formal sistem dışında doğruluğu kanıtlanabilen önermelerin varlığı gösterilmiştir. Bu nedenle bu çalışma bazı mantıkçılar tarafından Gödel teoreminin habercisi olarak görülmektedir. Ancak [27]'de Finsler ve Gödel arasındaki kısa süren mektuplaşmadan Gödel'in Finsler'in çalışmasından haberdar olmadığını öğreniyoruz. Gödel ayrıca Finsler'in $\mathfrak{S}$ sistemini asla tanımlamadığını ve kanıtının gerçek bir P formal sistemine uygulandığında yanlış olduğunu belirtir. Bunun nedeni olarak Finsler'in kanıtında oluşturduğu köşegenkarşıtı dizinin bu formal sistemin dışına düşmesini gösterir. Ancak Finsler [19]'da ısrarını sürdürür.

1970'te bir yüksek lisans öğrencisi olan Yossef Balas, American Mathematical Society'ye Gödel'in Birinci Eksiklik Teoremi'nin ortaya çıkışına ilişkin bilgi aradığını bildirir. Bu mektup Gödel'e iletilir. Gödel'in ölümünden sonra, kendisinin Balas'a gönderilmek üzere tasarladığı ama gönderilmemiş bir yazı hazırlığı içinde olduğunu görülür. Bu konuda kendisinin bildiği kadarıyla kendi çalışmasından önce yalnızca Finsler'in [18] çalışması vardır. Finsler'in mutlak biçimsel belirlenemezlik gibi anlamsız bir amacının olduğunu belirtir. Eğer Finsler yalnızca iyi tanımlı belli bir S sistemine ve kanıtındaki önermenin bu sistemde temsil edilebilirliğine odaklansaydı kanıtının düzeltilebilir bir kanıt olduğunu belirtir (bkz. [27], s.9).

Not 5.1.1 $\Phi^1_s(L_a)$ kümesini $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ olarak sıralayalım ve

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \mathfrak{N} \models \varphi_i(\underline{j}) \\ 0 & \mathfrak{N} \not\models \varphi_i(\underline{j}) \end{cases}$$

ve

$$b_{ij} := \begin{cases} 1 & \mathcal{K}_a \vdash \varphi_i(\underline{j}) \\ 0 & \mathcal{K}_a \nvdash \varphi_i(\underline{j}) \end{cases}$$

olsunlar. $a_i = a_{i0}, a_{i1}, \ldots$ ve $b_i = b_{i0}, b_{i1}, \ldots$ ikili dizilerdir. b_i'lerin köşegen karşıtı dizisi b' olsun. Her i için $a' \neq a_i$ ve $b' \neq b_i$ olduğunu biliyoruz. Ancak önümüzde iki farklı (a_{ij}) ve (b_{ij}) tablosu olduğu için bir k ile $b' = a_k$ olabilir ve biz öyle olduğunu *varsayalım*. Bu durumda her j için

$$\left(b'\right)_j = 1 - b_{jj} = a_{kj} \text{ ve özellikle } 1 - b_{kk} = a_{kk}$$

olur. Biçimsel kuramlarımızın kanıtladıkları önermeler bunların her modelinde doğrudur ve $\mathcal{K}_a$ kuramı $\mathfrak{N}$ modeline sahip olduğu için tutarlıdır; dolayısıyla yanlış önermeleri kanıtlayamaz. Dolayısıyla $b_{kk} \leq a_{kk}$ olur ve buradan

$$b_{kk} \leq a_{kk} \wedge 1 - b_{kk} = a_{kk} \text{ olduğundan } b_{kk} = 0 \wedge a_{kk} = 1$$

elde ederiz. Dolayısıyla $\varphi_k(\underline{k})$ savı $\mathfrak{N}$'de doğrudur ancak $\mathcal{K}_a$ kuramı bu savı kanıtlayamaz. Aşağı yukarı, farklı bir biçimde de söylenmiş olsa Gödel'in çalışmasının ana fikri budur ve çalışmanın büyük bir kısmı $b' = a_k$ olan bir k'nin varlığını kanıtlamaya ayrılmıştır. ▲

Yukarıdaki nottaki durumu bir Lemma olarak belirtelim. (1.1.5) Cantor Köşegen Lemması'ndaki gösterimlerle:

Lemma 5.1.2 (Anahtar Lemma) *$A \neq \emptyset$ ve $V \subseteq U \subseteq A^2$ verilsinler. Bir $k \in A$ ile D_V^c köşegen karşıtı U_k kesitine eşitse, dd. $U_k = D_V^c$ ise*

$$(k,k) \in U \Longleftrightarrow (k,k) \notin V \tag{5.2}$$

ve gerçekte geçerli olan ise $(k,k) \in U$ ve $(k,k) \notin V$.

Özel durum: *$\Phi_s^1(L_a)$ kümesi $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ olarak sıralanmış ve her $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ için*

$$(i,j) \in U :\Longleftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi_i(\underline{j}) \text{ ve } (i,j) \in V :\Longleftrightarrow \mathcal{K}_a \vdash \varphi_i(\underline{j}) \tag{5.3}$$

olarak açıklanmışsa

$$\mathfrak{N} \models \varphi_k(\underline{k}) \Longleftrightarrow \mathcal{K}_a \nvdash \varphi_k(\underline{k})$$

ve gerçekte geçerli olan ise $\mathfrak{N} \models \varphi_k(\underline{k})$ ve $\mathcal{K}_a \nvdash \varphi_k(\underline{k})$.

Kanıt. $U_k = D_V^c$ ise köşegen üzerindeki (k,k) noktasına odaklanırsak

$$(k,k) \in U \Longleftrightarrow k \in U_k \Longleftrightarrow k \in D_V^c \Longleftrightarrow k \notin D_V \Longleftrightarrow (k,k) \notin V$$

elde ederiz ve bu (5.2)'yi kanıtlar.

$(k,k) \in V$ olsaydı $V \subseteq U$ olduğundan $(k,k) \in U$ olurdu ki buradan (5.2) ile $(k,k) \notin V$ elde eder ve bir çelişkiye ulaşırız.

Özel durumda $V \subseteq U \subseteq \mathbb{N}^2$ olduğundan sav aşikârdır. ■

Bu basit lemma gerçekten de bizi beklenmeyen sonuçlara götüren bir anahtardır, kapıları kolayca açar; ancak tüm zorluklar bir k ile $U_k = D_V^c$ bağıntısına atılmıştır. Bizi genelde $A = \mathbb{N}$ durumu ilgilendirecektir.

Şimdi sözü yayınlanmamış kısa ancak harika bir özet olan ([26], s.30) ile Gödel'e bırakacağız. Gödel'in gösterimlerini değiştirmeden kullanacağız. Okurun bunların ne anlama geldiğini çıkaracağına inanıyoruz; yine de şunları belirtelim. Biçimsel sistemlerimizin dilleri sayılabilir seçilmiştir; "p-değil" bu çalışmada $\sim p$ ile gösterilmiştir. "$\equiv$" imi ise "(mantıksal) denktir" için kullanılmıştır. Gödel'in "kanıt şekli" ise bizim terimlerle bir "biçimsel kanıttır".

> "İyi bilindiği gibi, S biçimsel sistemine, eğer S 'nin sembolleri ile ifade edilen her p savı S 'nin aksiyomları ile belirlenebilirse, dd. p veya $\sim p$, aksiyomlardan mantık kalkülümüzün çıkarım kuralı ile sonlu adımda çıkarılabilirse, tamdır denir. Biraz ileride bir yöntem özetleyeceğiz; bununla yalnızca şimdiye kadar bilinen (*Principia mathematica*, Kümeler Kuramı'nın aksiyom sistemleri ve Hilbert okulunun sistemleri gibi) matematiğin biçimsel sistemlerinin tam olmadığını kanıtlamakla kalmayıp, bunun ötesinde şu önermeyi de kanıtlayacağız: *Doğal sayıların aritmetiğini içeren hiçbir sonlu aksiyomlu biçimsel sistem tam değildir.* Aynısı sonsuz aksiyomlu sistemler için de geçerlidir, yeter ki aksiyomlar kuralı (dd. aksiyomların sonsuz kümesini kazandığımız kural (ileride açıklayacağımız anlamda)) kurgusal olsun[16]. Söz edilen koşulları sağlayan her biçimsel sistemde belirlenemez bir savı açıkça verebiliriz ve bu biçimde kurduğumuz savlar doğal sayıların aritmetiğine ilişkindir. Burada *aritmetiğe* ilişkin kavram ve teoremlerden anladığımız, yalnızca toplama ve çarpma kavramları ve ("değil", "veya", "ve", "her" ve "vardır") mantıksal işlemcileriyle oluşturduğumuz ifadelerdir; elbette "her" ve "var" doğal sayılara uygulanacaktır.

[16] Aksiyomlar kuralı her n doğal sayısına bir aksiyom karşılık getiren bir kural olarak düşünülebilir. Eğer bu kural, verilen her n doğal sayısı için ona karşılık gelen aksiyomu gerçekten yazdırabilen bir yöntem veriyorsa, kural en genel anlamıyla kurgusaldır (kurucudur veya yapıcıdır) denir. Yukarıdaki cümlede esas alınan "kurucu" kavramı yazılana göre daha dardır; ancak ilk anlama göre kurucu, diğerine göre kurucu olmayan bir kural bilinmemektedir.

Bu sonucu veren kanıt yöntemi şöyle işler: Verilen sistemin (elbette sayılabilir çoklukta olan) formülleri keyfi bir biçimde numaralandırılır; ancak bu sıralama sabit tutulur. Böylece formüllere ilişkin her kavrama (her sözeden kavrama) doğal sayılara ilişkin bir kavram karşılık getirilir, örneğin "a formülü b formülünden çıkarım kurallarıyla çıkarılabilir" sözeden bağıntısına doğal sayılara ilişkin R bağıntısı şöyle karşılık getirilir: m ve n sayıları arasında R bağıntısı ancak ve ancak m sayılı formül n sayılı formülden çıkarılabiliyorsa geçerlidir. "Kanıtlanabilir formül" kavramına ise kanıtlanabilir formüllerin numaralarının sınıfı karşılık gelir vs . Şimdi (ayrıntılı bir incelemenin gösterdiği gibi), sözeden matematik üzerinden dolambaçlı bir yoldan açıklanan, sayılara ilişkin bağıntılar (benzer biçimde sayı sınıfları), özünde aritmetikteki bağıntılardan ve sınıflardan (örneğin "asal sayılar" veya "bölünebilir" vs.) hiçbir biçimde ayırt edilemezler, bilakis sözeden kavramlara gidip dolanmadan doğrudan tanımlarla bunlara dayandırılabilirler; dd. daha doğru olarak: Bu bağıntılar yukarıda netleştirilen anlamda aritmetiktirler. Bu durum, sözeden kavramların önünde sonunda, uygun bir karşılık getirmede ilişkilendirilen sayılara doğrudan yansıyan, formüllerin bazı kombinatorik ilişkilerine dayanmasından kaynaklanır.

Şimdi verilen sistemdeki tek serbest değişkenli önerme fonksiyonlarını[17] alalım ve bunları

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x), \cdots \tag{5.4}$$

olarak bir biçimde sıralayalım. Doğal sayılarda bir K sınıfını

$$n \in K \equiv\sim \operatorname{Bew} \varphi_n(n)$$

olarak tanımlayalım[18]; burada $\operatorname{Bew} x$ şu anlama gelecektir: x kanıtlanabilir bir formüldür. K sınıfı ("kanıtlanabilir", "önerme fonksiyonu" vs. gibi) sözeden kavramlar üzerinden tanımlanmıştır. Ancak bu dolambaçtan, yukarıda belirttiğimiz gibi sakınılabilir, dd. K ile kaplamları aynı olan (yukarıdaki anlamda) bir aritmetik sınıf verilebilir. Bunun böyle olduğu izleyen irdelemelerimizin püf noktasıdır ve doğaldır ki ayrıntılı biçimde kanıtlanmalıdır; biz burada buna girmeyeceğiz. S sisteminin aritmetiği içerdiğini varsaydığımızdan, S'de ve dolayısıyla (5.4) dizisinde K ile kaplam eşit bir $\varphi_k(x)$ önerme fonksiyonu vardır,

[17] Kastedilen $\mathcal{K}_a$ kuramının tek serbest değişkenli formülleridir (yn).

[18] Bu tanım elbette Cantor'un köşegen yöntemini çağırıştırır (yn).

ve elbette

$$\varphi_k(n) \equiv\sim \mathrm{Bew}\,\varphi_n(n) \tag{5.5}$$

ve n yerine k koyarsak

$$\varphi_k(k) \equiv\sim \mathrm{Bew}\,\varphi_k(k) \tag{5.6}$$

elde ederiz. (5.6)'dan dolayı ne $\varphi_k(k)$ kanıtlanabilir ne de $\sim \varphi_k(k)$, çünkü $\varphi_k(k)$'yi kanıtlanabilir varsayarsak $\varphi_k(k)$ doğru olacağından (5.6)'dan kanıtlanamayacağını elde ederdik. Tersine $\sim \varphi_k(k)$'yi kanıtlanabilir varsayarsak $\sim \varphi_k(k)$ doğrudur ve (5.6)'dan $\varphi_k(k)$ kanıtlanabilir olur ki bu da varsayımla çelişir[19]. Kanıtta sessizce S'de kanıtlanan her savın doğru olduğunu varsaydık. Yakından bakılırsa bu varsayımın kendinden daha zayıf, biçimsel sistemin çelişkisizliğinden az biraz fazla bir varsayımla değiştirilebileceği görülür.

Az önce özetlediğimiz yöntem yukarıda belirtilen koşulları sağlayan her sistem için bu sistemde belirlenemez (bilinemez) bir sav verir. Bu sav asla mutlak anlamda belirlenemez değildir; bu savın belirli olduğu daha yüksek sistemlere geçilebilir (doğaldır ki bu kez bu sistemde başka savlar belirlenemez kalacaklardır). Özellikle analiz sayılar teorisinden, Kümeler Kuramı ise analizden daha yüksektir. Buradan örneğin sayılar teorisinin ancak analiz veya Kümeler Kuramı yöntemleriyle çözülebilen problemlerinin varlığı çıkar.

Yukarıdaki incelemelerden ayrıca çelişkisizlik kanıtlarına ilişkin bir sonuç çıkar. Bir sistemin çelişkisiz olduğu savı bir sözeden savdır ve dolayısıyla yukarıdaki yöntemle yerine bir aritmetik (dolayısıyla sistemde ifade edilebilen) sav alabiliriz. Bu savın ise (yukarıdaki koşullar altında) çelişkisizliği kanıtlanmak istenen sistemde kanıtlanamaz olduğu görülüyor. Dd bir biçimsel sistemin çelişkisizliği (yukarıda belirtilen koşullarda) bu sistemde formalize edilen çıkarım türlerinin daha azıyla (veya tamamıyla) gösterilemez, bunun için daima sistemi aşan yeni çıkarım türlerine gereksinim vardır ([26], s. 30)."

"Bu çıkarımın Richard açmazı ile benzerliği hemen göze çarpar; ayrıca yalancı açmazıyla[20] bir akrabalığı vardır. Gerçekten de $\varphi_k(k)$ savı $\varphi_k(k)$'nin kanıtlanamaz olduğunu söyler[21]. Önü-

[19] $\varphi_k(k)$ kanıtlanabilirse doğru olur ki bu $\sim \varphi_k(k)$'nin doğru olmasıyla çelişir [y.n.].

[20] Her epistemolojik açmaz, belirlenemez bir savın varlığının benzer bir kanıtı için kullanılabilir.

[21] Bu çalışmada $\varphi_k(k)$ yerine $[R(q), q]$ gösterimi kullanılmıştır.

> müzde kendisinin kanıtlanamaz olduğunu söyleyen bir sav vardır. Böyle bir sav görünüşün aksine hiçbir döngüsellik içermez, çünkü o her şeyden önce tümüyle belirli bir formülün (sıralamada k. formülde belli bir yerine koymayla elde edilen formülün) kanıtlanamazlığını ileri sürer. Ancak bundan sonra (bir anlamda rastlantıyla) bu formül tam da kendi kanıtlanamazlığını söyleyen savın formülü olarak karşımıza çıkar ([24], s. 148)."[22]

Not 5.1.3 Gödel'in bu anlatımını kitabımızın diline çevirip (5.1.2) ile birebir örtüştüğünü ve Cantor Köşegen Lemması'nın işe nasıl karıştığını görelim. Biz doğal sayılarımıza sıfırı da kattığımızdan $\Phi_s^1(L_a)$ kümesini (5.4) yerine

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$$

olarak sıralayalım. Gödel'in S sitemi bizim $\mathcal{K}_a$ kuramımızdır. Gödel bir aritmetik sınıftan bir $\varphi \in \Phi_s^1(L_a)$ ile tanımlanabilen $\{n \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{N} \models \varphi(\underline{n})\}$ tipindeki aritmetik kümeleri anlamaktadır. $U, V \subseteq \mathbb{N}^2$ bağıntılarını (5.3)'te olduğu gibi açıklayalım. $U_m := \{n \mid \mathfrak{N} \models \varphi_m(\underline{n})\}$ kesiti tam da φ_m formülünün tanımladığı aritmetik sınıftır. Dolayısıyla tüm aritmetik sınıfların ailesi $\{U_m\}_{m\in\mathbb{N}}$'dir. Gödel'in anlatımındaki K kümesi tam da V bağıntısının köşegen karşıtı olan D_V^c kümesidir. $K = D_V^c$ kümesi V'nin her V_m dikey kesitinden farklıdır, ancak U'nun bir U_k dikey kesitine eşit olabilir, dd. $K = Q_k$ yani her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{K}_a \nvdash \varphi_n(\underline{n}) \Longleftrightarrow n \in K \Longleftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi_k(\underline{n}) \tag{5.7}$$

olabilir ve Gödel "Bunun böyle olduğu izleyen irdelemelerimizin püf noktasıdır ve doğaldır ki ayrıntılı biçimde kanıtlanmalıdır; biz burada buna girmeyeceğiz." demektedir. (5.7)'de $n = k$ alırsak

$$\mathcal{K}_a \nvdash \varphi_k(\underline{k}) \Longleftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi_k(\underline{k}) \tag{5.8}$$

elde ederiz. (5.5)'te söylenen (5.7)'den başkası değildir. (5.6) ise (5.8)'dir. ▲

5.2 Algoritmalar

Hilbert 10. probleminde Diophant denklemlerinin tam sayılarda bir çözümü olup olmadığını sonlu sayıda işlemle belirleyen bir yöntem istemektedir. Sezgisel olarak dile getirilen bu isteğin netleştirilmesi 1930'lu yıllarda, özellikle Gödel, Turing, Church gibi matematikçilerin çalışmalarıyla olmuştur.

[22] Fazla uzun olan bu alıntının orijinalini vermiyoruz.

Hepimiz ilkokulda $m, n \in \mathbb{N}$ doğal sayıları verildiğinde $m+n,\ mn$ doğal sayılarını ve $n \neq 0$ ise m/n ve tek olarak belirli $q, r \in \mathbb{N}$ doğal sayılarını $m = qn + r,\ 0 \leq r < n$ olacak biçimde bulmayı, dd. kalanlı bölmeyi öğrenmişizdir. Her bir $mn =?,\ m + n =?,\ m/n =?$ sorusunu yanıtlamak için bize birer *yanıtlama yöntemi* verilmiştir. Her bir yöntem *sonlu sayıda yönerge* (veya *komuttan*) oluşur; her bir komut *sonlu sözcükten* oluşur ve *sonlu zamanda* yerine getirilir. Toplama, çarpma, kalanlı bölme yanıtlamalarını *sonlu zamanda* tamamlarız. Ancak $m/n =?$ sorusunun yanıtı bazen sonlu zamanda tamamlanırken, bazen sürer gider. Benzeri durum, okulda öğrendiğimiz $\sqrt{m}$ karekök bulma yönteminde de karşımıza çıkar. Yönergelere uymak çok zeki olmayı ve çok özel yetenekleri gerektirmez; bu işlemleri artık makinalara yaptırabiliyoruz. Yine $m < n$ olup olmadığını yanıtlama yöntemini de öğretiriz. Elbette bu kez $m < n$? sorusunun yanıtı sayısal değildir; "evet" veya "hayır" dır. Bu yanıtlama yöntemi de sonlu yönergelerden oluşur, özel yetenekler gerektirmez, dd. kolayca bir makinaya yaptırılabilir ve yanıta sonlu zamanda ulaşılır. Bu kez öğrencimize $p \in \mathbb{N}$ ve $1 < p$ olmak üzere

$$p \text{ asal mıdır?}$$

sorusunu yöneltebiliriz. Her bir $p > 1$ doğal sayısı için beklediğimiz yanıt "evet" veya "hayır" dır, yanıtımız sayısal değildir. Bu sorular için de elimizde bir **yanıtlama yöntemi** (kısaca bir **yanıtlama**) veya bir **algoritma** vardır. Bu kez kalanlı bölme yönergeleri ve $m < n$? sorusunu yanıtlama yönergelerine ekleyeceğimiz bir tek yeni yönergemiz vardır: "Her bir $1 < k < p$ için p/k kalanlı bölmesini bul, kalan her defasında sıfırdan farklı ise p asaldır, aksi durumda asal değildir". Elbette her bir $p > 1$ doğal sayısının asal olup olmadığını sonlu zaman içerisinde yanıtlayabiliriz ve bu işi bir makinaya yaptırabileceğimiz de apaçıktır.

Son bir not olarak $\sqrt{m}$ ve m/n için öğrendiğimiz hesaplamaların yukarıdaki anlamda bir yanıtlama olmadığını görürüz. Çünkü bazı girdilerde işlem sürer gider. Bu tür yanıtlamalar biraz ileride açıklayacağımız *yarı yanıtlama* veya *yarı hesaplamaların* örnekleridirler.

Şimdi bir $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramı ve $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \operatorname{Fm} L$ sonlu dizisi için bu dizinin $\mathcal{K}$ kuramında bir bkanıt olup olmadığını soralım. Belli koşullar altında bu soru sınıfı içinde bir yanıtlamamız olduğunu biraz ileride öğreneceğiz.

Yukarıdakileri özetlersek bize bir takım soru kümeleri, örneğin

$$\{m + n =? \mid m, n \in \mathbb{N}\},\ \{mn =? \mid m, n \in \mathbb{N}\}$$
$$\{m/n =? \mid m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\},\ \{p \text{ asal mı?} \mid 1 < p \in \mathbb{N}\}$$
$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n \text{ dizisi } \mathcal{K}\text{'de bir bkanıt mı?} \mid \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \operatorname{Fm} L\}$$

verilmiştir. Her bir soru kümesi için elimizde bir yanıtlama yöntemimiz var, son soru sınıfı için L dilimiz ve Γ aksiyomlar kümemiz ileride açıklayacağımız anlamda belirlenebilir olmalıdır.

Bu örneklere yakından bakalım. Bazı soru sınıflarımızın yanıtı sayısalken bazı soru sınıflarımızın yanıtlarının sözel olduğunu gördük. Bu görünürde bir ayrılıktır; aslında doğal sayılarımızı ondalık tabanına göre yazdığımızda doğal sayılarımız $N := \{0, 1, \ldots, 9\}$ abecesinin sözcükleridirler. Dolayısıyla $+, \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonlarına $N^* := \mathrm{Sz}\, N$ olmak üzere $+, \cdot : N^* \times N^* \to N^*$ fonksiyonları olarak bakabiliriz.

Tersine A abecesi sayılabilir ve öğeleri algoritmik biçimde

$$a_0, a_1, a_2, \ldots$$

olarak listelenmişse—bu bizi ilgilendiren $\mathcal{K}$ kuramlarının dilleri için geçerlidir—birebir $\varphi : A^* \to \mathbb{N}$ fonksiyonları ile sözcüklerimizi doğal sayılarla o şekilde kodlayabiliriz ki

$$n \in \mathbb{N} \text{ bir } w \in A^* \text{ sözcüğünün kodu mudur? Evet ise hangi } w\text{'nin?}$$

sorularını her zaman yanıtlayabiliriz; bunu ileride göreceğiz. $B \subseteq A^*$ olmak üzere $g : B^n \to A^*$ fonksiyonlarının incelenmesini $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ fonksiyonlarının incelenmesine dönüştürürüz. Demek ki $\mathbb{N}^n$'lerdeki bağıntılarla, tanım kümeleri $\mathbb{N}^n$ uzaylarında olan $\mathbb{N}$-değerli fonksiyonları incelemek yeterli olacaktır.

Algoritma, hesaplama yöntemi, etkin işlem, yanıtlama yöntemi veya kısaca **yanıtlama** sözcükleri eş anlamlı olarak kullanılmaktadırlar. Biz ise algoritma ve yanıtlama sözcüklerini kullanmayı yeğleyeceğiz[23]. Yukarıdaki örnekler ışığında bir yanıtlamadan beklentilerimizi şöyle özetleyebiliriz:

- Bir yanıtlamanın nasıl yapılacağına ilişkin net olarak verilmiş yönergeler (komutlar, dd. bir program) olmalıdır; yönergeler rastgelelik ve yaklaşımlar içermemelidirler. Yönergelerin sayısı ve her birinin uzunluğu sonlu olmalıdır; çünkü ne bir insana ne de bir makinaya sonsuz nesne verilemez. Ancak komutların uzunluklarına ve sayılarına bir üst sınır getirmiyoruz. Evrenimizdeki parçacık sayısı bizim için pratik bir üst sınır oluşturduğundan burada elbette soyut bir yöntemden, eğer makinalar söz konusuysa *sonsuz bellekli soyut makinalardan* söz ediyoruz.

- Sorular kişi veya makinaya net olarak sorulabilmelidir. Örneğin π sayısı bir girdi olamaz. Eğer girdiler kümelerse sonsuz öğeli bir küme

[23] Algoritma sözcüğü oldukça yerleşmiştir ve Harezmi'nin isminden gelir.

girdi olamaz! Makina girdiyi okuyabilmelidir. Bir nesnenin bu özeliğini de **sonlu** olması olarak belirtelim.

- Yönergeler insan veya makinadan çok özel yetenekler istememelidir, kabaca söylersek yönergeler mekanik olarak yerine getirilebilir olmalıdırlar.

- Her bir komut sonlu zamanda gerçekleştirilebilir olmalıdır; ancak burada da zamana bir üst sınır koymuyoruz. Sonlu zaman içinde ancak sonlu sayıda komut gerçekleştirilebilir olmalıdır. Örneğin soyut makinamızın önce komutlardan birini 1 saniyede, sonra bir diğerini 1/2 saniyede vs... gerçekleştirebilme, dolayısıyla 2 saniyede sonsuz komut gerçekleştirme yeteneği olmayacaktır. Yanıtlama sonlu adımda verilmelidir.

- Makina söz konusu olduğunda gerekli malzeme ve belleğe bir üst sınır koymuyoruz. Bir kez daha soyut makinaların söz konusu olduğunu belirtelim.

- **Uzlaşma**: Bundan sonra, yanıtlamaların söz konusu olduğu her incelemede tüm kümelerin öğelerinin sonlu olmasını isteyeceğiz; kabaca bu kümenin öğelerini yanıtlamalarda kullanacağımız makinalar okuyabilmelidir, bireyler bu kümenin öğelerini tam olarak yazabilmelidir. Bu asla söz konusu kümenin öğelerinin sonlu sayıda olması anlamına gelmez!

Belirtmekte yarar var: Soyut makinalarımızın özünde *ilkesel olarak hesaplama* vardır ve bu makinalar *hesaplanamazlığı güçlendirirler.* Bu makinaların hesaplayamadığını gerçek makinalar hiç hesaplayamazlar!

Elbette burada yanıtlamaların bir sezgisel anlatımı söz konusudur ve bir matematiksel tanım verilmiş değildir. Titiz olmak istenirse elbette yönergelerin neler olabileceği de matematiksel olarak netleştirilmelidir. Ancak biz bu anlatımla yetineceğiz.

Sezgisel yanıtlamaların sınıfını $\mathfrak{S}$ ile gösterelim. Elbette $\mathfrak{S}$ sınıfının matematiksel bir tanımını vermediğimiz için bu sınıfın kapsamı belli değildir. Bunun bir sonucu, bize verilen bir soru kümesi için bir $\mathcal{S} \in \mathfrak{S}$ yanıtlamasının olup olmadığı sorusu ancak pozitif yanıtlanabilir. Açarsak, soru kümesi için bir $\mathcal{S}$ yanıtlaması verebiliyorsak yanıt "evet" olacaktır. Ancak "soru kümesi için bir sezgisel yanıtlama yoktur" savını kanıtlama şansımız yoktur! Bunun için her bir $\mathcal{S} \in \mathfrak{S}$ yanıtlamasını matematiksel olarak belirlemiş olmamız gerekir ki bu söz konusu değildir!

Temelde iki farklı yaklaşım vardır. Net tanımlanmış ve kapsamı belli bir $\mathbf{AL} \subseteq \mathfrak{S}$ algoritmalar kümesinden yola çıkılır ve bir f fonksiyonunu

AL'deki bir algoritma ile hesaplayabiliyorsak bu fonksiyona **AL-hesaplanabilir** denir. Böyle bir **AL** Turing makinaları ile belirlenmişse **Turing hesaplanabilir**, eğer evrensel kayıt makinaları (bkz. s.450) ile belirlenmiş ise **URM**[24]**-hesaplanabilir** denir. İkinci yaklaşım ise makinaları hiç işe katmadan doğrudan sayılar kuramında kalıp bazı fonksiyonlar kümesini hesaplanabilir olarak açıklamaktır. Örneğin ikisi de 1936 yılında tanımlanan μ-**yinelgen fonksiyonlar** (Gödel-Kleene), λ-**tanımlanabilir fonksiyonlar** (Church). Gödel-Herbrand-Kleene, Post ve Markov'un başka yaklaşımları da vardır. Tüm bu yaklaşımların *aynı* fonksiyon kümesini tanımladıkları kanıtlanmıştır. Bütün bunlar, bir f fonksiyonuna $\mathfrak{S}$'deki bir algoritma ile hesaplanabiliyorsa **sezgisel hesaplanabilir** dersek, Church'ü aşağıdaki teze yöneltmiştir:

- **Church Tezi:** Sezgisel hesaplanabilir fonksiyonlar tamı tamına yukarıda bahsedilenlerden herhangi biri anlamında hesaplanabilir fonksiyonlardır.

Elbette bu bir tezdir, kanıtlanmış değildir ve kanıtlanamaz. Kesin bildiğimiz yalnızca

$$\{f \mid f \text{ } \mathbf{AL}\text{-hesaplanabilir}\} \subseteq \{f \mid f \text{ sezgisel hesaplanabilir}\}$$

olduğudur; $\mathfrak{S}$'nin kapsamını bilmediğimizden $\supseteq$ yönünü kanıtlama şansımız yoktur.

Yanıtlamalar sonlu abeceli bir dilde yazılacağından, her bir komut sonlu sözcükten ve her bir yanıtlama sonlu sayıda komuttan oluştuğundan aşağıdaki önerme aşikârdır:

Önerme 5.2.1 *Tüm yanıtlamalarımızın kümesi sayılabilirdir.*

Dolayısıyla fonksiyonlarımızın çoğu hesaplanamaz ve bağıntılarımızın çoğu belirlenemez.

Önünde sonunda biz tanım bölgeleri $\mathbb{N}^n$ uzaylarında olan $\mathbb{N}$-değerli fonksiyonlarla ve $R \subseteq \mathbb{N}^n$ bağıntılarıyla, özetle sayılar kuramının fonksiyon ve bağıntıları ile ilgileneceğiz. $X \subseteq \mathbb{N}^n$ ve $f : X \to \mathbb{N}$ için

$$G_f = \left\{(\overline{x_n}, y) \in \mathbb{N}^{n+1} \mid (\overline{x_n}) \in X \wedge f\,(\overline{x_n}) = y\right\}$$

olmak üzere aşağıdaki sezgisel anlatım ilerideki kesimlere kılavuzluk edecektir:

[24]Universal Register Machine, unbeschränkte Register Maschine.

- $A \subseteq X$ olsun. Her $x \in X$ için $x \in A$ ise "evet" ve $x \in X \backslash A$ ise "hayır" yanıtını veren bir algoritmamız varsa ve ancak bu durumda A **kümesi** X**'de belirlenebilir** denir.

- Eğer elimizde her $x \in X$ için ancak ve ancak $x \in A$ ise "evet" yanıtını veren bir yanıtlamamız varsa ve ancak bu durumda A **kümesi** X**'de yarı belirlenebilir** denir. $x \in X \backslash A$ için algoritmamız bir yanıt vermeden durmadan işlem yapar. Bu tür yanıtlamalara **yarı yanıtlama** veya **yarı hesaplama** denir. $x \notin X \backslash A$ durumunda yanıtlamanın " evet" dışında herhangi bir yanıt vermesine, hatta "hayır" bile demesine izin verilebilir; ancak bir koşulla: Yanıtlamanın " evet" dışındaki hiçbir çıktısına bir anlam yüklenmez. Demek ki yanıtlamanın $x \in X \backslash A$ durumunda "evet" diyerek yalan söylemesine izin vermiyor ve yalnızca "evet" çıktısına bir anlam yüklüyoruz.

- $f : X \to \mathbb{N}$ fonksiyonu verildiğinde $(\overline{x_n}) \in X$ için $f(\overline{x_n})$ değerinin hesaplanabilir olması $(\overline{x_n}, y) \in G_f$'nin belirlenebilir olması demektir. Tersine bize bir $R \subseteq \mathbb{N}^n$ bağıntısı verildiğinde $(\overline{x_n}) \in R$ olup olmadığının belirlenmesi ise $\chi_R : R \to \mathbb{N}$ fonksiyonunun hesaplanabilir olması demektir.

Birbiriyle kenetlenmiş kavram ikililerimiz olacaktır: belirlenebilirlik–hesaplanabilirlik ve yarı belirlenebilirlik–yarı hesaplanabilirlik. Biz matematiksel olarak net tanımını vereceğimiz *yinelgen* fonksiyonlardan yola çıkacağız. Bunlar hesaplanabilirlikleri apaçık başlangıç fonksiyonlarından yola çıkarak, hesaplanabilirliği koruyan üç işlemle kazanılan fonksiyonlar olacaktır. Sonra net tanımı verilen bir algoritmalar kümesi tanımlayacağız ve yinelgen fonksiyonlarımızın tamı tamına bu algoritmalarla hesaplanabilen fonksiyonlar olduğunu kanıtlayacağız. Ancak önce araya yarı matematiksel diyebileceğimiz bir kesim sıkıştıracağız.

5.3 Belirlenebilirlik ve Hesaplanabilirlik

Bu kesimde Church Tezi'ni doğru varsayıp yanıtlamalar için daha önce verdiğimiz sezgisel anlatımla yetineceğiz. Bu kesimin amacı ileride eksiksiz vereceğimiz ayrıntılı matematiksel ifadelerin altında yatan temel sezgisel düşünceleri vermektir. Bu kesimdeki tanım ve teoremler, algoritmalarımızın ne olacağı tam olarak matematiksel biçimde belirlenmedikçe matematiksel tanım ve teorem sayılamazlar. Kullanacağımız yanıtlamaların matematiksel tanımları verildiğinde bu kesimdeki tüm tanım ve teoremler kusursuz matematiksel tanım ve teoremlere dönüşürler.

Tanım 5.3.1 *$A \subseteq X$ olsun.*

1. *Her $x \in X$ için $x \in A$ ise "evet" ve $x \in X\backslash A$ ise "hayır" yanıtını veren bir algoritmamız varsa ve ancak bu durumda A* ***kümesi X'te belirlenebilir*** *denir.*
2. *Eğer elimizde her $x \in X$ için ancak ve ancak $x \in A$ ise "evet" yanıtını veren bir yanıtlamamız varsa ve ancak bu durumda A* ***kümesi X'te yarı belirlenebilir*** *denir. $x \in X\backslash A$ için algoritmamız bir yanıt vermeden durmadan işlem yapar*[25]*. Bu tür yanıtlamalara* ***yarı yanıtlama*** *veya* ***yarı hesaplama*** *denir.*
3. *$f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. $\{f(x) =? \mid x \in X\}$ soru kümesi için bir yanıtlamamız varsa ve ancak bu durumda f fonksiyonuna* ***hesaplanabilir*** *denir. Kısaca f hesaplanabilir $\Longleftrightarrow$ Her $x \in X$ için $f(x)$ değerini hesaplayan bir algoritma vardır.*

Not 5.3.2 X kümesi sonsuzsa $\mathcal{P}(X)$ güç kümesinin $\varkappa$ gücü için $\varkappa > \aleph_0$ olacağından X kümesinin çoğu altkümesi belirlenemez! Diğer yandan A için her yanıtlamanın A için bir yarı yanıtlama olduğu aşikârdır. ▲

Lemma 5.3.3 *$A \subseteq X$ olsun.*

1. *A kümesi X'te belirlenebilir $\Longleftrightarrow \chi_A : X \to \{0, 1\}$ hesaplanabilir.*
2. *A sonlu ise X'te belirlenebilir.*
3. *A kümesi X'te belirlenebilir $\Longleftrightarrow$ A ve $X\backslash A$ kümeleri X'te yarı belirlenebilir.*

Kanıt. 1. X kümesinde A'yı belirleyen bir yanıtlama "evet" yerine 1 ve "hayır" yerine 0 yazarak χ_A için bir hesaplamaya ve tersine χ_A için bir hesaplama 1 yerine "evet" ve 0 yerine "hayır" yazarak A kümesini X'te belirleyen bir yanıtlamaya dönüştürülür.

2. $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ise yanıtlama yalnızca $x \in X$ verildiğinde $x = a_1$ veya $\ldots$ veya $x = a_n$ olup olmadığına bakar. En az bir $1 \leq k \leq n$ için $x = a_k$ ise yanıtlama "evet", aksi durumda "hayır" der.

3. $\Longrightarrow$: $\mathcal{Y}$ yanıtlaması A kümesini X'te belirlesin. Tanım gereği $\mathcal{Y}$ yanıtlaması A kümesini X'de yarı belirler. $\mathcal{Y}^c$ yanıtlaması şöyle tanımlansın: $x \in X$ için $\mathcal{Y}$ yanıtlaması "evet" verdiğinde $\mathcal{Y}^c$ yanıtlaması "hayır" ve $\mathcal{Y}$ yanıtlaması "hayır" yanıtını verdiğinde $\mathcal{Y}^c$ bize "evet" yanıtını versin. Apaçıktır ki $\mathcal{Y}^c$ yanıtlaması $X\backslash A$ kümesini X'te belirler, dolayısıyla yarı belirler.

[25] $x \notin X\backslash A$ durumunda yanıtlamanın "evet" dışında herhangi bir yanıt vermesine, hatta " hayır" bile demesine izin verilebilir; ancak bir koşulla: Yanıtlamanın "evet" dışındaki hiçbir çıktısına bir anlam yüklenmez. Demek ki yanıtlamanın $x \in X\backslash A$ durumunda " evet" diyerek yalan söylemesine izin vermiyor ve yalnızca "evet" çıktısına bir anlam yüklüyoruz.

$\Longleftarrow$: $\mathcal{Y}_1$ ve $\mathcal{Y}_2$ yanıtlamaları sırası ile A ve $X\backslash A$ kümelerini X'te yarı belirlesinler. Bir $\mathcal{Y}$ yanıtlamasını şöyle tanımlıyoruz: Önce $\mathcal{Y}_1$ bir dakika çalıştırılır; "evet" yanıtı alınırsa $\mathcal{Y}$ de "evet" der. "Evet" yanıtı alınmamışsa $\mathcal{Y}_2$ bir dakika çalıştırılır, "evet" yanıtı alınırsa $\mathcal{Y}$ "hayır" der. "Evet" yanıtı alınmamışsa $\mathcal{Y}_1$ iki dakika çalıştırılır ve süreler uzatılarak böyle devam edilir. Er veya geç ya $\mathcal{Y}_1$ ya da $\mathcal{Y}_2$ "evet" der, ilk durumda $\mathcal{Y}$ "evet" ikinci durumda "hayır" desin. $\mathcal{Y}$ yanıtlaması A kümesini X'te belirler. ■

Tanım 5.3.4 *$A \subseteq X$ kümesi **algoritmik sayılabilir**veya **etkin sayılabilir** veya **yinelgen sayılabilir**:$\Longleftrightarrow$ $X = \emptyset$ veya elimizde her $n \in \mathbb{N}$ girdisi için bir $a_n \in A$ çıktısını $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ olacak biçimde veren bir algoritma vardır.*

Algoritmamız A kümesinin öğelerini

$$a_0, a_1, a_2, \ldots$$

olarak listeler. Bu liste elbette tamamlanmaz, oluşum halindedir; böyle bir listeye **algoritmik** (veya **etkin**) **liste** diyelim. Verilen herhangi bir $a \in A$ öğesi er veya geç bir a_n olarak karşımıza çıkar. Diğer yandan A kümesinin öğelerinin bu listede yalnız bir kere geçmesi gibi bir koşulumuz yoktur. Bir a öğesi bu listede birden fazla, hatta sonsuz kez bile geçebilir.

Teorem 5.3.5 *$A \subseteq X$ olsun. Bu durumda:*

1. *$A \subseteq X$ algoritmik sayılabilirse A kümesi X'te yarı belirlenebilir.*
2. *X algoritmik sayılabilirse A kümesinin X'te yarı belirlenebilir olması için gerek ve yeter koşul A'nın algoritmik sayılabilir olmasıdır.*
3. *$A \neq \emptyset$ kümesinin algoritmik sayılabilmesi için gerek ve yeter koşul hesaplanabilir bir $f : \mathbb{N} \to X$ ile $A = \operatorname{Im} f$ olmasıdır.*

Kanıt. 1. A algoritmik sayılabilir olsun. $\mathcal{Y}$ yarı yanıtlamasını şöyle tanımlayalım: $x \in X$ keyfi verilsin. $\mathcal{Y}$, A için oluşturulmakta olan $a_0, a_1, a_2, \ldots$ listesini izler; x girdisi verildiğinde buna bu listede rastlarsa "evet" yanıtını verir. $\mathcal{Y}$ ancak $x \in A$ ise "evet" yanıtını er veya geç verir, $x \notin A$ ise hiç durmadan listeyi izler durur. Böylece A yarı belirlenebilir.

2. Savın bir yönünü teoremin birinci kısmında kanıtladık. Şimdi $A \neq \emptyset$ ve A kümesi X kümesinde yarı belirlenebilir ve $\mathcal{Y}$ ise A için X'de bir yarı belirleme algoritması olsun. A için bir algoritmik liste şöyle oluşturulur: X kümesi $x_0, x_1, x_2, \ldots$ olarak algoritmik listelenmeye başlanır ve buna paralel olarak $\mathcal{Y}$ şöyle çalıştırılır; $\mathcal{Y}$ önce x_0 girdisi ile 1 adım çalıştırılır, sonra $\mathcal{Y}$ sırasıyla x_0 ve x_1 girdileri için ikişer adım çalıştırılır, sonra $\mathcal{Y}$ her bir x_0, x_1, x_2 girdileri için üçer adım çalıştırılır ve böyle devam edilir. Ne zaman bir x_i

için $\mathcal{Y}$ algoritması "evet" yanıtını verirse bu x_i öğesi A için oluşturulan listeye alınır. Yeni listeye yalnızca A kümesinin öğelerinin alınacağı apaçıktır. Diğer yandan her $x \in X$ girdisi için $\mathcal{Y}$ algoritması her $n \in \mathbb{N}^*$ için n adım çalışacağından her $x \in A$ öğesi er veya geç yeni listede yer alır. Her "evet" ile karşılaştığımızda girdiyi listeye aldığımızdan her bir $a \in A$ öğesi listede tekrar tekrar karşımıza çıkacaktır. Bu kanıttaki "adım" sözcüğünü "dakika" sözcüğü ile de değiştirebilirsiniz.

3. A kümesini etkin sıralayan bir $\mathcal{Y}$ algoritması $\operatorname{Im} f = A$ olan ve $\mathcal{Y}$ algoritmasının hesapladığı bir $f : \mathbb{N} \to X$ hesaplanabilir fonksiyonu tanımlar. Tersine $\operatorname{Im} f = A$ olacak biçimde hesaplanabilir $f : \mathbb{N} \to X$ verilmişse, f fonksiyonunu hesaplayan algoritma A için bir algoritmik liste oluşturur. ■

Önerme 5.3.6 *$f : X \to Y$ hesaplanabilir bir fonksiyon ve $V \subseteq Y$ için $U = f^{-1}(V)$ olsun. Bu durumda*

1. *V kümesi Y'de belirlenebilirse U kümesi X'te belirlenebilir.*
2. *X ve V algoritmik sayılabilirse U'da algoritmik sayılabilir.*

Kanıt.1. $\mathcal{B}$ algoritması V kümesini Y'de belirlesin. U kümesini X kümesinde belirleyen bir algoritma şöyle tanımlanır. $x \in X$ keyfi verildiğinde $f(x)$ hesaplanır. $\mathcal{B}$ algoritması $f(x) \in V$? sorusuna ne yanıtı verirse $\mathcal{A}$ algoritması $x \in U$? sorusuna aynı yanıtı versin.

2. U kümesinin bir algoritmik listesi örneğin şöyle oluşturulur: Önce $f(x_0)$ hesaplanır ve $f(x_0)$ öğesinin v_0 olup olmadığına bakılır. $f(x_0) = v_0$ ise yeni liste x_0 ile başlatılır. Aksi halde $f(x_1)$ hesaplanır ve sırasıyla $f(x_0)$ ve $f(x_1)$ öğelerinin $\{v_0, v_1\}$'de olup olmadığına bakılır. Yanıt evet ise ilgili x_k listeye eklenir. Arama sırasında daha önce listeye alınanları devre dışı bırakarak aramayı yalınlaştırabiliriz. Böylece er geç her $u \in U$ öğesi yeni listede karşımıza çıkar. ■

(5.3.5)(2)'de eğer A belirlenebilirse A kümesini algoritmik saymak daha da kolaylaşır: $\mathcal{Y}$ ile $x \in X$ için $x \in A$? soruları için bir yanıtlamayı gösterelim. $\mathcal{Y}$ oluşum halindeki $x_0, x_1, \ldots$ listesindeki x_i öğelerini sırasıyla tarar ve "evet" yanıtını aldıklarında A için yeni bir algoritmik liste oluşturur. A kümesinin sonlu olması durumunda, tanım gereği algoritmik liste sonsuz uzunlukta olacağından, A için sonlu liste tamamlandıktan sonra x_i öğelerinin taraması durdurulup, oluşan liste tekrar tekrar kendi ardına sıralanıp durur.

Önerme 5.3.7 *A abecesi $a_0, a_1, a_2, \ldots$ olarak algoritmik sayılabiliyorsa $A^* = \operatorname{Sz} A$ sözcükleri algoritmik sayılabilir.*

Kanıt. A^* kümesini şu şekilde algoritmik sayabiliriz: Listemiz boş sözcükle başlar, sonra a_0 harfinden oluşan sözcük alınır, ardından yalnızca a_0, a_1 harflerini içeren ve uzunluğu ≤ 2 olan sözcükler herhangi bir biçimde, örneğin sözlüksel olarak listelenir; ardından yalnızca a_0, a_1, a_2 harflerini kullanan ve uzunluğu ≤ 3 olan sözcükler listelenir ve bu şekilde devam edilir. Bu yöntemle her s sözcüğü sonlu adım sonunda listeye alınır. ■

Kanıttaki listelemede her sözcük listede karşımıza sonsuz kez çıkar. Örneğin yöntemimizle listemizin başı şöyledir

$$\emptyset, a_0, \emptyset, a_0, a_1, a_0a_0, a_0a_1, a_1a_0, a_1a_1, \emptyset, a_0, \ldots \tag{5.9}$$

(5.9) listesinden istenirse daha önceden listeye alınmış olan sözcükleri yeniden listeye almayarak her sözcüğün bir kere karşımıza çıktığı algoritmik bir liste de oluşturulabilir; böyle bir listelemenin başı örneğin

$$\emptyset, a_0, a_1, a_0a_0, a_0a_1, a_1a_0, a_1a_1, \ldots \tag{5.10}$$

gibidir.

Sayılabilir dillere biraz yakından bakalım. Matematiksel yapıların dilleri genelde sonlu sayıda bağıntı, fonksiyon ve sabit imleri içerirler. $\mathcal{V}$ değişkenler kümesi ise $v_0, v_1, v_2, \ldots$ gibi algoritmik sayılabilir olarak alınır. L dili sonlu ve $L = \{l_0, l_1, \ldots, l_n\}$ ise A abecesi

$$\neg,\ \rightarrow,\ \dot{\forall},\ ),\ (,\ ,\ ,\ l_0,\ \ldots,\ l_n,\ \ v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots \tag{5.11}$$

olarak algoritmik listelenebilir[26]. Bu liste kolayca sonlu

$$\neg,\ \rightarrow,\ \dot{\forall},\ ),\ (,\ ,\ ,\ l,\ v,\ 0,\ 1,\ \ldots, 9 \tag{5.12}$$

abecesinin sözcüklerine dönüştürülebilir. $N = \{0, 1, \ldots, 9\}$ abecesinin harfleri $0, 1, \ldots, 9$ olarak sıralanmak üzere bu abece ile oluşturulan (5.10) algoritmik listesinden $\emptyset$ sözcüğünü ve uzunluğu ≥ 2 olan sözcüklerden ilk harfi 0 olanları atarak doğal sayılar

$$0, 1, \ldots, 9, 10, 11, \ldots, 19, 20, 21, \ldots$$

olarak algoritmik sayılabilir; bu sözlüksel sıralama doğal sayılarımızın okulda öğrendiğimiz sayı olarak doğal sıralamasıyla örtüşür. Yapılacak tek şey l_n ve v_n yerine ln ve vn yazmaktır; bunlar ise (5.12) abecesinin sözcükleridirler.

[26] (5.11) listesinde (ayracından sonra gelen üç virgülden ortadaki A abecesine aittir, diğerleri listenin öğelerini ayırırlar.

$\mathcal{V}_\bullet = \{v_0, v_1, \ldots\}$, $\mathcal{F}_\bullet = \{f_m^n \,|\, n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}\}$, $\mathcal{R}_\bullet = \{R_m^n \,|\, n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}\}$ ve $\mathcal{C} = \{c_0, c_1, \ldots\}$ ve $\mathbf{L}_\bullet = \mathcal{R}_\bullet \sqcup \mathcal{F}_\bullet \sqcup \mathcal{C}_\bullet$ olmak üzere herhangi sayılabilir bir L dilini $L \subseteq \mathbf{L}_\bullet$ olarak düşünebiliriz[27]. $\mathbf{L}_\bullet$ dilinin tüm terim ve formüllerinin aslında (5.12) abecesinden daha kısa olan

$$\neg,\ \to,\ \dot{\forall},\ \doteq,\ v,\ f,\ R,\ c,\ \#,\ |,\ ),\ (,\ , \tag{5.13}$$

gibi 13 harflik bir abece ile ifade edilebileceğini belirtelim. Bunun için bu sonlu abecede v_n değişkenlerini, c_n sabitlerini, n değişkenli f_m^n fonksiyonlarını ve n basamaklı R_m^n bağıntılarını tek olarak nasıl ifade edeceğimizi söylemek yeterlidir.

$$\begin{aligned}
&v_0 \leftrightsquigarrow v,\ v_1 \leftrightsquigarrow v|,\ v_2 \leftrightsquigarrow v||, v_3 \leftrightsquigarrow v|||, \ldots\\
&c_0 \leftrightsquigarrow c,\ c_1 \leftrightsquigarrow c|,\ c_2 \leftrightsquigarrow c||, c_3 \leftrightsquigarrow c|||, \ldots\\
&f_0^n \leftrightsquigarrow f\#\cdots\# \text{ , } n \text{ tane } \# \text{ ve } n \geq 1\\
&f_m^n \leftrightsquigarrow f\#\cdots\#|\cdots| \text{ , } n \text{ tane } \#,\ m \text{ tane } |,\ n \geq 1,\ m \geq 1\\
&R_0^n \leftrightsquigarrow R\#\cdots\# \text{ , } n \text{ tane } \# \text{ ve } n \geq 1\\
&R_m^n \leftrightsquigarrow R\#\cdots\#|\cdots| \text{ , } n \text{ tane } \#,\ m \text{ tane } |,\ n \geq 1,\ m \geq 1.
\end{aligned}$$

Demek ki birinci dereceden herhangi bir sayılabilir L dilinin sözcükleri, dolayısıyla terimleri ve formülleri bu 13 harflik sonlu dille de ifade edilebilirler. (5.13) abecesi sonlu harften oluşur ve her bir harfi sonludur. Eğer L dili sonlu sayıda sabit, fonksiyon ve bağıntı imleri içeriyorsa ve $L = \{l_0, l_1, \ldots, l_n\}$ ise (5.13) yerine

$$\neg,\ \to,\ \dot{\forall},\ \doteq,\ ),\ (,\ ,\ ,\ v,\ |,\ l_0,\ l_1,\ \ldots, l_n$$

abecesi ile çalışmak daha uygundur. Ancak herhangi bir sayılabilir dilin terimleri, formülleri (5.13)'teki her biri sonlu olan sonlu sayıdaki harfle yazılabilir olduğundan, bu harflerden oluşan abeceye odaklanacağız.

Tanım 5.3.8 $Z := \{\neg,\ \to,\ \dot{\forall},\ \doteq,\ v,\ f,\ R,\ c,\ \#,\ |,\ ),\ (,\ ,\}$[28].

Z sonlu olduğundan (5.3.7)'den dolayı $Z^* = \operatorname{Sz} Z$ algoritmik sayılabilir. Z abecesinin öğeleri sonlu öğe olduklarından Z^* kümesinin öğeleri de sonlu olur. L herhangi bir sayılabilir dil olmak üzere $L \subseteq \mathbf{L}_\bullet \subseteq Z^*$ seçtiğimizden L dillerimizin öğelerinin de sonlu olmasını garantilemiş oluyoruz.

[27] $x, y, z, x_0, x_1, \ldots, y_0, y_1, \ldots, z_0, z_1, \ldots$ gibi değişkenleri, karışıklığa yol açmadan $\mathcal{V}$ için sözeden değişkenler olarak kullanabilmek istediğimizden $\mathcal{V}$ kümesinin öğelerini v_i olarak göstermeyi yeğledik.

[28] $\{\}$ içindeki son virgül bir harf, diğer virgüller değil!

Uzlaşma: Biz bundan sonra sürekli $W \subseteq Z^*$ kümeleriyle ilgileneceğimiz için "Z^*'da belirli" veya "Z^*'da yarı belirli" yerine kısaca "belirli" veya "yarı belirli" diyeceğiz.

Bu genel irdelemelerden sonra bizi ilgilendiren özel duruma gelelim. Biz birinci dereceden bir $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramı verildiğinde şu temel soru sınıflarıyla ilgileniyoruz:

1. $\{\varphi \in \mathrm{Bc}\,\Gamma? \mid \varphi \in \mathrm{Fm}\,L\}$.
2. $\{\sigma \in \mathrm{Bt}\,\Gamma? \mid \sigma \in \mathrm{Sav}\,L\}$.
3. $\mathrm{Bc}\,\Gamma$ veya $\mathrm{Bt}\,\Gamma$ algoritmik numaralanabilir mi?

Bu soru sınıfları için birer yanıtlama bulabileceksek, bunun ön koşulu her şeyden önce $\mathrm{Fm}\,L$ kümesinin belirlenebilir olmasıdır. Bunun için ise bir yandan L dili sayılabilir olmalı, diğer yandan ise $L = \mathcal{R} \sqcup \mathcal{F} \sqcup \mathcal{C}$ olmak üzere $\mathcal{R}, \mathcal{F}$ ve $\mathcal{C}$ kümeleri belirlenebilir olmalıdır.

Şimdi bir $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramı ve $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathrm{Fm}\,L$ sonlu dizileri için bu dizinin $\mathcal{K}$ kuramında bir bkanıt olup olmadığını soralım. Böyle bir soruyu yanıtlayabilmenin asgari koşulu herhangi bir $\varphi \in \mathrm{Fm}\,L$ için $\varphi \in \Gamma$ olup olmadığını yanıtlayabilmektir. φ formülünün bir mantık aksiyomu olup olmadığını yanıtlayabilmek için asgari düzeyde görsel yetenek yeterlidir, bir makinaya da yaptırabiliriz. Böylece asgari koşulumuz φ formülünün bir öz aksiyom olup olmadığını belirlemeye dönüşür.

Tanım 5.3.9 *Bir $L = \mathcal{R} \sqcup \mathcal{F} \sqcup \mathcal{C} \subseteq Z^*$ diline $\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C}$ ve $\mathcal{V}$ belirlenebilirse L'ye bir **uz dil** diyeceğiz.*

Sonlu diller uzdur. Her uz dil algoritmik sayılabilirdir.

Uzlaşma: Bundan sonra ayrıca belirtmesek de tüm L dillerimiz uz olacaklardır.

Önerme 5.3.10 *L herhangi bir uz dil olmak üzere:*

(1) L dilinin sözcükleri algoritmik sayılabilir.

(2) $\mathrm{Tm}\,L$, $\mathrm{Sav}\,L$ ve $\mathrm{Fm}\,L$ belirlenebilirler.

(3) $\{x \in \mathrm{Sb}\,\varphi? \mid x \in \mathcal{V},\ \varphi \in \mathrm{Fm}\,L\}$ soru sınıfı yanıtlanabilir.

(4) $t \in \mathrm{Tm}\,L$, $x \in \mathcal{V}$ ve $\varphi \in \mathrm{Fm}\,L$ olmak üzere "φ'de x yerine t konabilir mi?" soruları yanıtlanabilir.

(5) $f : \mathrm{Fm}\,L \times \mathcal{V} \times \mathrm{Tm}\,L \to \mathrm{Fm}\,L$ fonksiyonu

$$f(\varphi, x, t) := \begin{cases} \varphi(x|t), & \mathrm{Sb}(\varphi, x|t) \\ \emptyset, & \text{diğer durum} \end{cases}$$

ise hesaplanabilir.

Kanıt. (1) $\mathcal{R}, \mathcal{F}$ ve $\mathcal{C}$ belirlenebilir olduklarından L de (Z^*'da) belirlenebilir. Dolayısıyla $A := L \sqcup \left\{\neg, \dot{\forall}, \rightarrow, \doteq,), (\right\}$ abecesi belirlenebilir, dolayısıyla (5.3.5)'ten dolayı $A^* = \operatorname{Sz} A \subseteq Z^*$ algoritmik sayılabilir.

(2) Doğrudan terim, formül, değişken, serbest ve bağlı değişkenlerin algoritmik tanımlarından çıkar. Örneğin terimler için bir algoritma sözcüklerin uzunlukları üzerinden şöyle verilebilir. Uzunluğu 1 olan bir $s = s_0$ sözcüğü verilsin. $s_0 \in \mathcal{C} \sqcup \mathcal{V}$ olup olmadığı belirlenebilir: Yanıt "evet" ise $s \in \operatorname{Tm} L$ "hayır" ise $s \notin \operatorname{Tm} L$. Uzunluğu $n+1$ olan $s = s_0 s_1 \cdots s_n$ sözcüğü verilsin. $s_0 \notin \mathcal{F}$ ise, ki bunun olup olmadığı varsayımımızdan belirlenebilir, $s \notin \operatorname{Tm} L$ olur. $s_0 \in \mathcal{F}$ ve $s_0 = f_j^m$ olsun. Bu durumda $m > n$ ise $s \notin \operatorname{Tm} L$ olur. $m \leq n$ ise $s_1 \cdots s_n$ sözcüğünün $t_1, \ldots t_m \in \operatorname{Tm} L$ olmak üzere $t_1 \cdots t_m$ şeklinde olup olmadığına bakarız. Şimdi t_i terimleri daha kısadırlar ve sonlu sayıda gruplamaya bakacağımızdan bu belirlenebilirdir.

(3), (4) ve (5) yine bu kavramların algoritmik tanımlarından çıkar[29]. ■

Tanım 5.3.11 *L bir uz dil olmak üzere Γ kümesi $\operatorname{Fm} L$'de belirlenebilirse, dd. her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ için bunun $\mathcal{K}$ kuramının bir öz aksiyomu olup olmadığı, dd. $\varphi \in \Gamma$ olup olmadığı sorusu için elimizde bir yanıtlama yöntemi varsa $\mathcal{K}$ kuramı bir **uz kuramdır** diyeceğiz.* $\operatorname{Bc}\Gamma$ *belirlenebilirse—eş anlamlı olmak üzere* $\operatorname{Bt}\mathcal{K}$ *belirlenebilirse—$\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ **kuramı belirlenebilir**dir denir.*

$\operatorname{Fm} L$ belirlenebilir olduğundan Γ'nın $\operatorname{Fm} L$'de belirlenebilir olması belirlenebilir olmasına denktir. Uz kuramlara *formal* veya *belirlenebilir* de denir; biz bu söylemleri kullanmayacağız. Öz aksiyomları sonlu olan kuramlar elbette uz kuramlardır. Ancak bir kuramın uz olması için öz aksiyomlarının sonlu olması gerekmez. Örneğin $\mathcal{K}_a$ kuramının öz aksiyomları $\{\alpha_{a7}^{\varphi} \mid \varphi \in \operatorname{Fm} L_a\}$ tümevarım aksiyomlarından dolayı sonsuzdur; ancak verilen bir $\psi \in \operatorname{Fm} L_a$ formülünün bir φ ile $\psi = \alpha_{a7}^{\varphi}$ olup olmadığını belirlemek için basit düzeyde bir görsel yetenek yeterlidir ve bu işi makinalara yaptırabiliriz. Benzeri, öz aksiyomları sonsuz olan cebirsel kapalı cisimler kuramı için geçerlidir. Diğer yandan sonlu sayıda çıkarım kuralımız var ve herhangi bir φ_i formülünün kendinden önce gelenlerin bir kısmından çıkarım kurallarımızdan biriyle elde edilip edilmeyeceği ise yine basit düzeyde bir görsel yetenekle mekanik olarak belirlenebilir. Sonuç olarak $\mathcal{K}$ bir uz kuramsa $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ dizisinin $\mathcal{K}$ kuramında bir bkanıt olup olmadığını belirleyen bir yanıtlama yöntemimiz, dd. ile bir algoritmamız vardır.

Teorem 5.3.12 *$\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ bir uz kuram ise $\mathcal{K}$'nin biçimsel çıkarımlarının* $\operatorname{Bc}\Gamma$ *kümesi ve* $\operatorname{Bt}\Gamma$ *biçimsel teoremleri algoritmik sayılabilirdir.*

[29] Bu kavramların tanımlarında aşırı titizlik olarak görülecek yaklaşım burada gerekçesini bulur.

Kanıt. (5.3.10)'dan dolayı $\operatorname{Fm} L$ kümesi $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ olarak algoritmik sayılabilir. A abecesi sırasıyla algoritmik listelenmiş

$$:,\ \varphi_0,\ \varphi_1,\ \ldots$$

abecesi olsun. (5.3.7)'den dolayı $\operatorname{Sz} A$ algoritmik sıralanabilir. Teorem öncesi irdelemelerimizden ise $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \operatorname{Fm} L$ olmak üzere $\psi_1, \ldots, \psi_n$ dizisinin bir Γ-bkanıt olup olmadığı ve herhangi bir formülün bir sav olup olmadığı belirlenebilir olduğundan,

$$K_1 := \{\psi_1 : \psi_2 : \ldots : \psi_n \in \operatorname{Sz} A \mid \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n \text{ bir } \Gamma\text{-bkanıt}\}$$
$$K_2 := \{\tau_1 : \tau_2 : \ldots : \tau_n \in \operatorname{Sz} B \mid \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \text{ bir } \Gamma\text{-bkanıt ve } \tau_n \text{ bir sav}\}$$

kümeleri $\operatorname{Sz} A$'da belirlenebilirler; dolayısıyla (5.3.5) ve (5.3.7)'den K_1 ve K_2

$$\psi_1^0 : \cdots : \psi_{n_0}^0, \psi_1^1 : \cdots : \psi_{n_1}^1, \ldots \text{ ve}$$
$$\tau_1^0 : \cdots : \tau_{n_0}^0, \tau_1^1 : \cdots : \tau_{n_1}^1, \ldots$$

olarak algoritmik sıralanabilir. Bu algoritmik listelerdense $\operatorname{Bc}\Gamma$ ve $\operatorname{Bt}\Gamma$'nın

$$\psi_{n_0}^0, \psi_{n_1}^1, \ldots \quad \text{ve } \tau_{n_0}^0, \tau_{n_1}^1, \ldots$$

algoritmik listeleri oluşturulur. ■

$\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ bir uz kuramsa $\operatorname{Bc}\Gamma$ ve $\operatorname{Bt}\Gamma$ kümeleri makinalarla, yalın yazılımla

$$\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots \text{ ve } \tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots$$

olarak etkin sayılabilir. $\mathcal{K}$ kuramı ile işimiz bitmiş midir? Kanıtlanabilir formülleri bulmayı makinaya bırakıp bir kenara çekilebilir miyiz? Hayır! Bizi örneğin bir $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ ile $\Gamma \vdash \varphi$? sorusu ilgilendirdiğinde $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots$ algoritmik listesini izlemeye başlarız. Bir i ile $\varphi = \psi_i$ olduğunu gözlemlersek işimiz biter. Ancak oluşum durumundaki listemizde henüz bu gözlemi yapmamış isek tümüyle boşlukta kalırız. Yeterince sabırlı olursak er veya geç bu listede φ ile karşılaşacağımızın garantisi yoktur. (5.3.12) ile öğrendiğimiz yalnızca $\operatorname{Bc}\Gamma$ ve $\operatorname{Sav}\Gamma$ kümelerinin etkin numaralanabilir olduklarıdır. (5.3.3), (5.3.5) ve (5.3.12)'den doğrudan aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Önerme 5.3.13 *$\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ bir uz kuram olsun. Bu durumda:*

(1) $\operatorname{Bc}\Gamma$ *belirlenebilir* $\Longleftrightarrow \operatorname{Bc}\Gamma$ *ve* $\operatorname{Fm} L \setminus \operatorname{Bc}\Gamma$ *algoritmik sayılabilir.*

(2) $\operatorname{Bt}\Gamma$ *belirlenebilir* $\Longleftrightarrow \operatorname{Bt}\Gamma$ *ve* $\operatorname{Sav} L \setminus \operatorname{Bt}\Gamma$ *algoritmik sayılabilir.*

Sonuç 5.3.14 *(1)* $\operatorname{Bc}\Gamma$ *belirlenebilir* $\Longleftrightarrow \operatorname{Fm} L \setminus \operatorname{Bc}\Gamma$ *algoritmik sayılabilir.*

(2) $\operatorname{Bt}\Gamma$ *belirlenebilir* $\iff$ $\operatorname{Sav} L \setminus \operatorname{Bt}\Gamma$ *algoritmik sayılabilir.*

Teorem 5.3.15 $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ *bir uz kuram ve tamsa belirlenebilir.*

Kanıt. $\mathcal{K}$ bir tam uz kuram olsun.

(a) $\mathcal{K}$ tutarsızsa $\operatorname{Bc}\mathcal{K} = \operatorname{Fm} L$ olduğundan $\mathcal{K}$ belirlenebilir, çünkü her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ için $\mathcal{K} \vdash \varphi$.

(b) $\mathcal{K}$ tutarlı olsun. $\mathcal{K}$ bir uz kuram olduğundan (5.3.5)'ten $\operatorname{Bt}\mathcal{K}$ algoritmik sayılabilir. $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ dizisi $\operatorname{Bt}\mathcal{K}$'nin bir algoritmik listesi olsun. $\sigma \in \operatorname{Sav} L$ keyfi verilsin. $\mathcal{K}$ tutarlı ve tam olduğundan ya $\sigma \in \operatorname{Bt}\mathcal{K}$ ya da $\neg\sigma \in \operatorname{Bt}\mathcal{K}$. $\mathcal{K}$ tutarlı olduğundan $\neg\sigma \in \operatorname{Bt}\mathcal{K}$ ise elbette $\mathcal{K} \nvdash \sigma$. Dolayısıyla er veya geç makinamız sonlu zamanda bir i ile ya $\sigma = \sigma_i$ ya da $\neg\sigma = \sigma_i$ olduğuna, dd. $\mathcal{K} \vdash \sigma$ veya $\mathcal{K} \nvdash \sigma$ olup olmadığına karar verir.

Bir ψ formülü sav değilse $\psi^{\dot\forall}$ bir sav olduğundan makinamız sonlu zamanda $\psi^{\dot\forall} \in \operatorname{Bt}\mathcal{K}$ veya $\neg\psi^{\dot\forall} \in \operatorname{Bt}\mathcal{K}$ olup olmadığına karar verir. $\mathcal{K} \vdash \psi \iff \mathcal{K} \vdash \psi^{\forall}$ olduğundan sav kanıtlanmıştır. ■

Not 5.3.16 İleride $\operatorname{Th}\mathfrak{N}$ kuramının belirlenemez olduğunu kanıtlayacağız. Bu durumda $\operatorname{Th}\mathfrak{N}$ kuramının tam olduğunu düşünürsek şu sonuca ulaşırız: $\mathfrak{N}$*'yi model kabul eden, dd.* $\Gamma \subset \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ *olan her tutarlı uz* $\mathcal{K} = (L_a, \Gamma)$ *kuramı için* $\operatorname{Bt}\mathcal{K} \subsetneqq \operatorname{Th}\mathfrak{N}$, *dd. en az bir* $\sigma_{\mathcal{K}} \in \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ *savı için* $\mathcal{K} \nvdash \sigma_{\mathcal{K}}$. Aynı zamanda $\neg\sigma_{\mathcal{K}} \notin \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ olduğundan $\mathcal{K} \nvdash \neg\sigma_{\mathcal{K}}$. Bu özellikle $\mathcal{K}_a$ aritmetik kuramı için doğrudur ve bu Gödel Eksiklik Teoremi'dir. $\sigma_{\mathcal{K}}$ savı $\mathfrak{N}$ yapısında doğru ancak $\mathcal{K}$ kuramı bunu kanıtlayamaz ve burada bir gariplik yoktur. Bu durum seçilen aksiyomların şu veya bu eksikliklerinden kaynaklanmaz. Γ ilksavlarımıza—belirlenebilirlik ve tutarlılık korunmak üzere –yeni ilksavlar ekleyerek—$\mathcal{K}' = (L, \Gamma')$ kuramına geçecek olsak yine $\operatorname{Bt}\mathcal{K}' \subsetneqq \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ olacak ve $\mathfrak{N}$ yapısında doğru ancak $\mathcal{K}'$ kuramının kanıtlayamadığı en az bir $\sigma'_{\mathcal{K}'} \in \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ savımız olacaktır. Elbette $\sigma_{\mathcal{K}} = \sigma'_{\mathcal{K}'}$ olması gerekmez. ▲

Not 5.3.17 Belirlenebilir kuramların tam olması gerekmez. Abelyen gruplar kuramının aksiyomlarına modellerin dört öğeli olmasını isteyen $\sigma_{=4}$ aksiyomunu ekleyerek $\mathcal{K}^4_{ag}$ kuramını elde edelim. Cebirden bildiğimiz gibi bu kuramın eşyapılı olmayan $\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$ gibi iki modeli vardır. Tüm diğer modelleri bunlardan biri ile eşyapılıdır. $\mathfrak{A}$ modeli $\mathfrak{Z}_4 := (\mathbb{Z}_4, +)$ iken $\mathfrak{B} = (B, +)$ Abelyen grubunun işlemleri $B := \{a, b, c, d\}$ olmak üzere aşağıdaki tabloyla verilmiştir:

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Bu modellerin evrenleri 4 öğeli yani sonlu olduğundan herhangi bir φ için $\mathfrak{A} \models \varphi$ ve $\mathfrak{B} \models \varphi$ olup olmadığı belirlenebilir. $\mathcal{K}^4_{ag} \vdash \varphi$ olması için gerek ve yeter koşul φ formülünün bu iki modelde doğru olmasıdır. Dolayısıyla $\mathcal{K}^4_{ag} \vdash \varphi$ olup olmadığı belirlenebilir. Ancak bu kuram tam değildir; örneğin $\sigma = \dot{\forall} x\,(x \dot{+} x \doteq \mathbf{0})$ savı bu modellerden birinde doğru iken diğerinde yanlıştır, dd. ne $\mathcal{K}^4_{ag} \vdash \sigma$ ne de $\mathcal{K}^4_{ag} \vdash \neg\sigma$! ▲

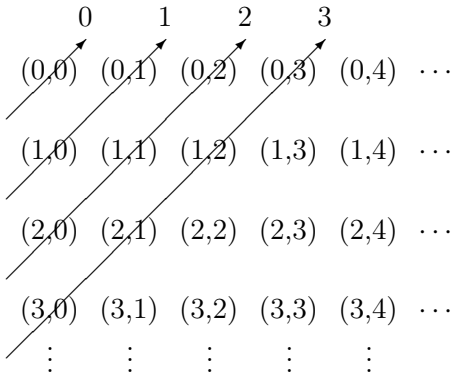
Not 5.3.18 Yoğun ve uç noktasız doğrusal sıralanmış kümelerin $\mathcal{K}_{ydus}$ kuramı ile 0 karakteristikli cebirsel kapalı cisimlerin $\mathcal{K}_{0ck}$ kuramları tamdırlar. Bu kuramların öz aksiyomları belirlenebilir olduklarından $\mathcal{K}_{ydus}$ ve $\mathcal{K}_{0ck}$ kuramları belirlenebilir kuramlardır. ▲

5.4 Bir Sezgisel Deneme

Teorem 5.4.1 *$A \subseteq \mathbb{N}$ kümesi algoritmik sayılabilirse, belirlenebilir bir $R \subseteq \mathbb{N}^2$ bağıntısı her n için $n \in A \iff \exists x R(n,x)$ olacak biçimde bulunabilir.*

Kanıt. $A = \emptyset$ için $R = \emptyset$ alınır. $A \neq \emptyset$ olsun. (5.3.5)(3)'ten hesaplanabilir bir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ile $A = \operatorname{Im} f$. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için $n \in A \iff \exists x(n = f(x))$. Şimdi $R \subseteq \mathbb{N}^2$ bağıntısını $R(n,m) :\iff n = f(m)$ olarak açıklayalım. f hesaplanabilir olduğundan R belirlenebilir ve her $n \in \mathbb{N}$ için $n \in A \iff \exists x R(n,x)$. ■

Mantık kitaplarında sıkça karşılaşılan hesaplanabilir bir $\pi_2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ fonksiyonu vereceğiz. Burada Cantor'un $\mathbb{N}^2$ ile $\mathbb{N}$'nin eş güçlü olduğunu gösterirken kullandığı aşağıdaki tabloyu kullanacağız.



$\mathbb{N}$'nin öğelerini sıfır nolu köşegenden başlayıp, köşegen üzerindekileri ise ok yönünde olmak üzere

$$(0,0)\,;(1,0),(0,1);(2,0),(1,1),(0,2);(3,0),(2,1),\ldots$$

olarak sıralayacak ve her (x, y) ikilisine bu sıralamadaki sıra sayısını karşılık getireceğiz; bu sıralama da 0 ile başlayacaktır. Böylece

$$\pi_2(0,0) = 0,\ \pi_2(1,0) = 1,\ \pi_2(0,1) = 2,\ \pi_2(2,0) = 3,\ \pi_2(1,1) = 4,\ \ldots$$

olacaktır. π_2 dönüşümünü bir tameşlemedir. Ayrıca tanım gereği $\pi_2(x, y) = \pi_2(x+y, 0)+y$. Diğer yandan ise $\pi_2(x+y, 0)$ kendinden önce gelen köşegenler üzerindeki $\mathbb{N}^2$'nin öğe sayılarına eşittir, dd.

$$\pi_2(x+y, 0) = \sum_{k<x+y} (k+1) = \frac{1}{2}(x+y)(x+y+1), \text{ dolayısıyla}$$

$$\pi_2(x, y) = y + \sum_{k<x+y} (k+1) = y + \frac{1}{2}(x+y)(x+y+1)$$

ve elbette $\pi_2(x, y)$ hesaplanabilir.

Tümevarımla her $n \geq 2$ için hesaplanabilir $\pi_{n+1} : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ tameşlemesi

$$\pi_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, y) = \pi_2(\pi_n(x_1, \ldots, x_n), y)$$

ile tanımlanır. Elbette $n \geq 2$ için π_n tameşlemeleri hesaplanabilir.

Her x, y için $x, y \leq \pi_2(x, y)$ olduğu apaçıktır. Bu nedenle $\pi_2^{-1}(x) := (k_1(x), k_2(x))$ olmak üzere $k_1, k_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonları da hesaplanabilir fonksiyonlardır: $0 \leq i, j \leq x$ koşulunu sağlayan sonlu (i, j) ikililerinden yalnız bir tanesi için $\pi_2(i, j) = x$ ve dolayısıyla $k_1(x) = i,\ k_2(x) = j$ olur.

Girdileri bir X kümesinin öğeleri olan bir $\mathcal{A}$ algoritması için

$$x \in \operatorname{dom}\mathcal{A} :\Longleftrightarrow \mathcal{A} \text{ algoritması } x \in X \text{ girdisinde bir çıktı verir}$$

ile tanımlanan $\operatorname{dom}\mathcal{A}$ kümesine $\mathcal{A}$ algoritmasının **tanım kümesi** diyelim.

Teorem 5.4.2 *Bir $A \subseteq \mathbb{N}$ kümesinin algoritmik sayılabilir olması için gerek ve yeter koşul $\mathbb{N}$ için tanımlanmış bir $\mathcal{A}$ algoritması ile $A = \operatorname{dom}\mathcal{A}$ olmasıdır.*

Kanıt. $\Longrightarrow$: A kümesi algoritmik sayılabilir olsun. $A = \emptyset$ ise $\mathcal{A}$ algoritması her $n \in \mathbb{N}$ girdisinde bir çıktı vermeyen bir döngülü algoritma olarak alınırsa $\operatorname{dom}\mathcal{A} = \emptyset$ olur. Şimdi $A \neq \emptyset$ varsayalım. Hesaplanabilir bir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ile $A = f(\mathbb{N})$ olur. $\mathcal{A}_1$ ile f fonksiyonunu hesaplayan bir algoritmayı gösterelim. $\mathcal{A}$ algoritmasını şöyle açıklayalım. $n \in \mathbb{N}$ girdisi verildiğinde $\mathcal{A}$ algoritması şöyle çalışır: $\mathcal{A}_1$ ile $f(0)$ hesaplanır ve $f(0) = n$ olup olmadığı kontrol edilir, ardından $f(1)$ hesaplanır ve $f(1) = n$ olup olmadığı kontrol edilir ve benzer biçimde devam edilir. Eğer bir yerde ilk kez $f(m) = n$ olursa $\mathcal{A}$ algoritması n çıktısını verir ve durur. Elbette $A = \operatorname{dom}\mathcal{A}$.

$\Longleftarrow$: $\mathbb{N}$'de tanımlı bir $\mathcal{A}$ algoritması ile $A = \operatorname{dom}\mathcal{A}$ olsun. $A = \emptyset$ ise işimiz biter. $A \neq \emptyset$ olsun. Bir $a \in A$ öğesini seçelim. $\mathcal{A}$ algoritmasının adım adım çalıştığını varsayabiliriz. $\mathcal{A}$ yardımıyla bir $\mathcal{B}$ algoritmasını şöyle tanımlayacağız. $n \in \mathbb{N}$ girdisi verildiğinde $k_1(n) = i$ ve $k_2(n) = j$ hesaplanır. Ardından $\mathcal{A}$ algoritması i girdisiyle j adım çalıştırılır. Eğer $\mathcal{A}$ algoritması bir çıktı verirse $\mathcal{B}$ algoritması n girdisinde i çıktısını, diğer durumda a çıktısını verir. n büyüdükçe $\mathcal{A}$ algoritması büyüyen j adımlarıyla i girdisiyle çalışacağından $i \in A$ ise er veya geç $\mathcal{B}$ algoritması i çıktısını verir. $\mathcal{B}$ algoritması her n için bir çıktı verdiğinden hesaplanabilir bir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu tanımlar ve açıkça $f(\mathbb{N}) = A$. ■

Herhangi bir algoritmalar sınıfının matematiksel tanımını verdiğimizde algoritmalar sonlu bir abecenin sonlu sözcükleri olacağından elimizde sayılabilir tane algoritmamız olacaktır. Bunlar $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots$ olsunlar. Algoritmalarımızın her hesaplanabilir fonksiyonu hesaplayabildiğini varsayalım; örneğin biz ileride kayıt makinalarının bu koşulu sağladığını kanıtlayacağız. $A_n := \operatorname{dom}\mathcal{A}_n$ olsun. $\mathbb{N}$'deki algoritmik sayılabilir kümelerin ailesi tamı tamına $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ailesidir. Bir $R \subseteq \mathbb{N}^2$ bağıntısını $(m,n) \in R :\Longleftrightarrow m \in A_n$ olarak açıklayalım.

Teorem 5.4.3 *$D_R = \{n \mid (n,n) \in R\}$ algoritmik sayılabilir ancak D_R^c algoritmik sayılamaz. Başka sözlerle D_R yarı belirlenebilir ancak belirlenemez.*

Kanıt. (1.1.5) Cantor Köşegen Lemması'ndan dolayı her $n \in \mathbb{N}$ için $D_R^c \neq R^n = \{m \mid (m,n) \in R\} = \{m \mid m \in A_n\} = A_n$. Dolayısıyla D_R^c algoritmik sayılamaz.

$\mathbb{N}$ kümesi hesaplanabilir özdeşlik fonksiyonunun resmi olduğundan algoritmik sayılabilir, D_R^c ise algoritmik sayılamaz. Dolayısıyla $D_R \neq \emptyset$. Bir $s \in D_R$ öğesini keyfi seçip sabit tutalım. Şimdi çıktıları tamı tamına D_R olan bir $\mathcal{A}$ algoritması verdiğimizde işimiz biter.

$\mathcal{B}$ ve $\mathcal{C}$ algoritmalarımız sırasıyla yukarıda tanımlanan k_1 ve k_2 fonksiyonlarını hesaplasınlar. $\mathcal{A}$ algoritmasını şöyle tanımlayacağız: $n \in \mathbb{N}$ girdisi verildiğinde önce $i = k_1(n)$ ve $j = k_2(n)$ hesaplanır. Ardından $\mathcal{A}_i$ algoritması i girdisiyle j adım çalıştırılır. Bu işlem sonunda bir çıktı elde edersek $\mathcal{A}$'nın çıktısı i, diğer durumda ise $\mathcal{A}$'nın çıktısı s olarak açıklansın. $\mathcal{A}_i$'nin bir çıktısının olması $i \in A_i$ olmasına denktir. $\mathcal{A}$ algoritmasının her $n \in \mathbb{N}$ için bir $f(n)$ çıktısı vardır. $\mathcal{A}$ algoritması f fonksiyonunu hesaplar ve $f(\mathbb{N}) = D_R$ olduğundan D_R algoritmik sayılabilir. ■

Tanım 5.4.4 *L dili $\{\mathbf{S}, \mathbf{0}\}$ dilini kapsayan herhangi bir dil olsun. $\mathfrak{N}_L$ ile $\mathbf{0}^{\mathfrak{N}_L} = 0$ ve $\mathbf{S}^{\mathfrak{N}_L} = S$ koşulunu sağlayan $\mathbb{N}$ evrenli herhangi bir L-yapısını gösterelim.*

$L\setminus\{\mathbf{S},\mathbf{0}\}\neq\emptyset$ ise $\mathfrak{N}_L$ tek olarak belirli değildir. Ancak aşağıdaki irdelemelerimiz için bu önemli değildir; önermelerimiz bunların her biri için geçerli olacaktır.

Tanım 5.4.5 *1. Bir $R\subseteq\mathbb{N}^k$ bağıntısına bir $\varphi\in\Phi^k_s(L)$ ile*

$$(n_1,\ldots,n_k)\in R:\Longleftrightarrow\ \varphi\left(\underline{n_1},\ldots,\underline{n_k}\right)\in\operatorname{Th}\mathfrak{N}_L$$

*sağlanmışsa $\mathfrak{N}_L$-**tanımlanabilir** diyeceğiz.*

2. Bir $f:\mathbb{N}^k\to\mathbb{N}$ fonksiyonuna bir $\varphi\in\Phi^{k+1}_s(L)$ formülü her $m_1,\ldots,m_k,\ n\in\mathbb{N}$ için

$$f(m_1,\ldots,m_k)=n\Longleftrightarrow\varphi\left(\underline{m_1},\ldots,\underline{m_k},\underline{n}\right)\in\operatorname{Th}\mathfrak{N}_L$$

*olacak biçimde bulunabiliyorsa $\mathfrak{N}_L$-**tanımlanabilir** diyeceğiz.*

*3. $L=L_a$ ve $\mathfrak{N}_{L_a}=\mathfrak{N}$ durumunda kısaca $\mathfrak{N}$-**tanımlanabilir** diyeceğiz.*

Söz konusu durumlarda φ formülü R bağıntısını veya f fonksiyonunu $\mathfrak{N}_L$-tanımlar denir.

Tanım 5.4.6 *$\{\mathbf{S},\mathbf{0}\}\subseteq L$ ve $\mathbf{0}^{\mathfrak{N}}=0$, $\mathbf{S}^{\mathfrak{N}}=S$ olmak üzere her belirlenebilir $R\subseteq\mathbb{N}^n$ $(n\geq 1)$ bağıntısı $\mathfrak{N}_L$-tanımlanabilirse L **yeterince zengin bir dil**dir diyeceğiz.*

Teorem 5.4.7 *L yeterince zengin bir uz dilse $\operatorname{Th}\mathfrak{N}_L$ algoritmik sayılamaz, özellikle belirlenemez.*

Kanıt. (5.4.3)'ten dolayı kendisi algoritmik sayılabilir, ancak K^c tümleyeni algoritmik sayılamayan bir K kümesi vardır. (5.4.1)'den dolayı belirlenebilir bir $R\subseteq\mathbb{N}^2$ bağıntısı ile her n için $n\in K\Longleftrightarrow\exists xR(n,x)$. L dilimiz yeterince zengin olduğundan bir $\varphi(x,y)\in\operatorname{Fm}L$ formülü her $n,m\in\mathbb{N}$ için $(n,m)\in R\Longleftrightarrow\varphi(\underline{n},\underline{m})\in\operatorname{Th}\mathfrak{N}_L$ olacak biçimde vardır. Dolayısıyla her $n\in\mathbb{N}$ için

$$n\in K\Longleftrightarrow\dot{\exists}x\varphi(\underline{n},x)\in\operatorname{Th}\mathfrak{N}_L\ \text{ ve }\ n\in K^c\Longleftrightarrow\neg\dot{\exists}x\varphi(\underline{n},x)\in\operatorname{Th}\mathfrak{N}_L$$

olur. $\operatorname{Th}\mathfrak{N}_L$'nin $\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2,\ldots$ olarak etkin listelendiğini varsayalım. Bu liste sırasıyla taranır ve bu formülün $\neg\dot{\exists}x\varphi(\underline{n},x)$ tipinde olup olmadığına bakılır ve bu tipten olan σ_n önermelerinin damgalarından ikinci bir $d_0,d_1,\ldots$ etkin listesi oluşturulur. Bu ise K^c kümesini etkin listeler ki bu olamaz! ■

Not 5.4.8 $\mathfrak{N}_L=(\mathbb{N},L^{\mathfrak{N}_L})$ yapıları geleneksel matematiğin çalışma alanıdır. L yeterince zengin bir uz dil olduğunda bu yapının doğrularını bize veren bir algoritma olamayacağını öğrenmiş oluyoruz. İlerde L_a aritmetik uz dilinin yeterince zengin olduğunu öğreneceğiz. Dolayısıyla $\operatorname{Th}\mathfrak{N}$ etkin listelenemez ve belirlenemez. ▲

Teorem 5.4.9 *L yeterince zengin bir uz dil ise her belirlenebilir $\Gamma \subseteq \operatorname{Sav} L$ için $\operatorname{Th} \mathfrak{N}_L \neq \operatorname{Bt} \Gamma$, dd. her $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ uz kuramı için $\operatorname{Th} \mathfrak{N}_L \neq \operatorname{Bt} \mathcal{K}$.*

Kanıt. $\operatorname{Bt} \mathcal{K}$ etkin sayılabilir (bkz. (5.3.12)) ve $\operatorname{Th} \mathfrak{N}_L$ etkin sayılamaz (bkz. (5.4.7)). ■

Bu teoremde $\mathcal{K}$ kuramının tutarlılığı hakkında hiçbir şey söylemediğimize dikkat ediniz. Eğer ayrıca $\mathcal{K}$ tutarsızsa $\operatorname{Bt} \mathcal{K} = \operatorname{Sav} L$ algoritmik sayılabilir, buna karşın $\operatorname{Th} \mathfrak{N}_L \subsetneqq \operatorname{Bt} \mathcal{K}$ olduğu halde $\operatorname{Th} \mathfrak{N}_L$ algoritmik sayılamaz olacaktır.

Teorem 5.4.10 (Eksiklik Teoremi) *L dili yeterince zengin olan $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ uz kuramı $\operatorname{Bt} \mathcal{K} \subseteq \operatorname{Th} \mathfrak{N}_L$ koşulunu sağlıyorsa, örneğin $\mathfrak{N}_L \in \operatorname{Mod} \Gamma$ ise tam değildir.*

Kanıt. $\operatorname{Bt} \mathcal{K} \subseteq \operatorname{Th} \mathfrak{N}_L$ ve (5.4.9)'dan $\operatorname{Bt} \mathcal{K} \subset \operatorname{Th} \mathfrak{N}_L$ olur. $\sigma \in \operatorname{Th} \mathfrak{N}_L \setminus \operatorname{Bt} \mathcal{K}$ olsun. Seçimimizden dolayı $\mathcal{K} \nvdash \sigma$. Diğer yandan $\neg\sigma \notin \operatorname{Th} \mathfrak{N}_L$ ve $\operatorname{Bt} \mathcal{K} \subseteq \operatorname{Th} \mathfrak{N}_L$ koşulundan ise $\mathcal{K} \nvdash \neg\sigma$ ve bkb. ■

Burada σ savı $\mathfrak{N}_L$ yapısında doğrudur, ancak $\mathcal{K}$ kuramı bunu kanıtlayamaz. Bunda yadırganacak hiçbir durum yoktur. Ancak yukarıdaki kanıtın kurucu olmadığını, dd. somut olarak σ savını vermeyip yalnızca varlığını kanıtladığını belirtelim. Ayrıca bu teorem aynı zamanda bir *tamamlanamazlık* teoremidir: $\mathcal{K} \leq \mathcal{K}'$ ve $\mathcal{K}'$ kuramı teoremin koşullarını sağlıyorsa, $\mathcal{K}'$ kuramı $\mathcal{K}$ kuramının kanıtlayamadığı bazı önermeleri kanıtlıyor olabilir, ancak yine de $\mathcal{K}'$ de eksik olacaktır.

Gödel'in Eksiklik Teoremi (5.4.10)'un özel bir durumudur; ancak Gödel'in kanıtı kurucudur. Gödel L_a uz dilinin yeterince zengin olduğunu kanıtlamış ve $\mathcal{K}_a = (L_a, \Lambda_a)$ kuramının ω-tutarlı olması koşuluyla ne kanıtlayabildiği ne de çürütebildiği, ancak yine de $\mathfrak{N}$ yapısında doğru olan bir $\sigma \in \operatorname{Sav} L_a$ önermesini vermiştir. Gödel'in teoremlerinin kendisi kadar kullandığı yöntem de önemlidir. Bugün bilgisayar çağında sözcüklerin doğal sayılarla kodlanması sıradan bir şeydir. Ancak Gödel'in çalışmasını sunduğu dönem bilgisayar dönemi olmadığı gibi, bilgisayar biliminin kurucularından olan von Neumann'ın mantığa önemli katkıları olan bir matematikçi olması, yine Turing'in ancak Gödel'in çalışmalarını okuduktan sonra hesaplanabilirlik kavramının netleştirilmesine katkıda bulunabilmesi bir rastlantı değildir.

Gödel $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ uz kuramı verildiğinde L dilinin terimlerini, formüllerini ve kanıtlarını doğal sayılarla kodlayarak bu $\mathcal{K}$'nin sözeden kuramını sayılar kuramına taşımıştır. "Hesaplanabilirlik" yerine "yinelgenlik" kavramıyla çalışmıştır. Bu nedenle sayılar kuramının önermelerinin mantıksal yapısına kısaca gözatmak yararlı olacaktır.

5.5 Aritmetik Silsile

Henüz yinelgen fonksiyonları tanımlamadığımız için bu kesimde eş anlamlı olan " hesaplanabilir" veya " belirlenebilir" kavramlarını kullanacağız. Ancak bu kavramların geçtiği her yerde onları içinizden "yinelgen" olarak da okuyunuz.

Biz sayılar kuramının belirlenebilir bağıntıları ve hesaplanabilir fonksiyonları ile ilgileneceğiz. Ancak bir kısıtlamamız olacaktır: Bizi herhangi bir biçimde tanımlanmış bağıntılar ve fonksiyonlar değil, $\mathfrak{N}$-tanımlanabilir bağıntı ve fonksiyonlar ilgilendirecektir. Fonksiyonlar özel bağıntılar olduğu için yalnızca bağıntılara odaklanılabilir.

Çarpma, toplama ve ardıl fonksiyonları hesaplanabilir ve $=$ bağıntısı belirlenebilir olduğundan $L_a^{\mathfrak{N}}$ dilinin atomik formülleri belirlenebilir bağıntılar tanımlarlar. $P, Q \subseteq \mathbb{N}^n$ belirlenebilir bağıntılarsa

$$P \cup Q,\ P \cap Q,\ \neg P = P^c,\ P \Longrightarrow Q$$

bağıntıları da belirlenebilirler. Dolayısıyla $\varphi(\overline{x_n})$ ve $\psi(\overline{x_n})$ formülleri $\mathbb{N}^n$'de belirlenebilir bağıntılar tanımlıyorlarsa $\varphi \curlyvee \psi, \varphi \curlywedge \psi, \neg\varphi, \varphi \to \psi$ formülleri de belirlenebilir bağıntılar tanımlarlar.

$P(\overline{x_n}, y) = P(x_1, \ldots, x_n, y) \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ bağıntısı belirlenebilir ise herhangi bir z için

$$\begin{aligned} Q(\overline{x_n}, z) &:= \exists^{\leq z} y P(\overline{x_n}, y) := \exists y(y \leq z \wedge P(\overline{x_n}, y)) \text{ ve} \\ R(\overline{x_n}, z) &:= \forall^{\leq z} y P(\overline{x_n}, y) := \forall y(y \leq z \Longrightarrow P(\overline{x_n}, y)) \end{aligned}$$

bağıntıları da

$$\begin{aligned} Q(\overline{x_n}, z) &= \exists^{\leq z} y P(\overline{x_n}, y) \Longleftrightarrow P(\overline{x_n}, 0) \vee P(\overline{x_n}, 1) \vee \cdots \vee P(\overline{x_n}, z) \text{ ve} \\ R(\overline{x_n}, z) &= \forall^{\leq z} P(\overline{x_n}, y) \Longleftrightarrow P(\overline{x_n}, 0) \wedge P(\overline{x_n}, 1) \wedge \cdots \wedge P(\overline{x_n}, z) \end{aligned}$$

olduğundan belirlenebilir bağıntılardır. Aynı şey $\exists^{<n+1} := \exists^{\leq n}$ ve $\forall^{<n+1} := \forall^{\leq n}$ ile açıklanan $\exists^{<z+1} y P(\overline{x_n}, y)$ ve $\forall^{<z+1} y P(\overline{x_n}, y)$ bağıntıları içinde geçerlidir.

$P(\overline{x_n}, y)$ belirlenebilir bir bağıntı olduğunda $\exists y P(\overline{x_n}, y)$ ve $\forall y P(\overline{x_n}, y)$ bağıntıları da belirlenebilir midir? (5.4.1) bize biraz ipucu verir. $a = (\overline{a_n}) \in \mathbb{N}^n$ için $\varphi_a(y) := P(\overline{a_n}, y)$ olmak üzere

$$\sigma_a := \exists y \varphi_a(y) \text{ ve } \rho_a := \forall y \varphi_a(y)$$

olsun. Varsayımımızdan dolayı $\varphi_a(y)$ belirlenebilir.

σ_a ve ρ_a'nın karakterleri taban tabana zıttır. σ_a doğru ise bu algoritmik olarak gösterilebilir. Bir algoritma sırasıyla $\sigma_a(0), \sigma_a(1), \sigma_a(2), \ldots$ önermelerini tarar ve ilk kez doğru bir $\sigma_a(n)$'ye rastladığında "evet" çıktısı verir ve durur. σ_a doğru olduğunda bu er veya geç gerçekleşir. Bu, P bağıntısı yarı belirlenebilir olduğunda da doğrudur. Ancak σ_a yanlışsa bunu belirleyemeyiz, algoritma sürekli taramayı sürdürür ve er veya geç bir çıktı verip vermeyeceğini bilemeyiz. $\sigma_a = \exists y \varphi_a(y)$ savının ancak doğruluğu algoritmik belirlenebilir, dolayısıyla $\exists y P(\overline{x_n}, y)$ yarı belirlenebilir. Buna karşın ρ_a doğru ise bu algoritmik belirlenemez, ancak yanlışsa bu algoritmik belirlenebilir. σ_a *genişleyen* ρ_a ise *daralan* özelliklidir de denir. $\exists y \varphi_a(y)$ önermesi define aramaya benzer: Define varsa kazmaya devam ederek er veya geç defineyi bulursunuz, eğer define yoksa, sonuçtan emin olmadan kazmaya devam edersiniz. $\forall y \varphi_a(y)$ önermesi, $\varphi_a(y)$'yi "y noktası temizdir, dd. y noktasında mayın yoktur" diye yorumlarsak mayın tarlasında gezinmek gibidir: mayın varsa, dd. $\forall y \varphi_a(y)$ önermesi yanlışsa, attığınız her adımla hayatta kalma şansınız, dd. $\forall y \varphi_a(y)$ önermesinin doğru olma şansı azalır, er veya geç mayına basarsınız. Eğer mayın yoksa, sonuçtan emin olmadan dolaşmaya devam edersiniz.

Sayılar kuramı çetin ceviz problemlerle doludur. Bunlardan en çok bilineni 1994'te çözülen Fermat sanısıdır: $n > 2$ için $x^n + y^n = z^n$ denkleminin pozitif doğal sayılarda çözümü yoktur. Bu problemi $P(x, y, z, w) = x^w + y^w$, $Q(x, y, z, w) = z^w$ ve $R(x, y, z, w)$ bağıntısı $P(x, y, z, w) = Q(x, y, z, w)$ olmak üzere

$$\forall x, y, z, w \ (w \leq 2 \vee (xyzw \neq 0 \Longrightarrow \neg R(x, y, z, w))$$

olarak, dd. $\forall x, y, z, w F(x, y, z, w)$ olarak yazabiliriz. P ve Q hesaplanabilir olduklarından R ve $\neg R$ belirlenebilir dolayısıyla $F(x, y, z, w)$ belirlenebilir. Fermat probleminin çözüm öncesi günlere dönersek şunu söyleyebiliriz: Fermat sanısı doğruysa algoritmik bir kanıtı olamaz, yanlışsa algoritmik kanıtlanabilir. Yanlış olabileceğini düşünen matematikçiler sabırla bir karşı örnek aramışlardır; ancak biz bugün Fermat sanısının doğru olduğunu bildiğimiz için tüm karşı örnek arayışlarının boşa harcanmış emek olduğunu biliyoruz.

Bir $x \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için $\mathrm{Pr}(x)$ bağıntısı

$$1 < x \wedge \forall y, z (y < x \wedge z < x \Longrightarrow yz \neq x)$$

ile tanımlanan "x bir asal sayıdır" bağıntısı olsun. $y, z < x$ koşulunu sağlayan sonlu tane y, z olduğundan $\mathrm{Pr}(x)$ bağıntısı belirlenebilir. Bir diğer çözüm bekleyen aritmetik önerme *Goldbach sanısıdır.* Goldbach 3'ten büyük her çift doğal sayının iki asal sayının toplamı olarak yazılabileceğini ileri sürer.

$t(x) = \exists k(k < x \wedge x = 2k + 1)$ bağıntısı belirlenebilir ve "x bir tek sayıdır" anlamına gelir. $\gamma(x)$ ise

$$x \leq 3 \vee t(x) \vee \exists y \exists z \ (y < x \wedge z < x \wedge \mathrm{Pr}(y) \wedge \mathrm{Pr}(z) \wedge x = y + z)$$

olsun. $\gamma(x)$ belirlenebilir bir bağıntıdır ve Goldbach sanısı $\forall x \gamma(x)$ önermesidir. Bu nedenle belirlenebilir bir $P(\overline{x_n})$ bağıntısı ile $\forall \overline{x_n} P(\overline{x_n})$ tipindeki önermelere **Goldbach benzeri** önermeler denir.

Bir diğer çözülmemiş problem *ikiz asallar sanısıdır*. Bu sanı her n doğal sayısına karşılık ondan büyük olan bir p asal sayısının $p + 2$ de asal olacak biçimde bulunabileceğini ileri sürer. Bu sanıyı ise

$$\forall x \exists y(x < y \wedge \mathrm{Pr}(y) \wedge \mathrm{Pr}(y + 2)) = \forall x \varphi(x)$$

olarak yazabiliriz. Bu önerme ise bir Goldbach benzeri önerme değildir! $x < y$ koşulunu sağlayan sonsuz tane y olduğu için $\varphi(x) = \exists y(x < y \wedge \mathrm{Pr}(y) \wedge \mathrm{Pr}(y + 2))$ belirlenemez.

Bizi tek tek böyle önermelerden çok onların mantıksal yapısı ilgilendirecektir. Bu nedenle aritmetik önermelerinin karakterlerine kısaca değineceğiz. Dikkatli bir okur $\leq \notin L_a^{\mathfrak{N}}$ olduğundan yukarıdaki formüllerimizin $\mathrm{Fm}\, L_a^{\mathfrak{N}}$'de olmadığını farketmiştir. Kolay izlenebilirlik açısından L_a dilimizi $\prec$ ve $\preceq$ tanımlanmış imler ile zenginleştirelim:

$$x \preceq y :\Longleftrightarrow \mathcal{K}_a \vdash \dot{\exists} z \ (z + x \doteq y)$$
$$x \prec y :\Longleftrightarrow x \preceq \ \curlywedge \neg x \doteq y$$

tanımlayan aksiyomumuz olsun. Bu zenginleştirilmiş dili de L_a ile gösterelim. Bu bağıntının $\leq$ bağıntısının özelliklerini taşıdığını bir sonraki kesimde göstereceğiz ve $\preceq$ bağıntısını $\mathfrak{N}$ yapısında daima $\leq$ ile (ve $\prec$ bağıntısını da $<$ olarak) yorumlayacağız.

$\mathrm{Fm}\, L_a$ formüllerimizi sınıflandıracağız. Atomik formüllerimiz s, t terimler olmak üzere $s \doteq t$ ve $s \preceq t$ formülleridir.

Tanım 5.5.1 *$\Delta_0 \subseteq \mathrm{Fm}\, L_a$ kümesini şöyle tanımlayacağız:*

1. *Atomik formüllerimiz Δ_0'dadır.*
2. *$\varphi, \psi \in \Delta_0 \Longrightarrow \neg\varphi, \varphi \to \psi \in \Delta_0$.*
3. *$t \in \mathrm{Tm}\, L_a$ ve $x \notin \mathrm{Sb}(t)$ olmak üzere $\varphi \in \Delta_0$ ise $\dot{\forall}^{x<t}\phi \in \Delta_0$.*

Lemma 5.5.2 *1. $\varphi, \psi \in \Delta_0 \Longrightarrow \varphi \curlyvee \psi, \varphi \curlywedge \psi, \varphi \longleftrightarrow \psi \in \Delta_0$.*

2. $t \in \mathrm{Tm}\, L_a$ ve $x \notin \mathrm{Sb}(t)$ olmak üzere $\varphi \in \Delta_0$ ise $\dot{\exists}^{x<t}\phi \in \Delta_0$.

Özetle: $\varphi \in \Delta_0 \Longleftrightarrow \varphi$ en fazla sınırlı niceleyiciler içerir. Δ_0'daki formüllere **sınırlı formüller** diyelim.

Tanım 5.5.3 *Tümevarımla $\Delta_n, \Sigma_n, \Pi_n \subseteq \operatorname{Fm} L_a$ kümelerini tanımlayacağız:*

1. $\Sigma_0 = \Pi_0 := \Delta_0$.
2. $\psi \in \Sigma_{n+1} :\Longleftrightarrow \psi = \dot{\exists}\overline{x_m}\varphi,\ \varphi \in \Pi_n$.
3. $\psi \in \Pi_{n+1}. \Longleftrightarrow \psi = \dot{\forall}\overline{x_m}\varphi,\ \varphi \in \Sigma_n$.
4. $\Delta_n := \Sigma_n \cap \Pi_n$.
5. *K imi Σ_n, Π_n veya Δ_n olmak üzere, $\phi \in K$ ve $\vdash \psi \equiv \varphi$ ise $\psi \in K$.*

Her ψ formülümüz bilindiği gibi, Normal Biçim Teoremi'nden dolayı, φ bir sınırlı formül olmak üzere $B_nB_{n-1}\cdots B_1\varphi$ tipinde bir formüle biçimsel denktir. Burada her bir B_i ifadesi $\dot{\exists}x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_i}}$ veya $\dot{\forall}x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_i}}$ tipinde bir bloktur ve birbirini izleyen bloklar tür değiştirir; $\dot{\forall}$'li bir bloğu $\dot{\exists}$'lı bir blok ve tersine $\dot{\exists}$'lı bir bloğu $\dot{\forall}$'li bir blok izler.

Bu sınıflandırma dışlayan bir sınıflandırma değildir. Örneğin $\varphi \in \Sigma_n$ ve $w \notin \deg\varphi$ ise $\dot{\forall}w\varphi$ formülü φ formülüne denk ve $\dot{\forall}w\varphi \in \Pi_{n+1}$ olacağından $\varphi \in \Pi_{n+1}$ olur. (Σ_n), (Π_n) ve (Δ_n) monoton dizilerdir. Bunların ayrıntılı incelenmesine girmeyeceğiz.

Bizi özellikle Δ_0, Σ_1 ve Π_1 formülleri ilgilendirecektir. $\varphi(\overline{x_n}) \in \Delta_0$ olmak üzere $\psi := \dot{\forall}\overline{x_n}\varphi(\overline{x_n})$ *kesin* Π_1 ve $\eta := \dot{\exists}\overline{x_n}\varphi(\overline{x_n})$ *kesin* Σ_1 formülüdür denir. $\varphi \in \Delta_0 \Longrightarrow \neg\varphi \in \Delta_0$ olduğundan

$$\neg\dot{\forall}x_1, \ldots, x_n\varphi(x_1, \ldots, x_n) \equiv \dot{\exists}x_1, \ldots, x_n\neg\varphi(x_1, \ldots, x_n)$$
$$\neg\dot{\exists}x_1, \ldots, x_n\varphi(x_1, \ldots, x_n) \equiv \dot{\forall}x_1, \ldots, x_n\neg\varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

olur. Dolayısıyla: ψ kesin Π_1 formülüdür $\Longleftrightarrow \neg\psi$ kesin Σ_1 formülüdür ve elbette: η kesin Σ_1 formülüdür $\Longleftrightarrow \neg\eta$ kesin Π_1 formülüdür. $\eta \in \Sigma_1$ formülü yarı belirlenebilir bir $P = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n \mid \eta(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}) \in \operatorname{Th}\mathfrak{N}\}$ bağıntısı tanımlarken $\psi \in \Pi_1$ formülleri tümleyenleri yarı belirlenebilir olan bağıntılar tanımlarlar. Σ_1 ve Π_1 formülleri Gödel'in eksiklik teoremlerinde kendilerini gösterirler. Biraz açalım.

$\mathcal{K} = (L_a, \Gamma)$ kuramı verilsin ve $\Omega \subseteq \operatorname{Sav} L_a$ olsun.

$$\forall\sigma \in \Omega\ (\mathcal{K} \vdash \sigma \Longrightarrow \sigma \in \operatorname{Th}\mathfrak{N}) \tag{5.14}$$

ise $\mathcal{K}$ kuramı Ω-**dürüst** diyelim. Başka sözlerle $\mathcal{K}$ kuramı Ω'daki yanlış savları kanıtlayamaz. Eğer $\mathfrak{N}$ yapısı $\mathcal{K}$ kuramının bir modeli ise, örneğin $\mathcal{K} = \mathcal{K}_a$ ise $\mathcal{K}$ kuramı $\operatorname{Sav} L_a$-dürüsttür.

$$\forall\sigma \in \Omega\ (\sigma \in \operatorname{Th}\mathfrak{N} \Longrightarrow \mathcal{K} \vdash \sigma)$$

ise $\mathcal{K}$ kuramı Ω-**yeterli** diyelim.

Teorem 5.5.4 *$\mathcal{K} = (L_a, \Gamma)$ kuramı Σ_1-dürüst ve Σ_1-yeterli olsun. O zaman*

$$\forall \sigma \in \Pi_1 (\sigma \in \operatorname{Th} \mathfrak{N} \Longleftrightarrow \mathcal{K} \nvdash \neg\sigma).$$

Sonuç 5.5.5 *Teoremin koşullarında $\mathcal{K}$ kuramı en az bir doğru $\sigma \in \Pi_1$ savını kanıtlayamıyorsa tam değildir.*

Kanıt. 1. $\sigma \in \Pi_1 \cap \operatorname{Th} \mathfrak{N}$ olsun. $\neg\sigma \in \Sigma_1$ ve $\neg\sigma \notin \operatorname{Th} \mathfrak{N}$ olur. (5.14)'ten $\mathcal{K} \nvdash \neg\sigma$ elde ederiz.

2. $\sigma \in \Pi_1$ ve $\mathcal{K} \nvdash \neg\sigma$ olsun. $\neg\sigma \in \Sigma_1$ ve $\mathcal{K}$ kuramı Σ_1-yeterli olduğundan $\neg\sigma \notin \operatorname{Th} \mathfrak{N}$, dolayısıyla $\sigma \in \operatorname{Th} \mathfrak{N}$ olur. ■

Teorem 5.5.6 *$\mathcal{K} = (L_a, \Gamma)$ kuramı Σ_1-dürüst, Σ_1-yeterli ve tutarlı olsun. $\mathcal{K} \leq \mathcal{K}'$ ise $\mathcal{K}'$ kuramının tutarlı olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{K}'$ kuramının Π_1-dürüst olmasıdır.*

Kanıt. $\mathcal{K}'$ tutarsızsa her formülü kanıtlayacağından dürüst olamaz. Tersine $\mathcal{K}'$ kuramı Π_1-dürüst olmasın. Bu durumda en az bir yanlış $\sigma \in \Pi_1$ için $\mathcal{K}' \vdash \sigma$ olur. $\neg\sigma \in \Sigma_1$ doğru olacağından varsayımdan $\mathcal{K} \vdash \neg\sigma$, dolayısıyla $\mathcal{K}' \vdash \neg\sigma$ olur. Sonuçta $\mathcal{K}' \vdash \sigma, \neg\sigma$ olduğundan $\mathcal{K}'$ tutarsızdır. ■

İleride $\mathcal{K}_a$ kuramının, hatta ondan daha zayıf olan ileride tanımlayacağımız $\mathcal{K}_{ra}$ Robinson kuramının Σ_1-yeterli olduğunu kanıtlayacağız. $\mathfrak{N}$ yapısı bu kuramların modeli olduğundan bunlar $\operatorname{Sav} L_a$-dürüsttürler. Diğer yandan ileride her $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \Delta_0$ ve her $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}) \in \operatorname{Th} \mathfrak{N} &\Longrightarrow \mathcal{K}_{ra} \vdash \varphi(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}) \\ \varphi(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}) \notin \operatorname{Th} \mathfrak{N} &\Longrightarrow \mathcal{K}_{ra} \nvdash \varphi(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}) \end{aligned} \tag{5.15}$$

olduğunu göstereceğiz. Öyleyse $\dot{\exists}\overline{x_n}\varphi(\overline{x_n}) \in \Sigma_1$ doğru ise en az bir $(\overline{a_n}) \in \mathbb{N}^n$ için $\varphi(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}) \in \operatorname{Th} \mathfrak{N}$ ve (5.15) ile $\mathcal{K}_{ra} \vdash \varphi(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n})$ olur. Buradan da $\mathcal{K}_{ra} \vdash \dot{\exists}\overline{x_n}\varphi(\overline{x_n})$ elde ederiz. Böylece $\mathcal{K}_{ra}$ kuramı Σ_1 yeterlidir. Dolayısıyla $\mathcal{K}_{ra}$ veya $\mathcal{K}_a$ kuramının tam olmadığını, dd. eksik olduğunu kanıtlamak için $\mathcal{K}_{ra} \nvdash \sigma$ veya $\mathcal{K}_a \nvdash \sigma$ olan bir $\sigma \in \Pi_1$ bulmak yeterlidir.

Not 5.5.7 $\mathcal{K} = (L_a, \Gamma)$ kuramı (5.5.4)'ün koşullarını sağlayan bir kuram olsun; özellikle $\mathcal{K}$ kuramı $\mathcal{K}_{ra}$ veya $\mathcal{K}_a$ olabilir. $\sigma_g := \dot{\forall} x \gamma(x)$ Goldbach sanısı için $\sigma_g \in \Pi_1$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla σ_g yanlışsa $\neg\sigma_g$ doğru olacağından $\mathcal{K} \vdash \neg\sigma_g$ olur. Diğer yandan eğer $\mathcal{K} \nvdash \neg\sigma_g$ ise (5.5.4)'ten σ_g Goldbach sanısının doğruluğunu elde ederiz. Şimdi $\mathcal{K}' := (L, \Gamma \cup \{\sigma_g\})$ kuramına bakalım. Bu kuram tutarlı ise $\mathcal{K}' \vdash \sigma_g$ olduğundan (5.5.6)'dan $\sigma_g \in \operatorname{Th} \mathfrak{N}$ ve σ_g doğru olur. Dolayısıyla $\mathcal{K}'$ kuramının tutarlılığı σ_g Goldbach sanısının kanıtı olur. Ancak henüz σ_g savının doğru olup olmadığını bilmediğimiz için $\mathcal{K}'$ kuramının tutarlı olup olmadığını bilmiyoruz. ▲

5.6 Gödel Teoremlerine Sezgisel Yaklaşım

Bu kesimde yine şimdilik belirlenebilirlik, hesaplanabilirlik, yanıtlamalar gibi sezgisel kavramlar ve onlara ilişkin bazı gerçekleri biliniyor varsayıp Gödel teoremlerinin kanıtlarının altında yatan ana düşünceleri kavrayarak bu teoremlerin sezgisel kanıtlarını vereceğiz. İleride "belirlenebilir bağıntılar ve belirlenebilir fonksiyonlar" yerlerini "yinelgen bağıntılar ve yinelgen fonksiyonlar" gibi matematiksel kavramlara, "hesaplanabilirlik ve yanıtlamalar" ise yerlerini "kayıt makinası ile hesaplanabilme ve kayıt makinaları" gibi matematiksel kavramlara bırakacaklardır.

Herhangi bir $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ biçimsel kuramının sözeden matematiğinde *(katıksız) biçimsel* kavramları diğerlerinden özenle ayıracağız. Örneğin *terim, formül, biçimsel kanıt,* $\Gamma \vdash \varphi$, *biçimsel tutarlılık* vb. kavramlar *(katıksız) biçimsel* kavramlardır. Buna karşın örneğin modeller üzerinden açıklanan $\Gamma \Vdash \varphi$, bir $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$, $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ ve bir $\beta \in D_L$ için $\mathfrak{A} \models \varphi\,[\beta]$ ve $\mathfrak{A} \models \varphi$ kavramları, anlamsal tutarlılık vb. kavramlar (katıksız) biçimsel kavramlar değildirler; örneğin $\mathfrak{A} \models \varphi$ kavramında φ katıksız biçimsel kavramken $\mathfrak{A}$ modeli bir biçimsel kavram değildir.

Bir $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ için $\operatorname{Th}\mathfrak{A} = \{\sigma \in \operatorname{Sav} L \mid \mathfrak{A} \models \sigma\}$ saf biçimsel bir kavram değildir. Biz özellikle $L = L_a$ diline ve $\mathfrak{N} \in \operatorname{Yap} L$ modeline odaklanacağız.

- **Aritmetiği Aksiyomlaştırma Problemi:** *Tutarlı ve belirlenebilir* $\Gamma \subseteq \operatorname{Sav} L_a$ *aksiyomlarını* $\operatorname{Th}\mathfrak{N} = \operatorname{Bt}\Gamma$ *olacak biçimde bulunuz.*

Bu eşitliğin sağ yanında saf biçimsel kavram varken sol yan öyle değildir. Peano aksiyomlarıyla buna ulaştığımızı sanıyorduk; Gödel'le öyle olmadığını, dd. $\operatorname{Bt}\mathcal{K}_a \subsetneqq \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ olduğunu, ayrıca her tutarlı $\mathcal{K}' = (L_a, \Gamma')$ kuramı için $\mathcal{K}_a \leq \mathcal{K}'$ ve Γ' belirlenebilir ise yine $\operatorname{Bt}\mathcal{K}' \subsetneqq \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ olduğunu öğrendik. Bu genelleştirilebilir.

Kolay izlenebilirlik açısından $\mathcal{K}_a$ kuramının aksiyomlarını şöyle adlandıracağız: $\varphi(x) \in \operatorname{Fm} L_a$ olmak üzere

$$
\begin{array}{ll}
S0 & \dot\forall x \neg (\mathbf{0} \doteq \mathbf{S}x) \\
SS & \dot\forall x, y\ \mathbf{S}x \doteq \mathbf{S}y \to x \doteq y \\
+0 & \dot\forall x\ (x \dot+ \mathbf{0}) \doteq x \\
+S & \dot\forall x, y\ (x \dot+ \mathbf{S}y \doteq \mathbf{S}(x \dot+ y)) \\
\cdot 0 & \dot\forall x\ x \bullet \mathbf{0} \doteq \mathbf{0} \\
\cdot S & \dot\forall x, y\ (x \bullet \mathbf{S}\mathbf{y}) \doteq (x \bullet y) \dot+ x \\
Tv\varphi & \varphi(\mathbf{0}) \curlywedge (\dot\forall x(\varphi(x) \to \varphi(\mathbf{S}x)) \to \dot\forall x \varphi(x)
\end{array}
$$

olsun. $\underline{0} = \mathbf{0}$ ve her $n \geq 1$ doğal sayısı için $\underline{n} = \mathbf{S}^n\mathbf{0}$ olarak açıkladığımızı anımsatalım. $\mathbf{S}^0\mathbf{0} := \mathbf{0}$ olsun.

Tanım 5.6.1 *L_a diline $\prec$ imini*

$$x \prec y \leftrightarrow \neg(x \doteq y) \curlywedge \dot{\exists} z\,(x \dot{+} z \doteq y) \tag{5.16}$$

tanımlayan aksiyomu ile katalım. $\preccurlyeq$ ise

$$x \preccurlyeq y \leftrightarrow x \prec y \curlyvee x \doteq y$$

tanımlayan aksiyomu ile katılsın.

Elbette 5.16 yerine tanımlayan aksiyom olarak

$$x \prec y \leftrightarrow \dot{\exists} z\,(\neg(z \doteq \mathbf{0}) \curlywedge x \dot{+} z \doteq y) \tag{5.17}$$

de alınabilir.

Önerme 5.6.2

$$\begin{array}{ll} Sr1 & \mathcal{K}_a \vdash \dot{\forall} x\ \neg\,(x \prec \mathbf{0})\,. \\ Sr2 & \mathcal{K}_a \vdash \dot{\forall} x, y(x \prec \mathbf{S}y \leftrightarrow (x \prec y \curlyvee x \doteq y)). \\ Sr3 & \mathcal{K}_a \vdash \dot{\forall} x, y\,(x \prec y \curlyvee x \doteq y \curlyvee y \prec x)\,. \end{array}$$

Bu önermenin uzun ve sıkıcı, ancak zor olmayan kanıtını vermeyeceğiz; okur örneğin [71]'e bakabilir. Ancak Sr3'ün kanıtında Tv tümevarım ilksavını kullanmak zorunda olduğumuzu belirtelim.

Kimi matematikçiler L_a diline daha baştan $\prec$ imini ekler ve Sr1, Sr2'yi bu imi yöneten sıralama aksiyomları olarak $\mathcal{K}_a$'nın aksiyomlarına katarlar ve Sr3'ü kanıtlarlar. İsterseniz Sr3'ü de baştan aksiyomlarınıza katarsınız. Sr1, Sr2 ve Sr3 aslında $\mathfrak{N}$ yapısındaki $<$ sıralamasının en temel özelliklerinin biçimselleştirilmesidir ve bunları aksiyom olarak seçmek son derece doğaldır.

Uzlaşma: Bundan sonra $\prec$ imini $\mathcal{K}_a$'nın tanımlanmış imi olarak almak yerine, onu daha baştan L_a dilinde varsayacağız ve Λ_a aksiyomlarına $Sr1,\ Sr2$ aksiyomlarını ekleyeceğiz. Bu işin özünü değiştirmez, yalnızca işimizi kolaylaştırır. Böylece bundan sonra L_a dili $\mathbf{S}$,$\dot{+}$,$\bullet$,$\prec$ ve $\mathbf{0}$ imlerinden oluşacaktır. Bu kesimde bundan sonra $\Gamma \subseteq \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$ olmak üzere $\mathcal{K} = (L_a, \Gamma)$ kuramlarına odaklanacağız. Okur isterse Sr3'ü de baştan $\mathcal{K}_a$'nın aksiyomu olarak alabilir.

Tanım 5.6.3

$$\Lambda_{ra} := \{S0, SS, +0, +S, \cdot 0, \cdot S, Sr1, Sr2, Sr3\}$$

olmak üzere $\mathcal{K}_{ra} := (L_a, \Lambda_{ra})$ kuramına ***Robinson Aritmetiği*** *denir.*

$\mathcal{K}_{ra}$ Robinson Aritmetiği'nin sonlu sayıda, 9 tane, aksiyomu vardır. Buna karşın Peano aritmetiğinin aksiyomları $Tv\varphi$ tümevarım aksiyom şemasından dolayı sonsuzdur. $\mathcal{K}_{ra} \leq \mathcal{K}_a$ olduğu apaçıktır. Λ_{ra} ve Λ_a belirlenebilir aksiyomlardır.

$\mathfrak{N}$-tanımlanabilir bağıntılara (ya da fonksiyonlara) kısaca **aritmetiksel bağıntı** (ya da aritmetik fonksiyon) diyeceğiz.

$\operatorname{Th}\mathfrak{N}$ tam olduğundan herhangi bir $\sigma \in \operatorname{Sav} L_a$ için $\sigma \notin \operatorname{Th}\mathfrak{N} \iff \neg\sigma \in \operatorname{Th}\mathfrak{N}$; bu nedenle R'nin aritmetiksel olması aşağıdaki iki çıkarıma denktir:

$$(n_1, \ldots, n_k) \in R \Longrightarrow \varphi\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k}\right) \in \operatorname{Th}\mathfrak{N},$$
$$(n_1, \ldots, n_k) \notin R \Longrightarrow \neg\varphi\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k}\right) \in \operatorname{Th}\mathfrak{N}.$$

Ayrıca

$$(n_1, \ldots, n_k) \in R^c \iff \neg\varphi\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k}\right) \in \operatorname{Th}\mathfrak{N} \tag{5.18}$$

olduğundan herhangi bir R bağıntısı aritmetikselse R^c tümleyeni de aritmetikseldir.

Lemma 5.6.4 *$R \subseteq \mathbb{N}^k$ bağıntısı için aşağıdakiler geçerlidir:*

1. *R'nin $\mathfrak{N}$-tanımlanabilir olması için gerek ve yeter koşul χ_R özgün fonksiyonunun $\mathfrak{N}$-tanımlanabilir olmasıdır.*
2. *R bağıntısı $\mathfrak{N}$-tanımlanabilirse R^c bağıntısı da $\mathfrak{N}$-tanımlanabilir.*
3. *R bağıntısı $\mathfrak{N}$-tanımlanabilirse*

$$\pi_{<k}R := \{(n_1, \ldots, n_{k-1}) \mid \exists n_k\ ((n_1, \ldots, n_k) \in R)\}$$

izdüşümü de $\mathfrak{N}$-tanımlanabilir.

Kanıt. $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ formülü R bağıntısını tanımlasın. Bu durumda y değişkeni $x_1, \ldots, x_k$ değişkenlerinden farklı olmak üzere

$$\psi(x_1, \ldots, x_k, y) := (\varphi(x_1, \ldots, x_k) \curlywedge y \doteq \mathbf{1}) \curlyvee (\neg\varphi(x_1, \ldots, x_k) \curlywedge y \doteq \mathbf{0})$$

formülü $\chi_R(n_1, \ldots, n_k) = n \iff \left(\psi\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k}, \underline{n}\right) \in \operatorname{Th}\mathfrak{N}\right)$ olduğundan χ_R fonksiyonunu $\mathfrak{N}$-tanımlar.

Tersine χ_R fonksiyonu $\eta \in \Phi_s^{k+1}$ ile $\mathfrak{N}$-tanımlanmışsa R bağıntısı

$$\varphi(x_1, \ldots, x_k) := \eta(x_1, \ldots, x_k, \mathbf{1})$$

formülü ile $\mathfrak{N}$-tanımlanır.

İkinci sav doğrudan (5.18)'den çıkar.

Eğer R bağıntısı $\varphi \in \Phi_s^k$ ile $\mathfrak{N}$-tanımlanmışsa $\pi_{<k}R$ bağıntısı $\dot{\exists}x_k\varphi \in \Phi_s^{k-1}$ ile $\mathfrak{N}$-tanımlanır. ■

Şimdi ileride kanıtlanacak aşağıdaki teoremi ödünç alarak Gödel Eksiklik Teoremlerimizi kanıtlayacağız.

Teorem 5.6.5 (Tanımlanabilirlik Teoremi) *1. $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ fonksiyonu hesaplanabilirse $\mathfrak{N}$-tanımlanabilir.*

2. Her belirlenebilir $A \subseteq \mathbb{N}^k$ bağıntısı $\mathfrak{N}$-tanımlanabilir.

3. Her algoritmik sayılabilir $A \subseteq \mathbb{N}^k$ kümesi $\mathfrak{N}$-tanımlanabilir.

(2) ve (3) doğrudan (5.6.4) ve (1)'den çıkar; borcumuz teoremin ilk kısmıdır. Şimdilik bu teoremin $k = 1$ özel durumu işimizi görecektir.

L_a bir uz dil olduğundan $\operatorname{Fm} L_a$ belirlenebilir ve biz $\operatorname{Fm} L_a$'yı

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_3, \dots \tag{5.19}$$

olarak algoritmik listeleyebiliriz. Bu listelemeyi sabit tutalım.

Bir $x \in \mathcal{V}$ değişkenini seçip sabit tutalım ve her $t \in \operatorname{Tm} L_a$ ve her $\varphi \in \operatorname{Fm} L_a$ için $\varphi(x|t)$ yerine yalın olarak $\varphi(t)$ yazalım. (5.3.10)'dan dolayı

$$\mathbb{N} \to \operatorname{Fm} L_a \quad (n \rightsquigarrow \varphi_n(\underline{n}))$$

dönüşümü hesaplanabilir. Her $\varphi \in \operatorname{Fm} L_a$ için

$$\#\varphi := \min\{n \,|\, \varphi = \varphi_n\}$$

olsun. Elbette

$$\operatorname{Fm} L_a \to \mathbb{N} \ (\varphi \rightsquigarrow \#\varphi)$$

hesaplanabilir. Bunun için bir algoritma şöyle verilir: φ verildiğinde (5.19) baştan başlayarak taranır ve ilk kez p için $\varphi = \varphi_p$ olduğunda $\#\varphi = p$ olur. Bu kesimde (5.19) dizisini sabit tutacağımızı bir kez daha belirtelim.

Tanım 5.6.6 *$U \subseteq \mathbb{N}^2$ bağıntısı her $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ için*

$$(m, n) \in U :\Longleftrightarrow \varphi_m(\underline{n}) \in \operatorname{Th} \mathfrak{N} \tag{5.20}$$

olarak açıklansın.

$U_m = \{n \in \mathbb{N} \,|\, \varphi_m(\underline{n}) \in \operatorname{Th} \mathfrak{N}\}$ kümeleri $\mathbb{N}$'nin tüm $\mathfrak{N}$-tanımlanabilir altkümelerini kapsar. Dolayısıyla Cantor Köşegen Lemması'ndan

$$D_U = \{n \mid (n, n) \in U\} = \{n \mid \varphi_n(\underline{n}) \in \operatorname{Th} \mathfrak{N}\}$$

olmak üzere D_U^c *kümesi* $\mathfrak{N}$*-tanımlanamaz*, Bu kesimde U daima (5.20) ile tanımlanan bağıntıyı gösterecektir.

Teorem 5.6.7 $\operatorname{Th} \mathfrak{N}$ *belirlenemez, dolayısıyla belirlenebilir bir* Γ *ile aksiyomlaştırılamaz.*

Kanıt. *1.Kanıt:* $\operatorname{Th}\mathfrak{N}$'nin belirlenebilir olduğunu varsayalım. Cantor Köşegen Lemması ile D_U^c'nin $\mathfrak{N}$-tanımlanamaz olduğunu öğrendik. (5.6.4)(2)'den D_U da $\mathfrak{N}$-tanımlanamaz. (5.3.6)'dan dolayı D_U belirlenebilir ve (5.6.5)-(2)'den dolayı $\mathfrak{N}$-tanımlanabilir. Çelişki! Varsayım yanlış ve $\operatorname{Th}\mathfrak{N}$ belirlenemez.

2.Kanıt: $\operatorname{Th}\mathfrak{N}$ belirlenebilirse (5.3.6)'dan dolayı D_U belirlenebilir. D_U ve D_U^c bağıntıları (5.6.5)(2) ve (5.6.4)(2)'den dolayı $\mathfrak{N}$-tanımlanabilir. $\varphi \in \Phi_s^1$ formülü D_U^c bağıntısını $\mathfrak{N}$-tanımlasın ve $k := \#\varphi$, dd. $\varphi = \varphi_k$ olsun. Bu durumda

$$\varphi_k(\underline{k}) \in \operatorname{Th}\mathfrak{N} \Longleftrightarrow (k,k) \in D_U^c \Longleftrightarrow (k,k) \notin D_U \Longleftrightarrow \varphi_k(\underline{k}) \notin \operatorname{Th}\mathfrak{N}$$

çelişkisine ulaşırız; $\operatorname{Th}\mathfrak{N}$ belirlenemez.

Belirlenebilir ve tutarlı bir Γ ile $\operatorname{Th}\mathfrak{N} = \operatorname{Bt}\Gamma$ olsaydı (5.3.15)'ten dolayı $\operatorname{Th}\mathfrak{N}$ belirlenebilir olurdu; ancak bunun olmadığını biliyoruz. ■

Bu teoremi genelleştirebiliriz; ancak önce bir önerme kanıtlayacağız.

Önerme 5.6.8 *1. L algoritmik sayılabilir bir dil ve $\Gamma \subseteq \operatorname{Sav} L$ algoritmik sayılabilir olmak üzere $\operatorname{Bt}\Gamma$ algoritmik sayılabilir.*

2. $\Gamma \subseteq \operatorname{Sav} L$ tutarlı, çıkarımsal kapalı, tam ve algoritmik sayılabilirse Γ belirlenebilir.

Kanıt. 1. Γ ilksavları $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ olarak algoritmik listelensin. Önce Γ ilksavlarını kullanan kanıtların bir algoritmik listesi şöyle oluşturulur. n. adımda uzunluğu n'yi geçmeyen, en fazla ilk n değişkeni ve $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ aksiyomlarını kullanan kanıtlar listelenir. Kanıtların algoritmik listesinden kanıtların son formüllerinin sav olanları alınarak $\operatorname{Bt}\Gamma$ için bir algoritmik liste oluşturulur.

2. $\sigma \in \operatorname{Sav} L$ keyfi verildiğinde $\sigma \in \Gamma$ olup olmadığı şöyle belirlenir. Önce Γ için bir $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$ algoritmik listesi oluşturulmaya başlanır. Γ tam olduğundan $\Gamma \vdash \sigma$ veya $\Gamma \vdash \neg\sigma$, buradansa Γ çıkarımsal kapalı olduğundan $\sigma \in \Gamma$ veya $\neg\sigma \in \Gamma$, buradan da Γ tutarlı olduğundan ya $\sigma \in \Gamma$ ya da $\neg\sigma \in \Gamma$. Γ'nin algoritmik listesi izlenir; er veya geç bu listede ya σ'ya rastlarız ve $\sigma \in \Gamma$ olur, ya da $\neg\sigma$'ya rastlarız ve bu durumda da $\sigma \notin \Gamma$ olur. ■

Teorem 5.6.9 *$\Gamma \subseteq \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ algoritmik sayılabilirse $\operatorname{Bt}\Gamma \subsetneq \operatorname{Th}\mathfrak{N}$, dd. $\Gamma \nvdash \sigma$ olan en az bir $\sigma \in \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ savı vardır. Bu nedenle $\operatorname{Th}\mathfrak{N}$ aritmetik kuramı algoritmik sayılabilir aksiyomlarla aksiyomlaştırılamaz.*

Kanıt. $\Gamma \subseteq \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ etkin sayılabilir verilsin. (5.6.8)(1)'den $\operatorname{Bt}\Gamma$ etkin sayılabilir. Γ tutarlı olduğundan $\operatorname{Bt}\Gamma$ tutarlı, çıkarımsal kapalı ve etkin sayılabilir; eğer ayrıca $\operatorname{Bt}\Gamma = \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ olsaydı (5.6.8)(2)'den $\operatorname{Bt}\Gamma$, dolayısıyla $\operatorname{Th}\mathfrak{N}$ belirlenebilir olurdu! Bu (5.6.7) ile çelişir. ■

Tanım 5.6.10 $\mathcal{K} := (L_a, \Gamma)$ *kuramı verildiğinde bir* $V_{\mathcal{K}} \subseteq \mathbb{N}^2$ *bağıntısını her* $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ *için*

$$(m,n) \in V_{\mathcal{K}} :\Longleftrightarrow \varphi_m(\underline{n}) \in \mathrm{Bt}\,\mathcal{K} \Longleftrightarrow \mathcal{K} \vdash \varphi_m(\underline{n})$$

olarak tanımlıyoruz.

Şimdi $\mathcal{K} := (L_a, \Gamma)$ ve $\Gamma \subseteq \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$ olsun. $\mathcal{K}$ kuramı belli ve karıştırma endişemiz olmadığı sürece $V_{\mathcal{K}}$ yerine yalın olarak V yazacağız. Şimdi elimizde, bu bölümün birinci kesiminde (5.1.1)'e benzer biçimde U ve V gibi iki bağıntımız var. Yine orada olduğu gibi burada da $V \subseteq U$. Cantor Köşegen Lemması'ndan dolayı her $m \in \mathbb{N}$ için $D_V^c \neq V_m$. Ancak bir $k \in \mathbb{N}$ ile $U_k = D_V^c$ olabilir. Bu durum söz konusu olduğunda orada olduğu gibi burada da—beklenmeyen veya aranan şey, ya da adını ne koyarsanız koyun—karşımıza köşegen üzerinde (k,k)'ye, yani $\varphi_k(\underline{k})$'ye odaklandığımızda çıkacaktır. $U_k = D_V^c$ olduğundan $(k,k) \in U_k \Longleftrightarrow (k,k) \in D_V^c \Longleftrightarrow (k,k) \notin D_V$ ve dolayısıyla

$$\varphi_k(\underline{k}) \in \mathrm{Th}\,\mathfrak{N} \Longleftrightarrow \varphi_k(\underline{k}) \notin \mathrm{Bt}\,\mathcal{K} \Longleftrightarrow \mathcal{K} \nvdash \varphi_k(\underline{k}) \tag{5.21}$$

elde ederiz. (5.21) Gödel yaklaşımının düşünce bazında özüdür: Elimizde $\mathfrak{N}$ yapısındaki doğruluğu $\mathcal{K}$ kuramındaki biçimsel kanıtlanamazlığına denk olan bir önermemiz var.

Teorem 5.6.11 (Birinci Gödel Eksiklik Teoremi a) $\Gamma \subseteq \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$ *belirlenebilirse* $\mathcal{K} = (L_a, \Gamma)$ *kuramı tam değildir, dd. eksiktir.*

Sonuç 5.6.12 $\mathcal{K}_{ra} = (L_a, \Lambda_{ra})$ *ve* $\mathcal{K}_a = (L_a, \Lambda_a)$ *tam değildirler.*

Kanıt. İki kanıt vereceğiz. $\Gamma \subseteq \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$ belirlenebilir olsun.

1. Kanıt: $\mathcal{K} = (L_a, \Gamma)$'yı tam varsayalım. (5.3.15)'den dolayı $\mathrm{Bt}\,\mathcal{K}$ belirlenebilir. (4.2.3)(2)'den $\mathrm{Bt}\,\mathcal{K} = \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$ ve dolayısıyla $\mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$ belirlenebilir olurdu ki bu (5.6.7) ile çelişir.

2. Kanıt: Bu, Gödel'in kanıtını yansıtan kurucu bir kanıt olacaktır: $\mathcal{K}$'nin eksikliğine tanıklık eden bir $\mathrm{Bt}\,\mathcal{K}$ algoritmik sayılabilir ve $V = V_{\mathcal{K}}$ olmak üzere (5.3.6) ile D_V algoritmik sayılabilir (5.6.5)(3)'ten $D_V \subseteq \mathbb{N}$ bağıntısı $\mathfrak{N}$-tanımlanabilir ; dolayısıyla (5.6.4)(2)'den D_V^c de $\mathfrak{N}$-tanımlanabilir. $\psi_{\mathcal{K}} \in \Phi_s^1(L_a)$ formülü D_V^c'yi tanımlasın. $k := \#(\psi_{\mathcal{K}})$ olmak üzere $\psi_{\mathcal{K}} = \varphi_k$ ve $U_k = D_V^c$ olduğundan (5.21) geçerlidir. Dolayısıyla $\sigma_{\mathcal{K}} := \varphi_k(\underline{k})$ olmak üzere

$$\sigma_{\mathcal{K}} \in \mathrm{Th}\,\mathfrak{N} \Longleftrightarrow \sigma_{\mathcal{K}} \notin \mathrm{Bt}\,\mathcal{K} \Longleftrightarrow \mathcal{K} \nvdash \sigma_{\mathcal{K}} \tag{5.22}$$

olur. Şimdi $\mathcal{K}$'nin ne $\sigma_{\mathcal{K}}$ ne de $\neg\sigma_{\mathcal{K}}$ savını kanıtlayamayacağını göstereceğiz. Tartışmalarımızda $\Gamma \subseteq \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$ olduğundan $\mathcal{K}$'nin tutarlı ve $\mathrm{Bt}\,\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$ olduğunu unutmayalım.

(a) $\mathcal{K} \vdash \sigma_{\mathcal{K}}$ varsayalım. $\sigma_{\mathcal{K}} \in \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ olur; bu ve (5.22)'den $\mathcal{K} \nvdash \sigma_{\mathcal{K}}$ elde ederiz. Böylece $\mathcal{K} \vdash \sigma_{\mathcal{K}}, \neg\sigma_{\mathcal{K}}$ ve bu $\mathcal{K}$'nin tutarlılığıyla çelişir. Öyleyse $\mathcal{K} \nvdash \sigma_{\mathcal{K}}$.

(b) $\mathcal{K} \vdash \neg\sigma_{\mathcal{K}}$ varsayalım. $\neg\sigma_{\mathcal{K}} \in \operatorname{Th}\mathfrak{N}$, dolayısıyla $\sigma_{\mathcal{K}} \notin \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ olur ve bu bize (5.22) ile $\mathcal{K} \vdash \sigma_{\mathcal{K}}$ çıkarımını verir. Ancak (a)'da bunun olamayacağını gördük, dolayısıyla varsayımımız yanlıştır ve $\mathcal{K} \nvdash \neg\sigma_{\mathcal{K}}$.

Böylece $\mathcal{K}$ kuramı ne $\sigma_{\mathcal{K}}$ savını ne de $\neg\sigma_{\mathcal{K}}$ savını kanıtlayamaz ve tam değildir.

$\Lambda_{ra}, \Lambda_a \subset \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ ve bu aksiyomlar belirlenebilir olduklarından, ek doğrudan teoremden çıkar. ■

Not 5.6.13 Eksiklik Teoremi'yle ayrıca şunu da öğrenmiş oluyoruz: $\mathcal{K}_a$ kuramının eksikliği ona akıllıca seçilmiş yeni aksiyomlar katarak da, aksiyomlarımız belirlenebilir kaldığı sürece giderilemez. Biz $\operatorname{Bt}\mathcal{K}_a = \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ olmasını umuyorduk, ancak $\Gamma \subseteq \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ belirlenebilir olduğu sürece $\operatorname{Bt}\Gamma \subsetneqq \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ olduğunu öğrendik.

$\sigma_{\mathcal{K}}, \neg\sigma_{\mathcal{K}} \notin \operatorname{Bt}\Gamma$ olduğunu öğrendik; yine de bu savlardan biri ve yalnızca biri $\mathfrak{N}$'de doğrudur. $\neg\sigma_{\mathcal{K}} \in \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ olsaydı $\sigma_{\mathcal{K}} \notin \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ olurdu ve biz (5.22) ile $\sigma_{\mathcal{K}} \in \operatorname{Bt}\mathcal{K}$ elde ederdik ki kanıtın (a) şıkkında bunun doğru olmadığını gördük. Öyleyse $\sigma_{\mathcal{K}} \in \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ olmalıdır. Dolayısıyla $\sigma_{\mathcal{K}}$ savı $\mathfrak{N}$ *modelinde doğru* ancak $\mathcal{K}$ *kuramında biçimsel kanıtlanamazdır.* Bunda yadırganacak hiçbir şey yoktur. $\mathcal{K}$ kuramı tüm modellerinde doğru olan savları kanıtlar, dolayısıyla herhangi bir modeli verildiğinde, onda doğru olan ancak $\mathcal{K}$ kuramının kanıtlayamadığı bir savın bulunması beklenmeyen bir durum değil tam tersine beklenen bir durumdur. "Doğru ama kanıtlanamayan önermelerin varlığı" veya benzeri söylemler nerede doğru ve hangi anlamda kanıtlanamazlık belirtilmediği sürece çoğu insanda kafa karışıklığına yol açar ve açmıştır da! $\Gamma' := \Gamma \cup \{\sigma_{\mathcal{K}}\}$ aksiyomları da belirlenebilir ve $\mathcal{K}' := (L_a, \Gamma')$ kuramına geçtiğimizde elbette $\mathcal{K}' \vdash \sigma_{\mathcal{K}}$ olur. Ancak bu kez aynı yöntemle başka bir $\sigma_{\mathcal{K}'}$ savı $\mathfrak{N}$'de doğru ancak $\mathcal{K}' \nvdash \sigma_{\mathcal{K}'}$ olacak biçimde vardır.

$$\sigma_{\mathcal{K}} \notin \operatorname{Bt}\mathcal{K} \Longleftrightarrow \sigma_{\mathcal{K}} \in \operatorname{Th}\mathfrak{N} \tag{5.23}$$

olduğundan doğru olan $\sigma_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{N}}$ yorumu "$\sigma_{\mathcal{K}} \notin \operatorname{Bt}\mathcal{K}$" önermesine denk olur. Bir anlamda $\sigma_{\mathcal{K}}$ savının $\sigma_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{N}}$ yorumu "Ben $\mathcal{K}$ kuramında kanıtlanamam" anlamına gelir. Bu durum bize "Bu cümle yanlıştır", "Ben yanlışım" veya "Şu an yalan söylüyorum" ve benzeri biçimde dile getirilen yalancı açmazını hatırlatır. Ancak burada yalnızca bir yarı benzerlik vardır. $\sigma_{\mathcal{K}}$ savının $\mathfrak{N}$'deki yorumu asla kendisinin $\mathfrak{N}$'de yanlış olduğunu öne sürmez; böyle bir şey

$$\sigma_{\mathcal{K}} \notin \operatorname{Th}\mathfrak{N} \Longleftrightarrow \sigma_{\mathcal{K}} \in \operatorname{Th}\mathfrak{N}$$

demek olurdu ve elbette bir çelişkidir. Buna karşın (5.23) asla çelişki içermez, $\sigma_{\mathcal{K}}$ kendi hakkında konuşsa da yanlış olduğunu söylemez, $\mathcal{K}$'de kanıtlanamaz olduğunu söyler. ▲

Tanım 5.6.14 *Bir $R \subseteq \mathbb{N}^k, k > 0$ bağıntısı ve $\mathcal{K} = (L_a, \Gamma)$ verilsin.*

1. Bir $\varphi \in \Phi_s^k$ her $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} (RI) \quad & (n_1, \ldots, n_k) \in R \implies \varphi\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k}\right) \in \mathrm{Bt}\,\mathcal{K}, \\ (RII) \quad & (n_1, \ldots, n_k) \notin R \implies \neg\varphi\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k}\right) \in \mathrm{Bt}\,\mathcal{K} \end{aligned}$$

*olacak biçimde bulunabiliyorsa ve ancak bu durumda R bağıntısı $\mathcal{K}$-(**kuramında)-temsil edilebilir** veya **söylenebilir** diyeceğiz. Bu durumda φ formülü R bağıntısını $\mathcal{K}$'de **temsil eder** veya **betimler** veya **söyler** denir.*

2. Bir $\varphi \in \Phi_s^k$ her $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ için

$$(n_1, \ldots, n_k) \in R \Longleftrightarrow \varphi\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k}\right) \in \mathrm{Bt}\,\mathcal{K} \tag{5.24}$$

*olacak biçimde bulunabiliyorsa ve ancak bu durumda R bağıntısı $\mathcal{K}$-(**kuramında) zayıf temsil edilebilir** diyeceğiz. Bu durumda φ formülü R bağıntısını $\mathcal{K}$'de **zayıf temsil eder** veya **zayıf betimler** denir.*

*3. Bir $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ fonksiyonuna ava- izleyen koşul sağlandığında $\mathcal{K}$-**temsil edilebilir** denir: Bir $\psi \in \Phi_s^{k+1}$ formülü her $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ için*

$$\mathcal{K} \vdash \quad \psi\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k}, y\right) \longleftrightarrow y \doteq \underline{f\left(n_1, \ldots, n_k\right)} \tag{5.25}$$

olacak biçimde vardır.

$\mathcal{K}$-temsil edilebilme kavramı $\mathfrak{N}$ yapısı ve $\mathcal{K}$ kuramı üzerinden tanımlıdır; işin içine yalnız L_a dilinin zenginliği değil $\mathcal{K}$ kuramının gücü de karışır ve bu kavram L_a-tanımlanabilirlikten farklıdır.

Her şeyden önce (5.24) aşağıdaki iki koşula denktir: Her $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} ZRI \quad & (n_1, \ldots, n_k) \in R \Longrightarrow \varphi\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k}\right) \in \mathrm{Bt}\,\mathcal{K} \\ ZRII \quad & (n_1, \ldots, n_k) \notin R \Longrightarrow \varphi\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k}\right) \notin \mathrm{Bt}\,\mathcal{K} \end{aligned}$$

(5.25) ise aşağıdaki iki koşula denktir: Her $n_1, \ldots, n_k, m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} FI \quad & f\left(n_1, \ldots, n_k\right) = m \Longrightarrow \mathcal{K} \vdash \psi\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k}, \underline{m}\right) \\ FII \quad & \mathcal{K} \vdash \dot{\exists}! y \psi\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k}, y\right). \end{aligned}$$

$\mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$ anlamsalken $\mathrm{Bt}\,\mathcal{K}$ saf biçimseldir; bir bağıntının $\mathfrak{N}$'de tanımlanabilir olması ve $\mathcal{K}$'de temsil edilebilir olmaları özde farklı kavramlardır. $\mathrm{Bt}\,\mathcal{K} \subseteq$

$\operatorname{Th}\mathfrak{N}$ olan kuramlar, özellikle $\mathcal{K}_a$ ile ilgilenmekteyiz. $\mathcal{K}$ böyle bir kuram olsun ve φ ise R bağıntısını $\mathcal{K}$'de temsil etsin. Bu durumda φ'nin $\mathfrak{N}$'de R bağıntısını tanımladığı apaçıktır, dd.

$$\operatorname{Bt}\mathcal{K} \subseteq \operatorname{Th}\mathfrak{N} \text{ ve } \varphi \text{ formülü } \mathcal{K}\text{'de } R\text{'yi temsil ediyorsa } R = R_\varphi. \qquad (5.26)$$

Ancak $\operatorname{Bt}\mathcal{K} \subsetneqq \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ ise bazı φ formülleri $\mathfrak{N}$ yapısında R_φ bağıntısını tanımlarken, R_φ bağıntısını $\mathcal{K}$ kuramında temsil etmiyor olabilirler.

$\operatorname{Bt}\mathcal{K}$ kuramının tam olması gerekmediğinden herhangi bir $\sigma \in \operatorname{Sav} L_a$ için "$\sigma \notin \operatorname{Bt}\mathcal{K} \iff \neg\sigma \in \operatorname{Bt}\mathcal{K}$" geçerli değildir. Bu nedenle bu tanımda (5.4.5)'te olduğu gibi (RI)'de $\Longrightarrow$ yerine $\Longleftrightarrow$ yazmadığımıza dikkat ediniz. Eğer $\mathcal{K}$ tamsa $\sigma \notin \operatorname{Bt}\mathcal{K} \Longrightarrow \neg\sigma \in \operatorname{Bt}\mathcal{K}$ ve eğer $\mathcal{K}$ tutarlı ise $\neg\sigma \in \operatorname{Bt}\mathcal{K} \Longrightarrow \sigma \notin \operatorname{Bt}\mathcal{K}$ olduğunu gözetirsek aşağıdaki önerme aşikârdır.

Önerme 5.6.15 *Her tutarlı $\mathcal{K} = (L_a, \Gamma)$ ve her R bağıntısı için:*

1. *R, $\mathcal{K}$-temsil edilebilirse $\mathcal{K}$-zayıf temsil edilebilir.*
2. *Eğer $\mathcal{K}$ tamsa R bağıntısı $\mathcal{K}$-zayıf temsil edilebilirse $\mathcal{K}$-temsil edilebilir.*
3. *R, $\mathcal{K}$-temsil edilebilir $\Longleftrightarrow$ R^c, $\mathcal{K}$-temsil edilebilir.*
4. *R, $\mathcal{K}$-temsil edilebilir ve $\mathcal{K} \leq \mathcal{K}'$ ise R, $\mathcal{K}'$-temsil edilebilir.*
5. *$\mathcal{K} \vdash \neg(\mathbf{0} \doteq \mathbf{1})$ ise (bu $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{ra}, \mathcal{K}_a$ için sağlanır) R'nin $\mathcal{K}$-temsil edilebilir olması için χ_R'nin $\mathcal{K}$-temsil edilebilmesi gerek ve yeterlidir.*

Kanıt. İlk dört sav doğrudan tanımların bir sonucudur.

R bağıntısı $\varphi \in \Phi_s^k(L)$ ile $\mathcal{K}$-temsil ediliyorsa $y \neq x_1, \ldots, x_k$ olmak üzere

$$\psi(\overline{x_k}, y) := (\varphi(\overline{x_k}) \curlywedge y \doteq \mathbf{1}) \curlyvee (\neg\varphi(\overline{x_k}) \curlywedge y \doteq \mathbf{0})$$

ile tanımlanan $\psi \in \Phi_s^{k+1}$ formülü χ_R fonksiyonunu $\mathcal{K}$-temsil eder.

$\eta \in \Phi_s^{k+1}$ formülü χ_R fonksiyonunu $\mathcal{K}$-temsil ederse $\eta(\overline{x_k}, \mathbf{1}) \in \Phi_s^k$ formülü R bağıntısını $\mathcal{K}$-temsil eder. ■

Not 5.6.16 $\mathcal{K} = (L_a, \Gamma)$ olsun. Tanımın doğrudan sonucu $V = V_{\mathcal{K}}$ bağıntısının $\mathbb{N}$'nin $\mathcal{K}$-zayıf temsil edilebilir bağıntıları için evrenselliğidir, dd. $\mathcal{K}$-zayıf temsil edilebilir her $X \subseteq \mathbb{N}$ kümesi için uygun bir $m \in \mathbb{N}$ ile $X = V_m = \{n \mid \varphi_m(\underline{n}) \in \mathcal{K}\}$ olur. ▲

Teorem 5.6.17 (Temsil Edilebilirlik Teoremi) *$\mathcal{K} = (L_a, \Gamma)$ tutarlı bir kuram ve $\mathcal{K}_{ra} \leq \mathcal{K}$ olsun.*

1. *Her hesaplanabilir $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ fonksiyonu $\mathcal{K}$-temsil edilebilirdir.*
2. *Her belirlenebilir $R \subseteq \mathbb{N}^n$ bağıntısı $\mathcal{K}$-temsil edilebilirdir.*

3. *Ayrıca* Γ *belirlenebilirse her yarı belirlenebilir bağıntı* $\mathcal{K}$*-zayıf temsil edilebilir; hatta her yarı belirlenebilir* $R \subseteq \mathbb{N}^n$ *bağıntısına karşılık bir* $\varphi \in \Phi_s^n$ *formülü her* $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ *için*

$$\begin{aligned}(m_1, \ldots, m_n) \in R &\iff \varphi\left(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n}\right) \in \operatorname{Bt}\mathcal{K} \\ &\iff \varphi\left(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n}\right) \in \operatorname{Th}\mathfrak{N}\end{aligned}$$

olacak biçimde bulunabilir.

Bu teoremin kanıtını da erteleyip aşağıdaki teoremi (5.6.7)'ye benzer biçimde kanıtlayacağız.

Teorem 5.6.18 (Belirlenemezlik Teoremi) *$\mathcal{K}_{ra}$'yı kapsayan tutarlı $\mathcal{K} = (L_a, \Gamma)$ kuramları belirlenemez.*

Kanıt. *1.Kanıt:* $\mathcal{K}_{ra} \leq \mathcal{K}$ ve $\mathcal{K}$ tutarlı olsun. $\mathcal{K}$'yi belirlenebilir varsayalım. Bu durumda $V = V_{\mathcal{K}}$ olmak üzere D_V belirlenebilir, dolayısıyla D_V^c belirlenebilir. (5.6.17)(2)'den dolayı D_V^c bağıntısı $\mathcal{K}$-temsil edilebilir. (5.6.15)(1)'den dolayı D_V^c bağıntısı $\mathcal{K}$-zayıf temsil edilebilir. Diğer yandan V bağıntısı $\mathbb{N}$'deki $\mathcal{K}$-zayıf temsil edilebilir bağıntılar için evrensel olduğundan Cantor Köşegen Lemması'ndan D_V^c bağıntısı $\mathcal{K}$-zayıf temsil edilemez. Çelişki! $\mathcal{K}$ belirlenemez.

2.Kanıt: $\mathcal{K}$'yi belirlenebilir varsayalım. D_V ve D_V^c belirlenebilir olacaklardır. Az önceki gerekçelerle D_V^c bağıntısı $\mathcal{K}$-zayıf temsil edilebilir. $\varphi \in \Phi_s^1(L_a)$ formülü bu bağıntıyı $\mathcal{K}$-zayıf temsil etsin. $k := \#\varphi$ ise $\varphi = \varphi_k$ olur. Bu durumda

$$\varphi_k(\underline{k}) \in \operatorname{Bt}\mathcal{K} \iff (k,k) \in D_V^c \iff (k,k) \notin D_V \iff \varphi_k(\underline{k}) \notin \operatorname{Bt}\mathcal{K}$$

çelişkisine ulaşırız; $\mathcal{K}$ belirlenemez. ■

Sonuç 5.6.19 *Etkin sayılabilen ancak belirlenemeyen kümeler vardır.*

Kanıt. $\mathcal{K}_{ra} \leq \mathcal{K}$ olan her tutarlı $\mathcal{K} = (L_a, \Gamma)$ uz kuramı için $\operatorname{Bt}\mathcal{K}$ etkin sayılabilir ancak belirlenemez. ■

Not 5.6.20 Eksiklik Teoremi ve Belirlenemezlik Teoremi kimileri için olumsuz sonuçlar olarak görülebilir. Biz tam tersi düşüncedeyiz: Bu teoremler matematikçilerin işlerinin asla tümüyle makinalara devredilemeyeceğini ve çoğu matematiksel savların mekanik biçimde kanıtlanamayacağını ve kanıtlanmak için matematikçilerin yaratıcı düşüncelerine gereksinim duyulacağını matematiksel olarak kanıtlamış oldular. ▲

Teorem 5.6.21 (Birinci Gödel Eksiklik Teoremi b) *Her tutarlı* $\mathcal{K} = (L_a, \Gamma)$ *kuramı* $\mathcal{K}_{ra} \leq \mathcal{K}$ *ve* Γ *belirlenebilirse tam değildir.*

Kanıt. *1.Kanıt:* $\mathcal{K}$ kuramının tam olduğunu varsayalım. (5.3.15)'ten $\mathcal{K}$ belirlenebilir. Dolayısıyla $V = V_{\mathcal{K}}$ olmak üzere D_V ve D_V^c belirlenebilirler. (5.6.17)(3)'ten D_V^c bağıntısı $\mathcal{K}$-zayıf temsil edilebilir. Diğer yandan V bağıntısı $\mathbb{N}$'deki $\mathcal{K}$-zayıf temsil edilebilir bağıntılar için evrensel olduğundan Cantor Köşegen Lemması'ndan dolayı D_V^c bağıntısı $\mathcal{K}$-temsil edilemez. Bir çelişkiye ulaştık ve varsayım yanlıştır.

2.Kanıt: Bu yine kurgusal olacaktır; $\mathcal{K} \nvdash \sigma_{\mathcal{K}}, \neg\sigma_{\mathcal{K}}$ olacak biçimde bir $\sigma_{\mathcal{K}} \in \operatorname{Sav} L_a$ vereceğiz. $\mathcal{K}$ bir tutarlı uz kuram olsun. (5.3.12)'den dolayı $\operatorname{Bt}\mathcal{K}$ algoritmik sayılabilir. Dolayısıyla $V = V_{\mathcal{K}}$ olmak üzere D_V algoritmik sayılabilir. D_V bağıntısı uygun bir $\psi \in \Phi_s^1(L_a)$ ile (5.6.17)(3) tümüyle sağlanacak biçimde zayıf temsil edilebilir, ancak D_V^c'nin zayıf temsil edilebilir olması gerekmez. Ancak $\mathcal{K}$ tutarlı olduğundan yine de $\neg\psi$ formülü D_V^c'yi temsil etmese de $\{n \mid \neg\psi(\underline{n}) \in \operatorname{Bt}\mathcal{K}\} \subseteq D_V^c$ olur. Şimdi $k := \#(\neg\psi)$ olmak üzere $\neg\psi = \varphi_k$ olacağından umudumuz aradığımızı—şimdiye kadar olduğu gibi—köşegendeki (k, k) noktasına odaklandığımızda bulmaktır. ψ formülü D_V bağıntısını $\mathcal{K}$-zayıf temsil ettiğinden

$$\forall n \in \mathbb{N}\,(n \in D_V \Longleftrightarrow \psi(\underline{n}) \in \operatorname{Bt}\mathcal{K} \Longleftrightarrow \psi(\underline{n}) \in \operatorname{Th}\mathfrak{N}) \tag{5.27}$$

olur. $\varphi_k(\underline{k}) = \neg\psi(\underline{k})$ olduğundan

$$\psi(\underline{k}) \in \operatorname{Bt}\mathcal{K} \overset{(5.27)}{\Longleftrightarrow} k \in D_V \overset{def}{\Longleftrightarrow} \varphi_k(\underline{k}) \in \operatorname{Bt}\mathcal{K} \Longleftrightarrow \neg\psi(\underline{k}) \in \operatorname{Bt}\mathcal{K}.$$

ψ'nin seçimi $\mathcal{K}$'ye bağlıdır ve $\sigma_{\mathcal{K}} := \psi(\underline{k})$ savı için

$$\sigma_{\mathcal{K}} \in \operatorname{Bt}\mathcal{K} \Longleftrightarrow \neg\sigma_{\mathcal{K}} \in \operatorname{Bt}\mathcal{K} \tag{5.28}$$

denkliğine ulaştık. Dolayısıyla $\operatorname{Bt}\mathcal{K}$ kuramı $\sigma_{\mathcal{K}}$ ve $\neg\sigma_{\mathcal{K}}$ savlarından birini içerirse her ikisini de içerir; bu ise $\mathcal{K}$'nin tutarlılığıyla çelişir. Dolayısıyla $\operatorname{Bt}\mathcal{K}$ kuramı bu savların hiçbirini içermez, dd. $\mathcal{K} \nvdash \sigma_{\mathcal{K}}$ ve $\mathcal{K} \nvdash \neg\sigma_{\mathcal{K}}$. ■

Sezgisel olarak $\sigma_{\mathcal{K}}$ savı "Ben $\mathcal{K}$ kuramının bir teoremi değilim" der. $\sigma_{\mathcal{K}} \notin \operatorname{Bt}\mathcal{K}$ olduğundan (5.27) ile $\sigma_{\mathcal{K}} \notin \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ olur. Dolayısıyla $\rho_{\mathcal{K}} := \neg\sigma_{\mathcal{K}} \in \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ ve $\rho_{\mathcal{K}} \notin \operatorname{Bt}\mathcal{K}$ olur, dd. $\rho_{\mathcal{K}}$ savı $\mathfrak{N}$'de doğrudur ancak $\mathcal{K}$ kuramı bu savı kanıtlayamaz.

5.7 Gödel Eksiklik Teoremleri

Bir önceki kesimde Gödel'in temel araçlarından birine—Gödel sayılarına—hiç değinmedik. Bu kesimde Gödel teoremlerini bir kez daha ele alacak, bu

kez Gödel'in çalışması doğrultusunda—bazı önermelerin doğruluğunu varsayarak ve koşullarımızı daraltarak—bu teoremleri kanıtlayacağız. İlerideki kesimlerde bu varsayımları kanıtlayacağız. Gödel teoremlerinin ana fikri ile ilgilenen ancak ayrıntılarla ilgilenmeyen okurlar için bu kesimle iş biter.

Not 5.7.1 Gödel Eksiklik Teoremi'nin ana fikri [26]'dan yaptığımız alıntıda çok net verilmiştir. Tekrarlamak da olsa yine de ana fikri verelim. Bir L dili ve bir $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ verilmiş olsun. $\Gamma \subset \operatorname{Th}\mathfrak{A}$ olmak üzere bir $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramını $\operatorname{Th}\mathfrak{A} = \operatorname{Bt}\mathcal{K}$ olacak biçimde arayalım. L dili ve $\mathcal{K}$ kuramı $\mathcal{K}$ hakkında konuşabilsin; en azından bir $\sigma \in \operatorname{Sav} L$ savının $\sigma^{\mathfrak{A}}$ yorumu "$\sigma \notin \operatorname{Bt}\mathcal{K}$", dd. "$\mathcal{K} \nvdash \sigma$" veya sözlerle "Benim $\mathcal{K}$ kuramında bir bkanıtım yoktur" önermesine denk, dd.

$$\sigma \in \operatorname{Th}\mathfrak{A} \Longleftrightarrow \mathcal{K} \nvdash \sigma \tag{5.29}$$

olsun. Bu durumda $\sigma, \neg\sigma \notin \operatorname{Bt}\mathcal{K}$ olduğunu, dolayısıyla $\mathcal{K}$ *kuramının tam olmadığını, dolayısıyla* $\operatorname{Bt}\mathcal{K} \neq \operatorname{Th}\mathfrak{A}$ *olduğunu savunuyoruz.*

Her şeyden önce $\operatorname{Bt}\mathcal{K} \subseteq \operatorname{Th}\mathfrak{A}$ olduğundan $\mathfrak{A}$ aynı zamanda $\mathcal{K}$'nin bir modelidir, dolayısıyla $\mathcal{K}$ tutarlıdır[30].

Eğer $\sigma \in \operatorname{Bt}\mathcal{K}$ varsayarsak $\sigma^{\mathfrak{A}}$ doğru olacağından (5.29)'dan $\sigma \notin \operatorname{Bt}\mathcal{K}$ elde ederiz ve bu bir çelişkidir; dolayısıyla $\sigma \notin \operatorname{Bt}\mathcal{K}$ olur.

Şimdi $\neg\sigma \in \operatorname{Bt}\mathcal{K}$ olduğunu varsayalım. $\neg\sigma^{\mathfrak{A}}$ doğru olacaktır, bu ise $\sigma \in \operatorname{Bt}\mathcal{K}$ demektir. Sonuçta $\sigma, \neg\sigma \in \operatorname{Bt}\mathcal{K}$ elde ederiz ki bu $\mathcal{K}$'nin tutarlılığıyla çelişir; dolayısıyla $\neg\sigma \notin \operatorname{Bt}\mathcal{K}$. Özetle $\sigma, \neg\sigma \notin \operatorname{Bt}\mathcal{K}$. Yine de $\sigma^{\mathfrak{A}}$ ve $\neg\sigma^{\mathfrak{A}}$ savlarından biri ve ancak biri doğru olacaktır. $\neg\sigma^{\mathfrak{A}}$ doğru olamaz, az önce bu bizi $\sigma \in \operatorname{Bt}\mathcal{K}$ sonucuna götürdü ve bunun doğru olmadığını öğrendik. Öyleyse $\sigma^{\mathfrak{A}}$ *doğrudur, ancak* $\mathcal{K}$ *bunu kanıtlayamaz.*

Gödel'in teoreminin ana fikri bu kadar yalındır. Gödel'in çalışmasında $\mathfrak{A}$ yapısı olarak $\mathfrak{N}$ ve $\mathcal{K} = \mathcal{K}_a$ alınmıştır. Tüm zorluk bu durumda böyle bir σ savının varlığını gösterebilmektir. ▲

L sayılabilir bir dil, $\mathcal{V} = \{v_0, v_1, \ldots\}$ değişkenler kümemiz ve O ise $\neg, \to, \dot{\forall}, \doteq$ mantık imleri, $), ($ ayraçları ve , virgülden oluşan ortak imlerin kümesi olmak üzere $A = L \sqcup \mathcal{V} \sqcup O$ abecesinin $A^* = \operatorname{Sz} A$ sözcükler kümesi ve A^* sözcüklerinin tüm sonlu dizlerinin $A^{*<\omega}$ kümesine odaklanacağız. $\Gamma \subseteq \operatorname{Sav} L$ olmak üzere $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ olsun. $\mathcal{K}$ kuramının sözeden kuramını biçimselleştirmek, özellikle $\mathcal{K}$'ye taşımak için Gödel şöyle bir yol izlemiştir. Birebir bir

$$\mathfrak{g} : A \sqcup A^* \sqcup A^{*<\omega} \to \mathbb{N}$$

fonksiyonu tanımlamıştır. $\mathfrak{g}$'nin s'deki değerini—ki buna s'nin **Gödel sayısı** denir—$\mathfrak{g}(s)$ yerine yalın biçimde $\mathfrak{g}s$ ile göstereceğiz; ancak $\mathfrak{g}$'nin bir

[30] Burada asla $\mathcal{K}$ kuramının tutarlığının $\mathcal{K}$'de bir kanıtı olduğunu söylemiyoruz.

$s_0, \ldots s_n$ sözcük dizisindeki değerini $\mathfrak{g}(s_0, \ldots, s_n)$ ile göstereceğiz. $\mathfrak{g}s$ yerine $\ulcorner s \urcorner$ gösterimi yaygındır ve ileride biz de o gösterimi kullanacağız. Elbette çok değişik biçimde Gödel sayıları tanımlanabilir; biz bir tanesini seçip irdelemelerimizde sabit tutacağız. Ancak $\mathfrak{g}$ fonksiyonun şu koşulları sağlaması gerekir:

1. $\mathfrak{g}$ birebirdir, ancak örten olması gerekmez,
2. Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı verildiğinde bunun bir Gödel sayısı olup olmadığı belirlenebilir; eğer n bir Gödel sayısı ise Gödel sayısı olduğu s belirlenebilir olmalıdır.

Şimdilik bu koşulları sağlayan fonksiyonların olduğunu, hemen hemen her mantık kitabında bir başkasıyla karşılaştığımızı belirtmekle yetinelim. İleride biz de bir tane açıklayacağız.

$\mathfrak{g}$ fonksiyonu aracılığı ile Gödel $\mathcal{K}$'nin sözeden kavram ve önermelerini sayılar kuramının kavram ve önermelerine dönüştürür. Gödel'in 5.1 numaralı kesimde verdiğimiz alıntıda belirttiği gibi bu dönüştürmede karşımıza önünde sonunda aritmetik bağıntılar ve aritmetik önermeler çıkar. $\mathcal{K}$ kuramının sözeden kuramını Sayılar Kuramına taşıdıktan sonra Gödel, eğer $\mathcal{K}$ kuramı yeteri kadar zenginse, Sayılar Kuramı'na taşınan bağıntı ve önermelerin $\mathcal{K}$ kuramında temsil edilebileceğini gösterdi; böylece Sayılar Kuramı üzerinden $\mathcal{K}$ biçimsel kuramının sözeden kuramını $\mathcal{K}$'ye taşımış oldu. Örneğin "$\mathcal{K}$ kuramı tutarlıdır" $\mathcal{K}$'nin sözeden kuramına ilişkin bir önermedir. Gödel'in yöntemiyle bu önerme sayılar kuramı üzerinden $\mathcal{K}$'ye taşınmıştır ve bu taşınan önermeyi $\mathcal{K}$ kanıtlayabilir veya kanıtlayamaz. Peki $\mathcal{K}$ kuramının tutarlılığının $\mathcal{K}$'de kanıtlanabilir olması niçin bu kadar önemlidir? Örneğin $\mathfrak{N}$, $\mathcal{K}_a$ aritmetik kuramının bir modeli olduğundan $\mathcal{K}_a$ tutarlıdır; bunu bilmek yetmez mi?

1900'lü yılların başlarında matematiğin temeline ilişkin tartışmaları sonlandırmak için Hilbert matematikçilerin önüne, hiçbir anlamsal kavram kullanmayan biçimsel tutarlılık kanıtlarını bulma görevini koydu. Böylece "model" ve "yorumlar" anlamsal kavramlar olduğundan $\mathcal{K}_a$'nın bir modeli olduğu için tutarlı olduğu argümanına yolları kapadı. Ancak burada da bizi bir sürpriz bekliyordu: Gödel yeterince zengin, örneğin $\mathcal{K}_{ra}$'yı kapsayan bir kuramın kendi tutarlılığını kanıtlayamayacağını göstermiştir.

Bundan sonra genelde $L = L_a$ olacak ve biz bu durumda $\Phi^n_s(L_a)$ yerine bazen yalın olarak Φ^n_s yazacağız. Şimdi $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L_a$ olmak üzere $\mathcal{K} = (L_a, \Gamma)$ olsun. Yukarıda belirttiğimiz gibi L_a dilinin harflerine, sözcüklerine ve sözcük dizilerine Gödel sayıları atanmış olsun. Böylece $\mathcal{K}_a$ kuramının sözeden matematiğini sayılar kuramına taşıyacağız. İleride $\mathcal{K}_{ra}$ Robinson Aritmetiği'nin bunları temsil edebilecek kadar zengin olduğunu kanıtlayacağız.

Tanım 5.7.2 *Her* $\varphi \in \Phi_s^1$ *için*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \varphi(\underline{n}) \in \mathrm{Bt}\,\mathcal{K} \implies \neg\dot{\forall} x\varphi(x) \notin \mathrm{Bt}\,\mathcal{K} \tag{5.30}$$

ise $\mathcal{K}$ *kuramı* ω***-tutarlıdır*** *denir.*

Not 5.7.3 Her $n \in \mathbb{N}$ için $\varphi(\underline{n}) \in \mathrm{Bt}\,\mathcal{K}$ ise buradan *asla* $\sigma := \dot{\forall} x\varphi(x) \in \mathrm{Bt}\,\mathcal{K}$ çıkaramayız. Örneğin $\Gamma = \Lambda_a$ ve $\mathcal{K} = \mathcal{K}_a$ olsun. Gerçi $\underline{n}$ sayısallarının $\mathfrak{N}$ modellerindeki yorumları $\mathbb{N}$ evrenini oluşturduklarından koşulumuzdan $\sigma \in \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$ olur. Ancak biz $\mathcal{K}_a$ kuramının standart olmayan modelleri olduğunu da biliyoruz. $\mathfrak{A}$ bu kuramın böyle bir modeli olsun. $\underline{n}$ sayısalının $\mathfrak{A}$ modelindeki yorumunu yalın olarak $n^{\mathfrak{A}}$ ile gösterirsek $\{n^{\mathfrak{A}} \mid n \in \mathbb{N}\} \subsetneqq A$ olduğundan koşulumuzdan, dd. her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathfrak{A} \models \varphi\left[n^{\mathfrak{A}}\right]$ olmasından asla her $a \in A$ için $\mathfrak{A} \models \varphi[a]$ olduğunu çıkaramayız; yani $\mathfrak{A} \not\models \sigma$, dolayısıyla $\sigma \notin \mathrm{Bt}\,\mathcal{K}_a$ olabilir. ▲

Lemma 5.7.4 $\mathcal{K}$ *kuramı* ω*-tutarlı ise biçimsel tutarlıdır.*

Kanıt. $\varphi \in \Phi_s^1$ keyfi verilsin ($\Phi_s^1 \neq \emptyset$). İki durum söz konusudur: ya (i) en az bir $n \in \mathbb{N}$ için $\varphi(\underline{n}) \notin \mathrm{Bt}\,\mathcal{K}$, dolayısıyla $\mathcal{K}$ biçimsel tutarlı ya da (ii) her $n \in \mathbb{N}$ için $\varphi(\underline{n}) \in \mathrm{Bt}\,\mathcal{K}$, dolayısıyla kuramımız ω-tutarlı varsayıldığından $\neg\dot{\forall} x\varphi(x) \notin \mathrm{Bt}\,\mathcal{K}$ ve kuramımız biçimsel tutarlıdır. ■

Tanım 5.7.5 $\varphi \in \mathrm{Fm}\,L_a$ *olmak üzere* $\mathcal{K}(\varphi)$ *ile* φ *formülünün* $\mathcal{K}$ *kuramındaki biçimsel kanıtlarının kümesini gösterelim.* $K \subseteq \mathbb{N}^2$ *bağıntısı şöyle tanımlansın: Her* $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ *için*

$$(m,n) \in K :\Longleftrightarrow \exists \varphi \in \Phi_s^1\ \ (m = \mathfrak{g}\varphi) \wedge \exists k \in \mathcal{K}(\varphi(\underline{m}))\,(n = \mathfrak{g}k)\,.$$

Sözlerle söylersek $(m,n) \in K$ tam da m doğal sayısının tek serbest değişkenli bir φ formülünün Gödel sayısı, n ise $\varphi(\underline{m})$ formülünün bir biçimsel kanıtının Gödel sayısı olması demektir. K bağıntısının $\mathcal{K}$ ile ilişkisini vurgulamak gerekirse bunu $K_{\mathcal{K}}$ yazarak belirteceğiz.

Lemma 5.7.6 K *bağıntısı bir* $\kappa(x,y) \in \Phi_s^2(L_a)$ *ile* $\mathcal{K}_{ra}$*'da, dolayısıyla* $\mathcal{K}_a$*'da temsil edilebilir.*

Kanıt. Bkz. Not 5.15.16. ■

$\kappa(x,y)$ (5.7.6)'daki formül olmak üzere

$$\psi(x) := \dot{\forall} y\neg\kappa(x,y)\,,\ p := \mathfrak{g}\psi(x)\,,\ \text{ve}$$
$$\sigma := \psi(\underline{p}) = \psi(\underline{\mathfrak{g}\psi(x)}) = \dot{\forall} y\neg\kappa(\underline{p},y)$$

olarak açıklansın. $\sigma = \psi(\underline{\mathfrak{g}\psi})$ olduğuna dikkat ediniz. σ savı bir biçimde ψ önermesinin kendi üzerinde bildirimde bulunduğu bir önerme olarak düşünülebilir. Bu gösterimlerle:

Teorem 5.7.7 (Birinci Gödel Eksiklik Teoremi c) *$\mathcal{K}$ biçimsel tutarlı ve K bağıntısı $\mathcal{K}$'de temsil edilebilirse $\sigma \notin \mathrm{Bt}\,\mathcal{K}$. Eğer $\mathcal{K}$ kuramı ω-tutarlı ise $\neg\sigma \notin \mathrm{Bt}\,\mathcal{K}$.*

Sonuç 5.7.8 *$\mathcal{K}_a$ biçimsel tutarlı ise $\sigma \notin \mathrm{Bt}\,\mathcal{K}$. Eğer $\mathcal{K}_a$ kuramı ω-tutarlı ise $\neg\sigma \notin \mathrm{Bt}\,\mathcal{K}$. Dolayısıyla $\mathcal{K}_a$ kuramı ω-tutarlı ise biçimsel tam değildir.*

Kanıt. (1) $\mathcal{K}$ biçimsel tutarlı olsun. $\sigma \in \mathrm{Bt}\,\mathcal{K}$ varsayalım, dd. $\mathcal{K} \vdash \sigma$ olsun. σ'nın kanıtlarından birinin Gödel sayısı q olsun. K bağıntısının tanımından $(p, q) \in K$ olacaktır. κ formülü K bağıntısını $\mathcal{K}$'de temsil ettiğinden $\mathcal{K} \vdash \kappa(\underline{p}, \underline{q})$ elde ederiz. Diğer yandan $\mathcal{K} \vdash \sigma$, dd. $\mathcal{K} \vdash \dot{\forall} y \neg\kappa(\underline{p}, y)$'den özelleştirme ile $\mathcal{K} \vdash \neg\kappa(\underline{p}, \underline{q})$ elde ederiz. Bu az önceki çıkarımla birlikte $\mathcal{K}$ kuramının biçimsel tutarlılığıyla çelişir; varsayım yanlıştır ve $\sigma \notin \mathrm{Bt}\,\mathcal{K}$.

(2) Şimdi $\mathcal{K}$ kuramı ω-tutarlı olsun. (5.7.4)'ten $\mathcal{K}$ biçimsel tutarlıdır ve teoremimizin birinci kısmından $\sigma \notin \mathrm{Bt}\,\mathcal{K}$. K bağıntısının tanımını ve $p = \mathfrak{g}\psi(x)$, $\sigma = \psi(\underline{p})$ olduğunu anımsarsak her $q \in \mathbb{N}$ için $(p, q) \notin K$, dolayısıyla her $q \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{K} \vdash \neg\kappa(\underline{p}, \underline{q})$ olur. Kuramımızı ω-tutarlı varsaydığımızdan

$$\neg\sigma = \neg\psi(\underline{p}) = \neg\dot{\forall} y \neg\kappa(\underline{p}, y) \notin \mathrm{Bt}\,\mathcal{K}$$

elde ederiz. $\sigma, \neg\sigma \notin \mathrm{Bt}\,\mathcal{K}$ olduğundan $\mathcal{K}$ kuramımız biçimsel tam değildir.

Ek doğrudan (5.7.6)'dan çıkar. ■

Not 5.7.9 1. Önce teoremimizin "$\mathcal{K}_a$ biçimsel tutarlı ise" koşuluna bir açıklama getirmek gerekir. $\mathfrak{N}$ yapısı $\mathcal{K}_a$'nin bir modeli olduğundan Gödel Tamlık Teoremi üzerinden $\mathcal{K}_a$'nın biçimsel tutarlı olduğunu biliyoruz. O zaman bu koşul niye? Çünkü bu sonuca modeller gibi anlamsal kavramlar üzerinden ulaştık ve elimizde henüz $\mathcal{K}_a$ kuramının biçimsel tutarlı olduğuna ilişkin $\mathcal{K}_a$'da bir biçimsel kanıtımız yoktur. İleride olamayacağını da kanıtlayacağız!

2. $\kappa\,(x, y)$ formülü $\mathcal{K}$'de K bağıntısını temsil ettiğinden $\mathfrak{N}$'de K'yi tanımlar (5.26), dd $K = R_\kappa$, dolayısıyla

$$(m, n) \in K \Longleftrightarrow \kappa^{\mathfrak{N}}\,(m, n) \in \mathrm{Th}\,\mathfrak{N} \Longleftrightarrow \kappa^{\mathfrak{N}}\,(m, n) \text{ doğrudur.}$$

Dolayısıyla $\sigma^{\mathfrak{N}} = \forall y \neg\kappa^{\mathfrak{N}}(p, y)$ savı "her $n \in \mathbb{N}$ için $\neg\kappa^{\mathfrak{N}}(p, n)$ doğrudur" dd. $(p, n) \notin K$ anlamına; yani $\sigma = \psi(\underline{p})$ savının bir biçimsel kanıtı yoktur anlamına gelir. Özetle $\sigma^{\mathfrak{N}}$ yorumu "σ savının $\mathcal{K}$'de bir biçimsel kanıtı yoktur" demektir. Biz gerçekten $\mathcal{K} \nvdash \sigma$ olduğunu kanıtladık, dd. $\sigma^{\mathfrak{N}}$ yorumunun doğru olduğunu yani $\sigma \in \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$ olduğunu kanıtladık. Böylece $\mathcal{K} = \mathcal{K}_a$ için şu sonuca ulaştık:

$\mathcal{K}_a$ biçimsel tutarlı ise bir $\sigma \in \mathrm{Sav}\,L_a$ savı $\sigma \in \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$ ancak $\sigma \notin \mathrm{Bt}\,\mathcal{K}_a$ olacak biçimde vardır. ▲

Rosser, Gödel Eksiklik Teoremi'ni ω-tutarlılıktan daha zayıf olan $\mathcal{K}_a$'nin biçimsel tutarlık koşulunda kanıtladı. Bu kanıtı özetleyeceğiz.

Lemma 5.7.10 *(a) Her $k \in \mathbb{N}$ için*

$$\mathcal{K}_{ra} \vdash \varphi(\underline{0}) \curlywedge \varphi(\underline{1}) \curlywedge \cdots \curlywedge \varphi(\underline{k}) \to \dot{\forall} x\,(x \preccurlyeq \underline{k} \to \varphi(x))\,.$$

(b) Her $m \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{K}_{ra} \vdash x \preccurlyeq \underline{m} \curlyvee \underline{m} \preccurlyeq x$.

Kanıt. Bkz. Not 5.15.16. ■

Tanım 5.7.11 *$K_\neg \subseteq \mathbb{N}^2$ bağıntısı her $m, n \in \mathbb{N}$ için*

$$(m,n) \in K_\neg : \Longleftrightarrow\ \exists \varphi \in \Phi^1_s\,(m = \mathfrak{g}\varphi) \wedge \exists k \in \mathcal{K}\,(\neg\varphi(\underline{m}))\,(n = \mathfrak{g}k)$$

olarak açıklansın. Sözlerle, $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ olmak üzere: $(m,n) \in K_\neg \iff m$ doğal sayısı tek serbest değişkenli bir $\varphi(x)$ formülünün Gödel sayısıdır ve n ise $\neg\varphi(\underline{m})$ savının bir kanıtının Gödel sayısıdır.

Önerme 5.7.12 *$K_\neg$ bağıntısı $\mathcal{K}_{ra}$'da, dolayısıyla $\mathcal{K}_a$'da bir $\kappa_\neg(x,y)$ ile temsil edilebilir.*

Kanıt. Bkz. Not 5.15.16. ■

Şimdi

$$\begin{aligned} \theta(x) &:= \dot{\forall} y(\kappa(x,y) \to \dot{\exists} z(z \preccurlyeq y \curlywedge \kappa_\neg(x,z))) \\ m &:= \mathfrak{g}\theta(x) \\ \rho &:= \theta(\underline{m}) = \dot{\forall} y(\kappa(\underline{m},y) \to \dot{\exists} z(z \preccurlyeq y \curlywedge \kappa_\neg(\underline{m},z))) \end{aligned}$$

olsunlar. Bu gösterimlerle:

Teorem 5.7.13 (Gödel-Rosser Eksiklik Teoremi) *$\mathcal{K}$ kuramında K ve $K_\neg$ bağıntıları temsil edilebilsin ve (5.7.10)'un önermeleri $\mathcal{K}_{ra}$ yerine $\mathcal{K}$ aldığımızda doğru olsunlar. Bu koşullarda $\mathcal{K}$ biçimsel tutarlı ise $\rho, \neg\rho \notin \mathrm{Bt}\,\mathcal{K}$, dolayısıyla $\mathcal{K}$ tam değildir. Özellikle $\mathcal{K}_{ra}$ ve $\mathcal{K}_a$ tam değildir.*

Kanıt. $\mathcal{K}$ kuramı biçimsel tutarlı olsun.

(1) $\rho \in \mathrm{Bt}\,\mathcal{K}_a$ olduğunu varsayalım. k doğal sayısı ρ savının bir kanıtının Gödel sayısı olsun. $\theta(x)$ ve ρ'nun tanımından $(m,k) \in K$, dolayısıyla κ formülü K bağıntısını $\mathcal{K}$'de temsil ettiğinden $\mathcal{K} \vdash \kappa(\underline{m},\underline{k})$. Diğer yandan ρ'dan özelleştirmeyle $\mathcal{K} \vdash \kappa(\underline{m},\underline{k}) \to \dot{\exists} z(z \preccurlyeq \underline{k} \curlywedge \kappa_\neg(\underline{m},z))$. Son iki çıkarımdan modus ponens ile $\mathcal{K} \vdash \dot{\exists} z(z \preccurlyeq \underline{k} \curlywedge \kappa_\neg(\underline{m},z))$.

$\mathcal{K}$ biçimsel tutarlı ve $\rho \in \mathrm{Bt}\,\mathcal{K}$ olduğundan $\neg\rho \notin \mathrm{Bt}\,\mathcal{K}$. Hiçbir n doğal sayısı $\neg\rho$ savının bir kanıtının Gödel sayısı olamaz, dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$

için $(m,n) \notin K_\neg$. $\kappa_\neg(x,y)$ formülü $K_\neg$ bağıntısını $\mathcal{K}$'de temsil ettiğinden her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{K} \vdash \neg\kappa_\neg(\underline{m},\underline{n})$. Buradan önerme mantığı ile her $k \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{K} \vdash \neg\kappa_\neg(\underline{m},\underline{0}) \curlywedge \neg\kappa_\neg(\underline{m},\underline{1}) \curlywedge \cdots \curlywedge \neg\kappa_\neg(\underline{m},\underline{k})$. Buradan (5.7.10)(a) ve modus ponens ile $\mathcal{K} \vdash \dot\forall z\,(z \preccurlyeq \underline{k} \to \neg\kappa_\neg(\underline{m},z))$. Buradan genel olarak ψ_1,ψ_2 formülleri için $\dot\forall z\,(\psi_1 \to \psi_2) \equiv_\vdash \dot\forall z\,(\neg\psi_1 \curlyvee \psi_2) \equiv_\vdash \neg\dot\exists z\neg\,(\neg\psi_1 \curlyvee \psi_2) \equiv_\vdash \neg\dot\exists z\,(\psi_1 \curlywedge \neg\psi_2)$ olduğundan, ayrıca $\neg\neg\varphi \equiv_\vdash \varphi$ olduğunu gözetirsek (3.12.7) Yerine Koyma Teoremi ile $\mathcal{K} \vdash \neg\dot\exists z\ (z \preccurlyeq \underline{k} \curlywedge \kappa_\neg(\underline{m},z)$ elde ederiz ki bu bir önceki paragrafın sonundaki çıkarımla çelişir.

(2) $\neg\rho \in \mathrm{Bt}\,\mathcal{K}$ varsayalım. l ise $\neg\rho$'nun bir kanıtının Gödel sayısı olsun. $K_\neg$ ve ρ'nun tanımından $(m,l) \in K_\neg$ olur. $\kappa_\neg\,(x,y)$ formülü $\mathcal{K}$ kuramında $K_\neg$ bağıntısını temsil ettiğinden $\mathcal{K} \vdash \kappa_\neg(\underline{m},\underline{l})$. Diğer yandan $\mathcal{K}$'yi biçimsel tutarlı ve $\neg\rho \in \mathrm{Bt}\,\mathcal{K}$ varsaydığımızdan $\rho \notin \mathrm{Bt}\,\mathcal{K}$ olur. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için $(m,n) \notin K$, dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{K} \vdash \neg\kappa(\underline{m},\underline{n})$ elde ederiz. Buradan önerme mantığı ile $\mathcal{K} \vdash \neg\kappa(\underline{m},\underline{0}) \curlywedge \neg\kappa(\underline{m},\underline{1}) \curlywedge \cdots \curlywedge \neg\kappa(\underline{m},\underline{l})$ elde ederiz. Buradan ise (5.7.10)(a) ve modus ponens ve ardından özelleştirme ile *(i)* $\mathcal{K} \vdash y \preccurlyeq \underline{l} \to \neg\kappa(\underline{m},y)$ elde ederiz. Şimdi $\underline{l} \preccurlyeq y$ varsayalım. O zaman, $\mathcal{K} \vdash \kappa_\neg(\underline{m},\underline{l})$ olduğundan $\underline{l} \preccurlyeq y \curlywedge \kappa_\neg(\underline{m},\underline{l})$ olur. Buradan $\exists$ katma ile *(ii)* $\mathcal{K} \vdash \dot\exists z(z \preccurlyeq y \curlywedge \kappa_\neg(\underline{m},z))$ elde ederiz. Böylece *(i)*, *(ii)*, (5.7.10)(b) ve önerme mantığı ile

$$\mathcal{K} \vdash \neg\kappa(\underline{m},y) \curlyvee \dot\exists z(z \preccurlyeq y \curlywedge \kappa_\neg(\underline{m},z))$$

buradan (i)'de olduğu gibi biçimsel denklik ve Yerine Koyma Teoremi ile

$$\mathcal{K} \vdash \kappa(\underline{m},y) \to \dot\exists z(z \preccurlyeq y \curlywedge \kappa_\neg(\underline{m},z)).$$

Buradan da GEN ile

$$\mathcal{K} \vdash \dot\forall y(\kappa(\underline{m},y) \to \dot\exists z(z \preccurlyeq y \curlywedge \kappa_\neg(\underline{m},z))),$$

dd. $\mathcal{K} \vdash \rho$ elde ederiz ki bu bir çelişkidir. ■

Not 5.7.14 Kanıt yalnızca (5.7.6), (5.7.10) ve (5.7.12)'yi kullanır. Bu önermelerin formüle edilip kanıtlanabildiği her $\mathcal{K}$ kuramında teorem geçerlidir. Böyle bir $\mathcal{K}$ kuramı $\mathcal{K}_a$ kuramından daha zayıf veya daha güçlü olabilir, hatta $\mathcal{K}_a$ ile kıyaslanabilir olması bile gerekmez (bkz. [22]). $\sigma \in \mathrm{Sav}\,L$ ve $\sigma, \neg\sigma \notin \mathrm{Bt}\,\mathcal{K}$ ise bu σ savının asla kanıtlanamayacağı anlamına gelmez! $\Gamma' := \Gamma \cup \{\sigma\}$ olmak üzere $\mathcal{K}' := (L_a,\Gamma')$ de tutarlı bir kuramdır ve $\mathcal{K}' \vdash \sigma$. $\mathcal{K}'$ kuramı tutarlı ve yukarıdaki önermeler bu kuramda da geçerli olduklarından Gödel-Rosser Teoremi bu kuram için de bir σ' savını $\sigma', \neg\sigma' \notin \mathrm{Bt}\,\mathcal{K}'$ olacak biçimde verir. ▲

Öneminden dolayı **Sabit Nokta Teoremi** veya **Kendinegönderme Teoremi** olarak bilinen bir teoremi kanıtlayacağız. Ψ^1_s en fazla bir serbest

değişkeni olan $\varphi \in \operatorname{Fm} L_a$ formüllerinin kümesi olsun. $\psi \in \Psi_s^1$ ve $\operatorname{Sb}\psi \subseteq \{x\}$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $\psi(\underline{n}) = \psi(x|\underline{n})$ olsun.

$f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ fonksiyonu

$$f(n,m) := \begin{cases} \mathfrak{g}\psi(\underline{m}), & n = \mathfrak{g}\psi,\ \psi \in \Psi_s^1 \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{5.31}$$

olarak tanımlansın. f fonksiyonu $\mathbb{N}^2$'de tanımlı ve hesaplanabilir, dolayısıyla belirlenebilirdir ve her $\psi \in \Psi_s^1$ için $f(\mathfrak{g}\psi, m) = \mathfrak{g}\psi(\underline{m})$ olur.

Teorem 5.7.15 (Sabit Nokta Teoremi) *$\Gamma \subseteq \operatorname{Sav} L_a$ ve $\mathcal{K} = (L_a, \Gamma)$ olsun. (5.31) ile tanımlanan f fonksiyonu $\mathcal{K}$-temsil edilebilir olsun. Bu koşullarda her $\psi \in \Psi_s^1$ formülüne karşılık bir σ_ψ savı*

$$\mathcal{K} \vdash \sigma_\psi \longleftrightarrow \psi(\underline{\mathfrak{g}\sigma_\psi}) \tag{5.32}$$

olacak biçimde vardır. $\mathfrak{g}\sigma_\psi$ Gödel sayısını σ_ψ savının adı olarak düşünürsek (5.32) kabaca σ_ψ savı kendisinin –daha doğrusu adının sayısalının– ψ özelliği olduğunu söyler.

Kanıt. Teoremin koşullarından dolayı f fonksiyonu $\mathcal{K}$'de bir $\alpha(x,y,z) \in \Phi_s^3$ ile temsil edilebilir. Şimdi $\psi(x) \in \Psi_s^1$ keyfi verilsin.

$$\beta := \dot{\forall} z(\alpha(x,x,z) \to \psi(z)) \text{ ve}$$
$$\sigma_\psi := \dot{\forall} z(\alpha(\underline{\mathfrak{g}\beta}, \underline{\mathfrak{g}\beta}, z) \to \psi(z))$$

olsun. $\sigma_\psi = \beta(\underline{\mathfrak{g}\beta}) = \beta(x|\underline{\mathfrak{g}\beta})$ olduğundan, bu tanımlarla $f(\mathfrak{g}\beta, \mathfrak{g}\beta) = \mathfrak{g}\sigma_\psi$ olur. Buradan ise α formülü $\mathcal{K}$'de f fonksiyonunu temsil ettiğinden

$$\mathcal{K} \vdash \alpha(\underline{\mathfrak{g}\beta}, \underline{\mathfrak{g}\beta}, \underline{\mathfrak{g}\sigma_\psi}). \tag{5.33}$$

Böylece σ_ψ'nin tanımından özelleştirmeyle

$$\mathcal{K} \cup \{\sigma_\psi\} \vdash \alpha(\underline{\mathfrak{g}\beta}, \underline{\mathfrak{g}\beta}, \underline{\mathfrak{g}\sigma_\psi}) \to \psi(\underline{\mathfrak{g}\sigma_\psi}).$$

Buradan (5.33) ile

$$\mathcal{K} \vdash \sigma_\psi \to \psi(\underline{\mathfrak{g}\sigma_\psi}). \tag{5.34}$$

α formülü f fonksiyonunu $\mathcal{K}$'de temsil ettiğinden

$$\mathcal{K} \vdash \dot{\exists}! z \alpha(\underline{\mathfrak{g}\beta}, \underline{\mathfrak{g}\beta}, z)$$

Bu ve (5.33)'ten $\mathcal{K} \vdash \dot{\forall} z(\alpha(\underline{\mathfrak{g}\beta}, \underline{\mathfrak{g}\beta}, z) \to z \doteq \underline{\mathfrak{g}\sigma_\psi})$, dolayısıyla

$$\mathcal{K} \vdash \psi(\underline{\mathfrak{g}\sigma_\psi}) \to \dot{\forall} z(\alpha(\underline{\mathfrak{g}\beta}, \underline{\mathfrak{g}\beta}, z) \to \psi(z))$$

ve böylece $\mathcal{K} \vdash \psi(\underline{\mathfrak{g}\sigma_\psi}) \to \sigma_\psi$ olur. Bu ve (5.34) ile (5.32) elde edilir. ■

Tanım 5.7.16 $\mathfrak{g}\mathcal{K} := \{\mathfrak{g}\sigma \mid \sigma \in \mathrm{Bt}\,\mathcal{K}\}$ *olsun.*

Önerme 5.7.17 $\mathcal{K} = (L_a, \Gamma)$ *tutarlı, (5.31) ile tanımlanan* f *fonksiyonu ve* $\mathfrak{g}\mathcal{K}$ *bağıntısı* $\mathcal{K}$*-temsil edilebilirse bir* $\sigma \in \mathrm{Sav}\,L_a$ *savı* $\mathcal{K} \nvdash \sigma$ *ve* $\mathcal{K} \nvdash \neg\sigma$ *olacak biçimde vardır.*

Kanıt. $\chi \in \Phi_s^1$ formülü $\mathfrak{g}\mathcal{K}$'yi $\mathcal{K}$-temsil etsin ve $\psi := \neg\chi$ olsun. Sabit Nokta Teoremi'nden dolayı bir σ_ψ savı $\mathcal{K} \vdash \sigma_\psi \longleftrightarrow \psi(\underline{\mathfrak{g}\sigma_\psi})$, dolayısıyla

$$\mathcal{K} \vdash \sigma_\psi \longleftrightarrow \neg\chi(\underline{\mathfrak{g}\sigma_\psi}) \tag{5.35}$$

olacak biçimde vardır.

(a) $\mathcal{K} \vdash \sigma_\psi$ varsayalım. (5.35)'ten $\mathcal{K} \vdash \neg\chi(\underline{\mathfrak{g}\sigma_\psi})$ olur. Buradan, χ formülünün $\mathfrak{g}\mathcal{K}$'yı $\mathcal{K}$-temsil ettiğini düşünürsek $\mathfrak{g}\sigma_\psi \notin \mathfrak{g}\mathcal{K}$, dolayısıyla $\mathcal{K} \nvdash \sigma_\psi$ olur. Bu, varsayımla çelişir.

(b) $\mathcal{K} \vdash \neg\sigma_\psi$ varsayalım. $\mathcal{K}$ tutarlı olduğundan $\mathcal{K} \nvdash \sigma_\psi$ ve dolayısıyla $\mathfrak{g}\sigma_\psi \notin \mathfrak{g}\mathcal{K}$. Buradan, χ'nın $\mathfrak{g}\mathcal{K}$'yi $\mathcal{K}$-temsil ettiğini düşünürsek, $\mathcal{K} \vdash \neg\chi(\underline{\mathfrak{g}\sigma_\psi})$ ve ardından da (5.35) ile $\mathcal{K} \vdash \sigma_\psi$ elde eder ve bir çelişkiye ulaşırız.

(a) ve (b) ile sav kanıtlanmış olur. ■

Not 5.7.18 (5.31) ile tanımlanan f fonksiyonu $\mathfrak{g}$ fonksiyonunun seçimine bağımlıdır. Diğer yandan birbirinden farklı $\mathfrak{g}$ fonksiyonları olduğunu biliyoruz. Bu nedenle (5.7.15) ve (5.7.17) teoremlerinin koşularında "f fonksiyonu $\mathcal{K}$-temsil edilebilir olsun" yerine genel olarak "tüm hesaplanabilir fonksiyon ve belirlenebilir bağıntılar $\mathcal{K}$-temsil edilebilir olsun" denir. Bu önermede $\mathfrak{N}$'nin $\mathcal{K}$'nin bir modeli olmasının gerekmediğine ve bunu istemediğimize dikkat ediniz. ▲

Teorem 5.7.19 *(a)* ***Birinci Gödel Eksiklik Teoremi d:*** $\mathcal{K} = (L_a, \Gamma)$ *tutarlı, (5.31) ile tanımlanan* f *fonksiyonu ve* $\mathfrak{g}\mathcal{K}$ *bağıntısı* $\mathcal{K}$*-temsil edilebilirse* $\mathcal{K}$ *tam değildir.*

(b) ***Doğruluğun Tanımlanamazlığı (Tarski):***

$$\mathfrak{g}\,\mathrm{Th}\,\mathfrak{N} := \{\mathfrak{g}\sigma \mid \sigma \in \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}\}$$

kümesi $\mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$ *temsil edilemez; eş anlamlı olarak* $\mathfrak{N}$*-tanımlanamaz.*

Kanıt. (a) Doğrudan (5.7.17)'den çıkar.

(b) $\Gamma = \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$ alalım ve $\mathcal{K} := (L_a, \Gamma)$ olsun. $\mathrm{Th}\,\mathfrak{N} = \Gamma$ tam olduğundan (a)'dan dolayı $\mathfrak{g}\,\mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$ bağıntısı $\mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$ temsil edilemez. ■

(5.7.19)(b)'den dolayı hesaplanabilir bir $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ fonksiyonu her n için

$$f(n) = 1 \Longleftrightarrow n \in \mathfrak{g}\,\mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$$

olacak biçimde bulunamaz.

Teorem 5.7.20 (Birinci Gödel Eksiklik Teoremi e) *$\mathcal{K} = (L_a, \Gamma)$ tutarlı, Γ belirlenebilir ve tüm hesaplanabilir fonksiyonlar ve belirlenebilir bağıntılar $\mathcal{K}$-temsil edilebilir olsunlar. Bu koşullarda $\mathcal{K}$ tam değildir.*

Kanıt. Γ belirlenebilir olduğundan $\operatorname{Bt}\mathcal{K}$ etkin sayılabilir, dolayısıyla $\mathfrak{g}\mathcal{K}$ etkin sayılabilir. $\mathcal{K}$'yi tam varsayarsak $\operatorname{Bt}\mathcal{K}$ ve dolayısıyla $\mathfrak{g}\mathcal{K}$ belirlenebilir olur. Bu kez (5.7.19)(a)'dan $\mathcal{K}$ tam değildir. ■

Bir $\mathcal{K} = (L_a, \Gamma)$ kuramı tamsa ve Γ etkin sayılabilirse $\operatorname{Bt}\mathcal{K}$'nin belirlenebilir olduğunu biliyoruz. Bu nedenle aşağıdaki teorem geçerlidir:

Teorem 5.7.21 *$\mathcal{K} = (L_a, \Gamma)$ tutarlı, Γ etkin sayılabilir olsun ve her hesaplanabilir fonksiyon ve belirlenebilir bağıntı $\mathcal{K}$-temsil edilebilir olsun. Bu durumda $\mathcal{K}$ tam değildir.*

Bu teoremi (5.6.11) ile kıyaslarsak orada $\Gamma \subseteq \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ varsaydığımız görülür. (5.6.11)'in mesajı $\operatorname{Th}\mathfrak{N}$'nin belirlenebilir, hatta etkin sayılabilir aksiyomlaştırılamayacağıdır. (5.7.21)'de ise $\Gamma \subseteq \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ olması gerekmez!

Kanıtlara dikkatle baktığımızda aslında $\mathcal{K}_{ra}$'nın zorunlu bir rol oynamadığını ve dilin ise mutlaka L_a olması gerekmediğini görürüz. Ayrıca tüm hesaplanabilir fonksiyonlar ile tüm belirlenebilir bağıntıların belirlenebilir olması gerekmediğini de görürüz. Önemli olan $\mathcal{K}$ kuramının bazı hesaplanabilir fonksiyonlar ile bazı belirlenebilir bağıntıları temsil edebilecek kadar zengin olmasıdır. Örneğin—amacımız dışında olduğu için kanıtını vermeyeceğimiz—aşağıdaki önerme benzer biçimde kanıtlanır. $L_k = \{\dot{\in}\}$ olduğunu anımsatalım.

Teorem 5.7.22 *$\mathcal{K}_{ZF} \leq \mathcal{K}$, $\mathcal{K} = (L_k, \Gamma)$ tutarlı ve Γ etkin sayılabilirse $\mathcal{K}$ tam değildir.*

Gödel'in İkinci Eksiklik Teoremi kabaca yeterince zengin bir biçimsel kuramın kendi tutarlılığını kanıtlanamayacağını söyler. Özellikle tüm matematiği anlamlı biçimde, dd. belirlenebilir veya en azından etkin sayılabilir aksiyomlarla biçimselleştirmek ve ardından bu kuram içinde matematiğin tutarlı olduğunu kanıtlamak olanaksızdır. Örneğin $\mathcal{K}_a$ kuramı kendi tutarlılığını kanıtlayamaz. Ancak önce bir $\mathcal{K}$ kuramı için "$\mathcal{K}$ tutarlıdır" anlamına gelecek bir σ savını $\mathcal{K}$'de nasıl yazacağımızı netleştirelim.

$\mathcal{K} = (L_a, \Gamma)$ bir uz kuram olsun ve tüm hesaplanabilir fonksiyonlar ve belirlenebilir bağıntılar $\mathcal{K}$-temsil edilebilir olsun. Bir $K^* \subseteq \mathbb{N}^2$ bağıntısı her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$(n, m) \in K^* :\Longleftrightarrow \exists\varphi \in \operatorname{Fm} L_a (n = \mathfrak{g}\varphi) \wedge \exists k \in \mathcal{K}(\varphi)\,(m = \mathfrak{g}k)$$

olarak açıklansın. Her $\varphi \in \operatorname{Fm} L_a$ için

$$\mathcal{K} \vdash \varphi \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}\ (\mathfrak{g}\varphi, m) \in K^*$$

Burada Gödel'in daha önce bahsettiği yaklaşımı çok net görebiliriz. $\mathcal{K}$ kuramına ilişkin $\mathcal{K} \vdash \varphi$ sözeden önermesi sayılar kuramının $\exists m \in \mathbb{N}(\mathfrak{g}\varphi, m) \in K^*$ önermesine dönüştürülmüştür. İkinci adımda bu önermeyi $\mathcal{K}$'ye taşıyacağız. K^* bağıntısı belirlenebilir olduğundan bir $\alpha \in \Phi_s^2$ ile $\mathcal{K}$-temsil edilebilir.

$$\kappa(x) := \dot{\exists} y\ \alpha(x, y)$$

olsun. Sabit Nokta Teoremi'nden dolayı bir σ_κ savı

$$\mathcal{K} \vdash \sigma_\kappa \longleftrightarrow \neg\kappa(\underline{\mathfrak{g}\sigma_\kappa}) \tag{5.36}$$

olacak biçimde vardır. σ_κ savı sezgisel olarak "$\mathcal{K}$ beni kanıtlayamaz" anlamına gelir.

Önerme 5.7.23 *$\mathcal{K}$ tutarlı ise $\mathcal{K} \nvdash \sigma_\kappa$.*

Kanıt. $\mathcal{K} \vdash \sigma_\kappa$ olduğunu varsayalım. $m \in \mathbb{N}$ sayısını $(\mathfrak{g}\sigma_\kappa, m) \in K^*$ olacak biçimde seçelim. Bu durumda $\mathcal{K} \vdash \alpha(\underline{\mathfrak{g}\sigma_\kappa}, \underline{m})$, özellikle $\mathcal{K} \vdash \kappa(\underline{\mathfrak{g}\sigma_\kappa})$ olur. (5.36)'dan $\mathcal{K} \vdash \neg\sigma_\kappa$ elde ederiz; bu ise varsayımla birlikte $\mathcal{K}$'nin tutarlılığıyla çelişir. ■

$\mathcal{K}$ kuramının tutarlılığı $\mathcal{K} \nvdash \bot$ ile eş anlamlıdır. Bu nedenle $\mathcal{K}$'nin tutarlılığını

$$\tau_\mathcal{K} := \neg\kappa(\underline{\mathfrak{g}\bot})$$

ile belirtebiliriz. Bu durumda (5.7.23) sözeden önermesini

$$\tau_\mathcal{K} \to \neg\kappa(\underline{\mathfrak{g}\sigma_\kappa})$$

olarak biçimselleştirebiliriz. Eğer $\mathcal{K}_a \leq \mathcal{K}$ ise Gödel

$$\mathcal{K} \vdash \tau_\mathcal{K} \to \neg\kappa(\underline{\mathfrak{g}\sigma_\kappa}) \tag{5.37}$$

olduğunun kanıtlanabileceğini belirtmiş ve bunun böyle olduğunu sonradan başka matematikçiler uzun ve ayrıntılı bir kanıtla göstermişlerdir. Biz buna girmeyeceğiz.

Teorem 5.7.24 (İkinci Gödel Eksiklik Teoremi) *$\mathcal{K} = (L_a, \Gamma)$ tutarlı, Γ belirlenebilir ve $\mathcal{K}_a \leq \mathcal{K}$ ise $\mathcal{K} \nvdash \tau_\kappa$, dd. $\mathcal{K}$ kuramı kendi tutarlılığını kanıtlayamaz.*

Kanıt. $\mathcal{K} \vdash \tau_\mathcal{K}$ varsayalım, dd. $\mathcal{K}$ kendi tutarlılığını kanıtlasın. Buradan (5.37) ile $\mathcal{K} \vdash \neg\kappa(\underline{\mathfrak{g}\sigma_\kappa})$ elde edilir. Buradan ise (5.36) ile $\mathcal{K} \vdash \sigma_\kappa$ elde edilir; bu ise (5.7.23) ile çelişir. ■

5.8 Yinelgen Fonksiyonlar

Şimdi $\mathbf{F}^0 := \mathbb{N}$ ve her $n \in \mathbb{N}^*$ için

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^n &:= \{f \mid f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}\},\\ \mathbf{R}^n &:= \mathcal{P}(\mathbb{N}^n) = \{P \mid P \subseteq \mathbb{N}^n\},\\ \mathbf{F} &:= \cup_{n\in\mathbb{N}^*}\mathbf{F}^n \quad \text{ve} \quad \mathbf{R} := \cup_{n\in\mathbb{N}^*}\mathbf{R}^n\end{aligned}$$

olsun. Şimdilik tümel fonksiyonlara odaklandık, dd. her bir $f \in \mathbf{F}^n$ fonksiyonunun tanım bölgesi $\mathbb{N}^n$'dir. İleride kısmi fonksiyonları da inceleyeceğiz; bu kez bu fonksiyonların tanım kümeleri $\mathbb{N}^n$'nin öz altkümeleri olabilecek. Bu kesimde yalnızca $\mathbf{F}$ fonksiyonlarına ve $\mathbf{R}$ bağıntılarına odaklanacağımızdan "f, n değişkenli bir fonksiyon" dediğimizde $f \in \mathbf{F}^n$ ve "P, n yerli bir bağıntı" dediğimizde ise $P \in \mathbf{R}^n$ anlaşılacaktır. $\mathbf{F}$ *sayılar kuramının fonksiyonlarının* kümesi $\mathbf{R}$ ise *sayılar kuramı bağıntılarının* kümesidir. Önce $\overline{x_n} := x_1, \ldots x_n$ olarak tanımladığımızı, dolayısıyla

$$f(\overline{x_n}) = f(x_1, \ldots x_n) \text{ ve } R(\overline{x_n}) = R(x_1, \ldots x_n)$$

olduğunu ve $R(x_1, \ldots x_n) \Longleftrightarrow (x_1, \ldots x_n) \in R$ olduğunu bir kez daha belirtelim.

Her $P, Q \in \mathbf{R}^m$ için $P^c := \mathbb{N}^m \backslash P$ olmak üzere

$$\neg P = P^c,\ P \vee Q = P \cup Q,\ P \wedge Q = P \cap Q, P \to Q = P^c \cup Q$$

olacaktır.

Sayılar kuramının fonksiyonlarının hesaplanabilir olanlarını belirlemek istiyoruz. Bunun için herkesin tartışmasız hesaplanabilir olarak onaylayacağı *başlangıç fonksiyonları*ndan yola çıkacağız. Ardından bizi hesaplanabilir fonksiyonlardan hesaplanabilir fonksiyonlara götüren işlemlerle yeni hesaplanabilir fonksiyonlar elde edeceğiz.

Tanım 5.8.1 *Aşağıdaki fonksiyonlara* ***başlangıç fonksiyonları*** *denir:*

(I) $\mathbf{F}^0$ *ve* $c_0^1 \in \mathbf{F}^1$ *sıfır sabit fonksiyonu (yani* $\forall x \in \mathbb{N}\ (c_0^1(x) = 0)$*),*

(II) $S \in \mathbf{F}^1$ *ardıl fonksiyonu (yani* $\forall x \in \mathbb{N}\ (S(x) = x + 1)$*),*

(III) $\pi_i^m \in \mathbf{F}^m$ *izdüşümleri:* $\forall(\overline{x_m}) \in \mathbb{N}^m\ (\pi_i^m(\overline{x_m}) = x_i),\ 1 \leq i \leq m$,.
Başlangıç fonksiyonlarının kümesini BF *ile gösterelim.*

Şimdi sırasıyla işlemlerimizi tanıyalım.

(YK) Yerine koyma: $f, h_1, \ldots, h_m \in \mathbf{F}^n$ ve $g \in \mathbf{F}^m$ olmak üzere her $(\overline{x_n}) \in \mathbb{N}^n$ için

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g\left(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n)\right)$$

ise f fonksiyonu $g, h_1, \ldots, h_m$ fonksiyonlarından yerine koymalarla elde edilmiştir denir; bu durumu kısaca $f = g \circ h$ veya

$$f = g\,(h_1, \ldots, h_m)$$

olarak belirtelim.

(Yn) Yineleme: $g \in \mathbf{F}^n,\ f \in \mathbf{F}^{n+1},\ h \in \mathbf{F}^{n+2}$ olmak üzere her $(\overline{x_n}) \in \mathbb{N}^n$ ve her $y \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{array}{ll} \text{(Y0)} & f(x_1, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, \ldots, x_n) \\ \text{(YS)} & f(x_1, \ldots, x_n, y+1) = h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y)) \end{array} \tag{5.38}$$

ise f fonksiyonu g ve h'nin **(basit) yinelemesidir** denir ve bunu $f = \mathrm{Yn}(g, h)$ ile gösterelim. Bu tanımda $x_1, \ldots, x_n$ parametrelerdir, olabilir veya olmayabilirler de! Bu tanım parametreler olmadığında, dd. $n = 0$ için de anlamlıdır ve şu şekli alır: Bir $c \in \mathbb{N}$ sabiti ile

$$f(0) = c, \tag{5.39}$$

$$f(y+1) = h(y, f(y)). \tag{5.40}$$

Bu durumda $f = \mathrm{Yn}\,(c, h)$ yazacağız. Bu yinelemeye *basit* dememizin nedeni (5.38)'de $f(\overline{x_n}, y+1)$ değerini hesaplarken *yalnızca* $f(\overline{x_n}, y)$ değerinin kullanılmasıdır. Genel olarak Yineleme Teoremi $f(\overline{x_n}, 0)$, ... , $f(\overline{x_n}, y)$ değerlerinin tümünü veya bir kısmını kullanmamıza izin verir. Bu tür yinelemelere ileride değineceğiz.

Her şeyden önce f fonksiyonu (Y0) ve (YS) ile tek olarak belirlenmiştir. Bu doğrudan (1.1.1)'in bir sonucudur, yine de y üzerinden tümevarımla kolayca görülür. f' fonksiyonu da (Y0) ve (YS)'yi sağlasın. $(\overline{x_n}) \in \mathbb{N}^n$ keyfi verilsin. (Y0)'dan $f(\overline{x_n}, 0) = g(\overline{x_n}) = f'(\overline{x_n}, 0)$ olur. $f(\overline{x_n}, y) = f'(\overline{x_n}, y)$ kanıtlanmışsa (YS)'den

$$f(\overline{x_n}, y+1) = h(\overline{x_n}, y, f(\overline{x_n}, y)) = h(\overline{x_n}, y, f'(\overline{x_n}, y)) = f'(\overline{x_n}, y+1)$$

elde edilir ve böylece $f = f'$ olur.

(Min) μ Kısıtlanmış Minimalleştirme: $g \in \mathbf{F}^{n+1}$ için

$$\mu y(g\,(\overline{x_n}, y) = 0) := \begin{cases} *, & \forall y\ g\,(\overline{x_n}, y) \neq 0 \\ \min\{y \mid g\,(\overline{x_n}, y) = 0\}, & \exists y g\,(\overline{x_n}, y) = 0 \end{cases} \tag{5.41}$$

olarak tanımlanır. Burada $*$ iminin hiçbir matematiksel bağlamı yoktur; onun yerine $\mathbb{N}$'de olmayan herhangi bir öğe seçebilirsiniz.

$$f\,(x_1, \ldots, x_n) := \mu y(g\,(x_1, \ldots, x_n, y) = 0) \tag{5.42}$$

ile tanımlanan f fonksiyonunu kısaca $f := \mu g$ ile gösterelim ve f *fonksiyonu* g *fonksiyonundan kısıtlanmış* **minimalleştirmeyle** elde edilmiştir diyelim. Minimalleştirmenin yapıldığı değişkeni vurgulamak gerekirse μg yerine $\mu y g$ yazmayı yeğleyeceğiz. (5.42)'nin sağ yanında y değişkeninin bir bağlı değişken olduğunu not edelim. $f(\overline{x_n})$ en az bir kez $*$ değerini alıyorsa sayılar kuramının fonksiyonu değildir, $f \notin \mathbf{F}$. Şimdilik kısmi fonksiyonları devre dışı bıraktığımızdan her $(\overline{x_n}) \in \mathbb{N}^n$ için $f(\overline{x_n}) \neq *$ olmasını, dd.

$$(k) \quad \forall x_1, \ldots, x_n \exists y \ (g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0) \tag{5.43}$$

olmasını isteyeceğiz. (k) kısıtlamasına **arama koşulu** dendiği gibi kısıtlanmış minimalleştirme yerine ise **sınırlandırılmamış arama** da denir.

Uzlaşma: Bu kesimde Min işlemini yalnızca *(k)* koşulunu sağlayan fonksiyonlara uygulayacağız.

Önerme 5.8.2 *Başlangıçta belirtildiği gibi "hesaplanabilir fonksiyonlar" şimdilik varlığını sezgisel olarak kabul ettiğimiz; ancak ileride netleştireceğimiz, başlangıç fonksiyonlarını içeren bir fonksiyon topluluğu olmak üzere:*

1. *$g, h_1, \ldots, h_m$ hesaplanabilirse $f = g \circ h$ yerine koyma fonksiyonu da hesaplanabilir.*
2. *g ve h hesaplanabilirse $f = \mathrm{Yn}(g, h)$ yinelemesi de hesaplanabilir.*
3. *g hesaplanabilirse $f = \mu g$ de hesaplanabilir.*

Kanıt. (1) Aşikâr.

(2) $(\overline{x_n}) \in \mathbb{N}^n$ keyfi verilsin. Her $m \in \mathbb{N}$ için $f(\overline{x_n}, m)$ değerini hesaplayan bir algoritma şöyle verilir: Sırasıyla

$$r_0 = g(\overline{x_n}), \ r_1 = h(\overline{x_n}, 0, r_0), \ r_2 = h(\overline{x_n}, 1, r_1), r_3 = h(\overline{x_n}, k, r_2) \ldots$$

değerleri r_m elde edilinceye kadar hesaplanır. m üzerinden tümevarımla kolayca $f(\overline{x_n}, m) = r_m$ olduğu kanıtlanır.

(3) $\overline{x_n}$ keyfi verildiğinde $g(\overline{x_n}, 0), g(\overline{x_n}, 1), \ldots$ değerleri ilk kez bir m için $g(\overline{x_n}, m) = 0$ oluncaya kadar hesaplanır; (k)'den dolayı er veya geç böyle bir m sayısına rastlarız ve elbette $f(\overline{x_n}) = (\mu g)(\overline{x_n}) = m$. ■

Tanım 5.8.3 *1. BF başlangıç fonksiyonlarının* $\mathbf{F}$*'de (YK) ve (Yn) işlemlerine göre kapanışını BYF ile göstereceğiz ve bu kapanıştaki fonksiyonları* ***basit yinelgen*** *olarak adlandıracağız.*

2. BF başlangıç fonksiyonlarının $\mathbf{F}$*'de (YK), (Yn) ve (k) koşulunu sağlayanlar için (Min) işlemlerine göre kapanışını YF ile göstereceğiz ve bu kapanıştaki fonksiyonları* ***yinelgen***[31] *olarak adlandıracağız.*

n değişkenli basit yinelgen fonksiyonları BYF^n ve n değişkenli yinelgen fonksiyonları YF^n ile göstereceğiz.

Elbette $f \in BYF$ olması $\mathbf{F}$'de bir $f_0, \ldots, f_n$ dizisinin (a) $f = f_n$, (b) $f_0 \in BF$ ve (c) her $1 \leq i \leq n$ için $f_i \in BF$ veya f_i'nin kendinden önce gelenlerden (YK) veya (Yn) işlemlerinden birisiyle elde edilecek biçimde bulunmasına denktir. Benzerini $f \in YF$ için dillendirmeyi okura bırakıyoruz. Yazılımı yalınlaştırmak için şöyle bir yol izleyeceğiz: Herhangi bir önermede "(basit) yinelgen" ifadesi bir veya daha fazla kez geçiyorsa karşımızda iki önerme vardır: Birincisinde ayraçlar yok düşünülüp "basit yinelgen" yazılır ve karşımızda basit yinelgen fonksiyonlara ilişkin bir önerme çıkar. İkincisinde tüm "(basit)"'ler atılıp yinelgen fonksiyonlara ilişkin bir önerme elde edilir.

Tanım gereği açıkça $BYF \subseteq YF$'dir.

Not 5.8.4 (Basit) yinelgen fonksiyonlar tümevarımsal biçimde tanımlandıklarından (1.3.6) bize **BYF** ve **YF** için bir kanıtlama yöntemi verir. Bir önermenin her $f \in BYF$ için doğru olduğunu kanıtlamak istiyorsak bu önerme

(1) her $f \in BF$ için kanıtlanır,

(2) Önerme $g, h_1, \ldots, h_m$ fonksiyonları için kanıtlanmış ve f fonksiyonu bunlardan (YK) ile elde edilmişse, dd. $f = g\,(h_1, \ldots, h_m)$ ise önermenin f için de doğru olduğu kanıtlanır.

(3) $f = \mathrm{Yn}\,(g, h)$ ve önerme g ve h için kanıtlanmışsa f için de doğru olduğu gösterilir.

Bir önermenin her $f \in YF$ için doğru olduğunu kanıtlamak istiyorsak, yukarıdaki üç adıma bir dördüncü ekleriz:

(4) Önerme g için doğruysa ve g fonksiyonu *(k)* koşulunu sağlıyorsa, önermenin μg için de doğruluğu kanıtlanır.

Ancak bu tanımlama bize BYF için bir tanımlama yöntemi vermez; çünkü aynı f fonksiyonunu yukarıdaki yöntemlerle farklı şekilde kazanabiliriz. ▲

Her $f \in BF$ fonksiyonu herkesin "hesaplanabilir" olduğu konusunda uzlaşacağı türden bir fonksiyon olduğundan (5.8.2) ile aşağıdaki önermeyi elde ederiz.

[31] Bu fonksiyonlar İngilizce kaynaklarda **primitive recursive** ve **recursive** olarak adlandırılırlar.

Önerme 5.8.5 *(Basit) yinelgen fonksiyonlar sezgisel hesaplanabilir.*

Önerme 5.8.6 *(Basit) yinelgen fonksiyonlar kümesi sayılabilirdir.*

Kanıt. Doğrudan (1.3.4)'ten çıkar. ■

Demek ki $\mathbf{F}$ fonksiyonlarımızın büyük çoğunluğu (basit) yinelgen değildir, ancak yine de (basit) yinelgen olmayan bir fonksiyon vermekte zorlanırız. Bunun nedeni böyle fonksiyonların bir anlamda kurgusal olmamalarıdır. Tüm tek değişkenli (basit) yinelgen fonksiyonlarımızı $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ olarak sıralarsak $f(n) := \varphi_n(n) + 1$ ile tanımlanan f fonksiyonu (basit) yinelgen değildir.

Örnek 5.8.7 Ackermann fonksiyonu: $A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} A(0, y) &:= y + 1 \\ A(x + 1, 0) &:= A(x, 1) \\ A(x + 1, y + 1) &:= A(x, A(x + 1, y)) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan A fonksiyonuna Ackermann fonksiyonu denir. Her n için $f_n(m) := A(n, m)$ olarak tanımlansın. n üzerinden tümevarımla her n için f_n fonksiyonunun basit yinelgen olduğunu görelim. $f_0 = S$ olduğundan basit yinelgendir. f_n basit yinelgen olsun. $f_{n+1}(0) = f_n(1) =: c$ ve $h(y, z) := f_n(z)$ olmak üzere $f_{n+1} = \mathrm{Yn}(c, h)$ olduğundan f_{n+1} basit yinelgendir ((5.39),(5.40)). Bu fonksiyonla ilgili, örneğin [47]'de bulabileceğiniz bazı bilgiler verelim.

Bu fonksiyon çok hızlı büyür. Örneğin $A(4, m) \approx 2^{2^m}$, dolayısıyla bu fonksiyonun oldukça baştaki değerlerini bile hesaplamaya hiçbir bilgisayarın kapasitesi yetmez! Her basit yinelgen $g \in \mathbf{F}^1$ fonksiyonuna karşılık bir $c \in \mathbb{N}$ sayısı her y için $g(y) < A(c, y)$ olacak biçimde bulunabilir. Özellikle $g(c) < A(c, c)$ olur. A basit yinelgen değildir; olsaydı $g_A(x) := A(x, x)$ fonksiyonu da basit yinelgen olurdu. c sayısı her y için $g_A(c) < A(c, y)$ olacak biçimde seçilirse $y = c$ için $g_A(c) < A(c, c) = g_A(c)$ çelişkisine ulaşılır.

A basit yineleme ile tanımlanmamıştır; ancak yine de yinelemeli olarak tanımlanmıştır. Bu fonksiyonun $A(x, y)$ değeri $u < x$ veya $x = u \wedge v < y$ olmak üzere $A(u, v)$ değerleri yardımıyla tanımlanmıştır. Yinelgenliğinin kaynağı budur. Sonuç olarak A yinelgen ancak basit yinelgen olmayan fonksiyonlara bir örnektir. ▲

Önerme 5.8.8 *$g \in \mathbf{F}^k$ (basit) yinelgen bir fonksiyon olsun. $x_1, \ldots, x_n$ farklı değişkenler ve $1 \leq i \leq k$ için $z_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ olmak üzere $f(\overline{x_n}) := g(\overline{z_k})$ olarak tanımlanan f fonksiyonu (basit) yinelgendir.*

Kanıt. $1 \leq j_i \leq n$ olmak üzere $z_i = x_{j_i}$ olsun. Bu durumda

$$f = g\left(\pi^n_{j_1}, \ldots, \pi^n_{j_k}\right)$$

ve $\pi^n_i \in BF$ olduğundan sav aşikâr. ■

Not 5.8.9 1. *İşlevsiz değişken katma:* $W := \{x_1, \ldots, x_n\} \setminus \{z_1, \ldots, z_k\} \neq \emptyset$ ise W'daki değişkenler (5.8.8)'deki f fonksiyonunun işlevsiz değişkenleridir. Özellikle $n > k$ ise f fonksiyonu kesinlikle işlevsiz değişkenlere sahiptir. Örneğin (5.8.8)'de $g \in \mathbf{F}^2$ (basit) yinelgen ve $f\left(\overline{x_4}\right) = g\left(x_1, x_4\right)$ ise $f \in \mathbf{F}^4$ fonksiyonu da (basit) yinelgendir ve bu fonksiyonda x_2 ve x_3 değişkenleri işlevsizdir, dd. bu değişkenlere verilen değerler fonksiyonun değerlerini hiçbir şekilde etkilemezler.

2. *Değişkenlerin permütasyonu:* $g \in \mathbf{F}^m$ (basit) yinelgen ve $\{1, \ldots m\}$'nin bir permütasyonu σ ise (5.8.8)'de $z_i = x_{\sigma(i)}$ seçersek

$$f\left(x_1, \ldots, x_n\right) = g\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}\right)$$

fonksiyonu da (basit) yinelgendir.

23 *Değişkenleri özdeşlemek:* (5.8.8)'de $i < j$ için $z_i = z_j$ olabilir; bu durum dışlanmamıştır. Böyle bir durumda g fonksiyonunun $i.$ ve $j.$ değişkenlerini özdeşlemiş oluruz. Örneğin $g \in \mathbf{F}^4$ (basit) yinelgen ise (5.8.8)'de $z_1 = z_3 = x_1$ ve $z_2 = z_4 = x_3$ seçersek $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = g\left(x_1, x_3, x_1, x_3\right)$ fonksiyonu (basit) yinelgendir; burada z_1 değişkeni z_3 ile z_2 değişkeni ise z_4 ile özdeş kılınmıştır. Ayrıca x_2 değişkeni f'de işlevsizdir. ▲

Şimdi her $n \in \mathbb{N}^*$ ve her $m \in \mathbb{N}$ için $c^n_m \in \mathbf{F}^n$ fonksiyonu

$$\forall x_1, \ldots x_n \in \mathbb{N}\ c^n_m\left(x_1, \ldots x_n\right) := m$$

ile tanımlanan sabit fonksiyon olsun.

Önerme 5.8.10 *(1)* c^n_m *sabit fonksiyonları basit yinelgendirler.*

(2) **(YK)** *yerine koymada* h_i *fonksiyonlarının tüm* $x_1, \ldots, x_n$ *değişkenlerini içermesi gerekmezken* **(Yn)** *yinelemesinde ise* $n' < n$ *olmak üzere* $g \in \mathbf{F}^{n'}$ *ve* $p < n + 2$ *olmak üzere* $h \in \mathbf{F}^p$ *olabilir.*

Kanıt. (1) Her şeyden önce c^1_0 başlangıç fonksiyonu basit yinelgendir. $1 < n \in \mathbb{N}^*$ için $c^1_0(x_1)$ fonksiyonuna $x_2, \ldots, x_n$ işlevsiz değişkenlerini katarak c^n_0 basit yinelgen fonksiyonunu elde ederiz. Şimdi $n \in \mathbb{N}^*$ sabit tutulsun. m üzerinden tümevarımla her m için c^n_m fonksiyonun basit yinelgen olduğunu kanıtlayacağız. Az önce c^n_0 fonksiyonunun basit yinelgen olduğunu kanıtladık. Şimdi m için c^n_m fonksiyonunun basit yinelgen olduğunu varsayarsak (YK) ile $c^n_{m+1} = S \circ c^n_{m+1}$ basit yinelgen olur.

(2) g ve h fonksiyonlarındaki eksik değişkenler bunlara işlevsiz değişkenler olarak katılır. ■

Not 5.8.11 Biz başlangıç fonksiyonlarını tanımlarken (5.8.1)(I)'de $\mathbf{F}^0$ ve c_0^1 fonksiyonlarından yola çıktık ve (5.8.10)(1)'de tüm c_m^n fonksiyonların basit yinelgen olduğu sonucuna ulaştık. Aslında yalnızca c_0^0 fonksiyonundan yola çıkabilirdik. Önce işlevsiz değişken katmalarla her $n \in \mathbb{N}$ için c_0^n fonksiyonunun basit yinelgen olduğu görülür; ardında yukarıda kanıtta olduğu gibi c_m^n fonksiyonlarının basit yinelgen olduğu görülür. Böylece $c_0^0 \equiv 0$ olmak üzere başlangıç fonksiyonlarımızı

$$0,\ S, \pi_m^n \quad (n, m \in \mathbb{N})$$

alabiliriz. ▲

$x, y \in \mathbb{N}$ ve $x \neq 0$ olmak üzere tek olarak belirli $q, r \in \mathbb{N}$ doğal sayıları $y = qx + r$ ve $0 \leq r < x$ olacak biçimde vardır.

$$\mathrm{qt}\,(x, y) := q \quad \text{ve} \quad \mathrm{rm}\,(x, y) := r$$

olarak tanımlansın. Elbette sıfıra bölme tanımsızdır. Diğer yandan $\mathrm{qt}, \mathrm{rm} \in \mathbf{F}^2$ olmasını istiyoruz. Çıkış yolu olarak, ileride vereceğimiz formülle uyum sağlamak adına $\mathrm{rm}\,(0, y) := y$ ve $\mathrm{qt}\,(0, y) := 0$ olarak açıklayacağız. qt'ye *bölüm fonksiyonu*, rm'ye ise *kalan fonksiyonu* denir.

Teorem 5.8.12 *Aşağıdaki fonksiyonlar basit yinelgendirler:*

(1) $\mathrm{a} \in \mathbf{F}^2,\ \mathrm{a}(x, y) := x + y.$

(2) $\mathrm{m} \in \mathbf{F}^2,\ \mathrm{m}\,(x, y) := x \cdot y.$

(3) $\exp \in \mathbf{F}^2,\ \exp\,(x, y) := x^y.$

(4) $\delta \in \mathbf{F}^1,\ \delta\,(x) := \begin{cases} x - 1, & x > 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, δ ***öncül fonksiyonu.***

(5) $\mathrm{sub} \in \mathbf{F}^2,\ \mathrm{sub}\,(x, y) := \begin{cases} x - y, & x \geq y \\ 0, & x < y \end{cases}$, $x \dot{-} y := \mathrm{sub}\,(x, y).$

(6) $\mathrm{d} \in \mathbf{F}^2,\ \mathrm{d}(x, y) := |x - y|.$

(7) $\mathrm{sg} \in \mathbf{F}^1,\ \mathrm{sg}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$

(8) $\overline{\mathrm{sg}} \in \mathbf{F}^1,\ \overline{\mathrm{sg}}(x) := 1 - \mathrm{sg}(x).$

(9) $\mathrm{fac} \in \mathbf{F}^1,\ \mathrm{fac}(x) := x!.$

(10) $\min \in \mathbf{F}^2,\ \min\,(x, y) := x$ *ve* y*'nin minimumu.*

(11) $\min\,(x_1, \ldots, x_n).$

(12) $\max \in \mathbf{F}^2,\ \max\,(x, y) := x$ *ve* y*'nin maksimumu.*

(13) $\max(x_1,\ldots,x_n)$.
(14) $\mathrm{rm}\in\mathbf{F}^2,\ \mathrm{rm}(x,y):=$ *y'nin x'e bölümünde kalan.*
(15) $\mathrm{qt}\in\mathbf{F}^2,\ \mathrm{qt}(x,y):=$ *y'nin x'e bölümünde bölüm.*

Kanıt. (1) Bu savı ayrıntılı kanıtlayacağız, diğerlerinde kısa davranacağız. İki değişkenli $\mathrm{a}\in\mathbf{F}^2$ fonksiyonumuzu basit yinelgen $g\in\mathbf{F}^1$ ve $h\in\mathbf{F}^3$ ile $\mathrm{a}=\mathrm{Yn}(g,h)$ olarak kazanmak istiyoruz. $x+0=x$ ve $x+(y+1)=(x+y)+1$ olduğunu biliyoruz. $\mathrm{a}(x,0)=g(x)$ olması gerektiğinden $g(x)=x$ olmalıdır, dd. $g=\pi^1_1$. Ayrıca $\mathrm{a}(x,y)+1=\mathrm{a}(x,y+1)=h(x,y,\mathrm{a}(x,y))$ olması gerektiğinden h fonksiyonun seçimi netleşmiştir: $h(x,y,z):=S(z)$ alıyoruz. S başlangıç fonksiyonu olarak basit yinelgen, h ise bu fonksiyona işlevsiz x,y değişkenleri katılarak elde edildiği için basit yinelgendir. Böylece $\mathrm{a}=\mathrm{Yn}(g,h)$ fonksiyonu basit yinelgendir. Veya $h=S\circ\pi^3_3$ olduğundan (YK) ile basit yinelgendir ve $\mathrm{a}=\mathrm{Yn}\left(\pi^1_1,S\circ\pi^3_3\right)$ basit yinelgendir de diyebiliriz.

(2) Bu kez $x\cdot 0=0$ ve $x\cdot(y+1)=x\cdot y+x$ bağıntılarından yola çıkarsak $g:=c^1_0,\ h(x,y,z):=\mathrm{a}(z,x)$ alırsak $\mathrm{m}=\mathrm{Yn}(g,h)$ olur ve (Yn) ile m basit yinelgendir. $h=\mathrm{a}\left(\pi^3_3,\pi^3_1\right)$ olarak da yazılabileceğine dikkat ediniz.

(3) $x^0=1$ ve $x^{y+1}=x^y\cdot x$ bağıntılarından $g:=c^1_1$ ve $h(x,y,z):=\mathrm{m}(z,x)$ basit yinelgen ve $\exp=\mathrm{Yn}(g,h)$.

(4) 0 sabiti ile $\delta(0):=0$. $h:=\pi^2_1$ alırsak $\delta(y+1)=y=\pi^2_1(y,\delta(y))$ olduğundan $\delta=\mathrm{Yn}\left(0,\pi^2_1\right)$ basit yinelgendir.

(5) $g=\pi^1_1$ ve $h(x,y,z)=\delta(z)$ alırsak $\mathrm{sub}=\mathrm{Yn}(g,h)$ basit yinelgendir.

(6) $\mathrm{d}(x,y)=\mathrm{a}(\mathrm{sub}(x,y),\mathrm{sub}(y,x))$ olduğundan (YK) ile $\mathrm{d}\in\mathbf{BYF}$.

(7) $\mathrm{sg}(x)=\mathrm{sub}(x,\delta(x))$ olduğundan (YK) ile $\mathrm{sg}\in\mathbf{BYF}$.

(8) $\overline{\mathrm{sg}}(x)=\mathrm{sub}(1,\mathrm{sg}(x))$ olduğundan (YK) ile $\overline{\mathrm{sg}}\in\mathbf{BYF}$.

(9) $\mathrm{fac}(0)=0!=1$ ve $\mathrm{fac}(y+1)=y!\cdot(y+1)=\mathrm{fac}(y)\cdot S(y)$ olduğundan bize bir $c=1$ sabiti ve $h(y,z)=\mathrm{m}(z,S(y))$ yeterlidir. Böylece $\mathrm{fac}=\mathrm{Yn}(c,h)\in\mathbf{BYF}$.

(10) Sav $\min(x,y)=x\dot{-}(x\dot{-}y)$, (5) ve (YK)'den çıkar.

(11) $n\geq 2$ olmak üzere $\min(x_1,\ldots,x_n)\in BYF$ kanıtlanmışsa

$$\min(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})=\min(\min(x_1,\ldots,x_n),x_{n+1})$$

eşitliğinden (10) ile $\min(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})\in BYF$ olur.

(12) $\max(x,y)=y+(x\dot{-}y)=\mathrm{a}(y,\mathrm{sub}(x,y))$, (1), (5) ve (YK).

(13) (11) gibi kanıtlanır.

(14) ve (15) Aslında anlamlı olarak qt ve rm fonksiyonları $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$'de tanımlanmış kısmi fonksiyonlardır. Elbette $x\neq 0$ olmak üzere $\mathrm{qt}(x,0)=\mathrm{rm}(x,0)=0$ olduğu aşikâr. Şimdi $y=qx+r$, $0\leq r<x$ olsun, dd. $\mathrm{qt}(x,y)=q$ ve $\mathrm{rm}(x,y)=r$ olur. Bu durumda $y+1=qx+r+1$ olsun. Bu durumda $r+1<x$ ise $\mathrm{qt}(x,y+1)=q$ ve $\mathrm{rm}(x,y)=r+1$, eğer $r+1=x$ ise

$\mathrm{qt}(x,y) = q+1$ ve $\mathrm{rm}(x,y) = 0$ olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \mathrm{rm}(x,0) &= 0,\ \mathrm{rm}(x,y+1) = S(\mathrm{rm}(x,y)) \cdot \mathrm{sg}(|x - S(\mathrm{rm}(x,y))|), \\ \mathrm{qt}(x,0) &= 0,\ \mathrm{qt}(x,y+1) = \mathrm{qt}(x,y) + \overline{\mathrm{sg}}(|x - S(\mathrm{rm}(x,y))|) \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu denklemler $x = 0$ için de doğrudurlar ve qt ve rm fonksiyonlarının basit yinelgen olduğunu söylerler. ■

Tanım 5.8.13 (Sınırlanmış toplam ve sınırlanmış çarpımlar) $f \in \mathbf{F}^{n+1}$ *için*

$$\begin{aligned} g_1(\overline{x_n}, z) &:= \sum_{y<z} f(\overline{x_n}, y) := \begin{cases} 0, & z = 0 \\ f(\overline{x_n}, 0) + \cdots + f(\overline{x_n}, z-1), & z > 0 \end{cases}, \\ g_2(\overline{x_n}, z) &:= \prod_{y<z} f(\overline{x_n}, y) := \begin{cases} 1, & z = 0 \\ f(\overline{x_n}, 0) \cdot \cdots \cdot f(\overline{x_n}, z-1), & z > 0 \end{cases}, \\ g_3(\overline{x_n}, z) &:= \sum_{y\le z} f(\overline{x_n}, y) := \sum_{y<z+1} f(\overline{x_n}, y), \\ g_4(\overline{x_n}, z) &:= \prod_{y\le z} f(\overline{x_n}, y) := \prod_{y<z+1} f(\overline{x_n}, y). \end{aligned}$$

Önerme 5.8.14 $f \in \mathbf{F}^{n+1}$ *(basit) yinelgen ise sınırlanmış toplamları ve çarpımları da (basit) yinelgen fonksiyonlardır.*

Kanıt. $g(\overline{x_n}, z) := \sum_{y<z} f(\overline{x_n}, y)$ olsun.

$$\begin{aligned} g(\overline{x_n}, 0) &= 0 \\ g(\overline{x_n}, z+1) &= g(\overline{x_n}, z) + f(\overline{x_n}, z) \end{aligned}$$

olduğundan g (basit) yinelgendir. $h(\overline{x_n}, z) := \sum_{y\le z} f(\overline{x_n}, y)$ ise

$$h(\overline{x_n}, z) = g(\overline{x_n}, z+1) = g(\overline{x_n}, S(z))$$

olduğundan (basit) yinelgendir. Çarpma durumu benzer biçimde kanıtlanır. ■

Örnek 5.8.15 $B(0) := 0$ ve $x > 0$ ise $B(x)$ ile x'in bölenlerinin sayısını gösterelim; 1 ve x'in kendisi de bu bölenler arasındadır.

$$B(x) = \sum_{y\le x} \overline{\mathrm{sg}}(\mathrm{rm}(y,x))$$

olduğundan B fonksiyonu basit yinelgendir. ▲

λ-soyutlama: Bize bir $f \in \mathbf{F}^{n+m}$ verildiğinde $(\overline{x_n}, \overline{y_m}) \in \mathbb{N}^{n+m}$ olmak üzere biz değişken olarak $x_1, \ldots, x_n$ değişkenlerine odaklanmak istediğimizde bunu

$$\lambda x_1 \ldots x_n . f\left(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\right) \tag{5.44}$$

olarak gösteririz. Bu yaklaşımda $y_1, \ldots, y_m$ değişkenleri dondurulmuştur veya parametrelerdir denir. (5.44) ile $y_1, \ldots, y_m$ parametrelerine bağlı n değişkenli bir fonksiyon tanımlanmıştır. Bu fonksiyon

$$\lambda x_1 \ldots x_n . f\left(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\right) = f\left(\pi_1^n, \ldots, \pi_n^n, c_{y_1}^m, \ldots, c_{y_m}^m\right)$$

yerine koyması ile elde edildiğinden f (basit) yinelgen ise bu soyutlama da (basit) yinelgendir. Özetle *(basit) yinelgen fonksiyonlar λ-soyutlamasına göre kapalıdırlar.*

Tanım 5.8.16 *Bir $R \in \mathbf{R}$ bağıntısına ava χ_R (basit) yinelgen ise* ***(basit) yinelgendir*** *denir. Basit yinelgen bağıntıların kümesini* $\mathbf{BYB}$ *ile, yinelgen bağıntıların kümesini ise* $\mathbf{YB}$ *ile gösterelim. Ayrıca* $\mathbf{BYB}^n := \mathbf{BYB} \cap \mathbf{R}^n$ *ve* $\mathbf{YB}^n := \mathbf{YB} \cap \mathbf{R}^n$ *olsun.*

Sınırlanmış niceleyicileri $\forall^{<}$, $\forall^{\leq}$, $\exists^{<}$ ve $\exists^{\leq}$ olarak gösterelim ve tanımlarını bir kez daha anımsatalım. $R\left(\overline{x_n}, y\right) \in \mathbf{R}^{n+1}$ olmak üzere

$$\forall^{<y} z R\left(\overline{x_n}, z\right) :\Longleftrightarrow \forall z \left(z < y \Longrightarrow R\left(\overline{x_n}, z\right)\right)$$
$$\exists^{<y} z R\left(\overline{x_n}, z\right) :\Longleftrightarrow \exists z \left(z < y \wedge R\left(\overline{x_n}, z\right)\right)$$

$\forall^{\leq y}$ ve $\exists^{\leq y}$ sınırlanmış niceleyicileri de benzer biçimde tanımlanır. $\forall^{\leq y}$ ile $\forall^{<y+1}$ eş anlamlıdır, benzeri $\exists^{\leq y}$ ile $\exists^{<y+1}$ için de geçerlidir (evrenimizin $\mathbb{N}$ olduğuna dikkat!). Kısaltılmış gösterimlerle:

$$\forall^{<y} R\left(\overline{x_n}, y\right) := \forall^{<y} z R\left(\overline{x_n}, z\right),$$
$$\exists^{<y} R\left(\overline{x_n}, y\right) := \exists^{<y} z R\left(\overline{x_n}, z\right).$$

Ayrıca $\forall^{\leq y}$, $\exists^{\leq y}$ için de benzer kısaltmalar kullanılacaktır.

Her $R \in \mathbf{R}^{n+1}$ için $\forall^{<y} R, \ldots, \exists^{\leq y} R \in \mathbf{R}^{n+1}$. (Basit) yinelgen fonksiyonlar, yalnızca yerine koymalara ve (basit) yinelemelere göre kapalı değillerdir. Az önce sınırlandırılmış toplam ve çarpımlara ve λ-soyutlamalara da kapalı olduklarını öğrendik. Şimdi (basit) yinelgen bağıntıların başka kapalılık özelliklerini tanıyalım.

Tanım 5.8.17 $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{R}$ *bağıntılar kümesi verilsin.*

(a) $\mathbf{K}$ ***Boole işlemlerine göre kapalıdır*** $:\Longleftrightarrow$ *Her $n \in \mathbb{N}^*$ için $P, Q \in \mathbf{K} \cap \mathbf{R}^n$ ise $\neg P$, $P \vee Q$, $P \wedge Q$, $P \to Q$, $P \leftrightarrow Q$ bağıntıları da* $\mathbf{K}$*'dedir.*

(b) **K *(basit) yinelgen yerine koymalara kapalıdır*** $:\Longleftrightarrow$ *Her* $n \in \mathbb{N}^*$ *için* $R \in \mathbf{K} \cap \mathbf{R}^n$ *ve* $f_1, \ldots, f_n$ *fonksiyonları değişken sayıları aynı olan (basit) yinelgen fonksiyonlarsa*

$$\{(\overline{x_m}) \mid (f_1(\overline{x_m}), \ldots, f_n(\overline{x_m})) \in R\} \in \mathbf{K}.$$

Bu bağıntıyı $R(f_1, \ldots, f_n)$ *ile göstereceğiz.*

(c) **K *sınırlanmış niceleyicilere göre kapalıdır*** $:\Longleftrightarrow$ *Her* $n \in \mathbb{N}^*$ *için* $R \in \mathbf{K} \cap \mathbf{R}^{n+1}$ *ise* $\forall^{\leq} R$ *ve* $\exists^{\leq} R$ *bağıntıları da* **K***'dedir.*

Önerme 5.8.18 *(Basit) yinelgen bağıntıların kümesi Boole işlemlerine ve (basit) yinelgen yerine koymalara göre kapalıdır.*

Kanıt. 1. $\{\neg, \wedge\}$ fonksiyonel tamdır, dd. $\neg$ ve $\wedge$ ile $\vee$, $\rightarrow$ ve $\leftrightarrow$ işlemcilerini kazanabildiğimiz için P, Q (basit) yinelgen ise $\neg P$, $P \wedge Q$'nin de (basit) yinelgen olduğunu görmek yeterlidir. $R := \neg P$ ve $S := P \wedge Q$ ise χ_P ve χ_Q (basit) yinelgen fonksiyonlar olduğundan, yerine koymalarla elde edilen $\chi_R = \overline{\mathrm{sg}}(\chi_P)$ ve $\chi_S = \mathrm{m}(\chi_P, \chi_Q)$ fonksiyonları (basit) yinelgendirler.

2. $R \in \mathbf{R}^n$ (basit) yinelgen ve $f_1, \ldots, f_n \in \mathbf{F}^m$ (basit) yinelgen ve

$$Q := \{(\overline{x_m}) \mid (f_1(\overline{x_m}), \ldots, f_n(\overline{x_m})) \in R\}$$

olsun. Bu durumda **(YK)** ile elde edilen $\chi_Q = \chi_R(f_1, \ldots, f_n)$ (basit) yinelgendir ve bkb. ■

$R \in \mathbf{R}^{n+1}$ için

$$\mu y R(\overline{x_n}, y) := \begin{cases} *, & \forall y \neg R(\overline{x_n}, y) \text{ ise} \\ \min\{z \mid R(\overline{x_n}, z)\}, & \text{diğer durumda} \end{cases} \tag{5.45}$$

olarak açıklanır. Özel olarak $n = 0$ ise bu tanım

$$\mu y R(y) := \begin{cases} *, & \text{eğer } \forall y \neg R(y) \\ \min\{z \mid z \in R\}, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

şeklini alır. (5.45)'in sağ yanında y değişkeni bağlı değişkendir ve bu denklem

$$f(\overline{x_n}) := \mu y R(\overline{x_n}, y)$$

ile bir $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N} \cup \{*\}$ fonksiyonu tanımlar; bu fonksiyonu $\mu y R$ ile göstereceğiz. Biz bu kesimde μ işlemini yalnızca

$$(k') \quad \forall \overline{x_n}\, \exists y\, R(\overline{x_n}, y)$$

koşulunu sağlayan bağıntılara uygulayacağız. Böylece $R(\overline{x_n}, y)$ yinelgen olup *(k')* koşulunu sağladığında $\mu y R(\overline{x_n}, y) : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ fonksiyonu da yinelgen olacaktır.

$\mu^{<m}$ sınırlanmış minimalleştirme işlemcisi $R \in \mathbf{R}^{n+1}$ için

$$\mu^{<z} x R\left(\overline{x_n}, x\right) := \begin{cases} z, & \forall^{<z} x \neg R\left(\overline{x_n}, x\right) \text{ ise} \\ \min\{x \mid x < z \wedge R\left(\overline{x_n}, x\right)\}, & \text{diğer durumda} \end{cases},$$

$$\left(\mu^{<z} P\right)\left(\overline{z_n}, z\right) := \mu^{<z} x P\left(z_1, \ldots, z_n, x\right),$$

$$\left(\mu^{\leq z} P\right)\left(\overline{z_n}, z\right) := \mu^{\leq z} x P\left(z_1, \ldots, z_n, x\right) := \mu^{<z+1} x P\left(z_1, \ldots, z_n, x\right).$$

Dikkat edilirse

$$\mu^{<z} x R\left(\overline{x_n}, x\right) = \mu x \left(R\left(\overline{x_n}, x\right) \vee x = z\right)$$

eşitliği geçerlidir.

Önerme 5.8.19 *$P \in \mathbf{R}^{n+1}$ (basit) yinelgen ise (z'nin de bir değişken olduğu) $\mu^{\leq z} P$ ve $\mu^{<z} P$ fonksiyonları da (basit) yinelgendir.*

Sonuç 5.8.20 *$P \in \mathbf{R}^{n+1}$ (basit) yinelgen ve $g \in \mathbf{F}^1$ (basit) yinelgen ise $\mu^{\leq g(z)} P$ ve $\mu^{<g(z)} P$ fonksiyonları da (basit) yinelgendir.*

Kanıt. Her $y < z$ için $q\left(\overline{z_n}, y\right) := \prod_{\leq y} u\overline{\mathrm{sg}}(\chi_P\left(\overline{z_n}, u\right))$ olsun. Bu durumda

$$q\left(\overline{z_n}, y\right) = 1 \Longleftrightarrow \left(\overline{z_n}, 0\right), \ldots, \left(\overline{z_n}, y\right) \notin P \tag{5.46}$$

olur. (5.8.14) ile önce (basit) yinelgen $q\left(\overline{z_n}, y\right)$ fonksiyonunu ardından da (basit) yinelgen $\sum_{<z} y q\left(\overline{z_n}, y\right)$ fonksiyonunu elde ederiz. Ancak (5.46)'dan $\mu^{<z} P\left(\overline{z_n}, z\right) = \sum_{<z} y q\left(\overline{z_n}, y\right)$ ve bkb.

χ_P (basit) yinelgen bir fonksiyon olduğundan

$$h\left(\overline{z_n}, y, x\right) := x + \overline{\mathrm{sg}}\left(x\right) \cdot \left(y + 1\right) \cdot \chi_P\left(\overline{z_n}, y + 1\right) \cdot \overline{\mathrm{sg}}\left(\chi_P\left(\overline{z_n}, 0\right)\right)$$

fonksiyonu $n + 2$ değişkenli (basit) yinelgen bir fonksiyondur. $g\left(\overline{z_n}\right) := 0$ alırsak basit yineleme ile bir $f := \mathrm{Yn}\left(g, h\right)$ (basit) yinelgen fonksiyon elde ederiz. Elbette $Sy = y + 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f\left(\overline{z_n}, 0\right) &= 0, \\ f\left(\overline{z_n}, Sy\right) &= f\left(\overline{z_n}, y\right) + \overline{\mathrm{sg}}\left(f\left(\overline{z_n}, y\right)\right) \cdot Sy \cdot \chi_P\left(\overline{z_n}, Sy\right) \cdot \overline{\mathrm{sg}}\left(\chi_P\left(\overline{z_n}, 0\right)\right) \end{aligned} \tag{5.47}$$

olur.

Biz $f\left(\overline{z_n},y\right)=\left(\mu^{\leq y}xP\right)\left(\overline{z_n},x\right)$ olduğunu savunuyoruz. $\overline{z_n}$ keyfi seçilip sabit tutularak y üzerinden tümevarım uygulayacağız. Tanım gereği

$$f\left(\overline{z_n},0\right)=0=\mu^{\leq 0}xP\left(\overline{z_n},x\right)$$

Şimdi sav y için kanıtlanmış olsun. Farklı durumları irdeleyeceğiz.

(1) $\left(\overline{z_n},0\right)\in P$ olsun. Bu durumda

$$\mu^{\leq y+1}xP\left(\overline{z_n},x\right)\overset{def}{=}0\overset{def}{=}\mu^{\leq y}xP\left(\overline{z_n},x\right)\overset{tvk}{=}f\left(\overline{z_n},y\right). \tag{5.48}$$

$\overline{\text{sg}}\left(\chi_P\left(\overline{z_n},0\right)\right)=0$ olduğundan (5.47) ve (5.48)'den $f\left(\overline{z_n},y+1\right)=0$ olur ve bu durumda işimiz biter.

(2) $\left(\overline{z_n},0\right)\notin P$ ancak bir $0<m\leq y$ için $\left(\overline{z_n},m\right)\in P$ olsun. Bu durumda $0\neq\mu^{\leq y}xP\left(\overline{z_n},x\right)=\mu^{\leq y+1}xP\left(\overline{z_n},x\right)$, dolayısıyla tümevarım koşulundan $\overline{\text{sg}}\left(f\left(\overline{z_n},y\right)\right)=0$ olur. Böylece (5.47) ile

$$f\left(\overline{z_n},y+1\right)=f\left(\overline{z_n},y\right)\overset{tvk}{=}\mu^{\leq y}xP\left(\overline{z_n},x\right)=\mu^{\leq y+1}xP\left(\overline{z_n},x\right).$$

(3) $0\leq m\leq y$ için $\left(\overline{z_n},m\right)\notin P$ ancak $\left(\overline{z_n},y+1\right)\in P$ olsun. Bu durumda $\mu^{\leq y}xP\left(\overline{z_n},x\right)=0\overset{tvm}{=}f\left(\overline{z_n},y\right)$ ve $\mu^{\leq y+1}xP\left(\overline{z_n},x\right)=y+1$. Diğer yandan (5.47)'den de $f\left(\overline{z_n},y+1\right)=y+1$ elde ederiz.

(4) Her $0\leq m\leq y+1$ için $\left(\overline{z_n},m\right)\notin P$ olsun. Bu durumda

$$f\left(\overline{z_n},y\right)\overset{tvk}{=}\mu^{\leq y}xP\left(\overline{z_n},x\right)\overset{def}{=}0\overset{def}{=}\mu^{\leq y+1}xP\left(\overline{z_n},x\right) \tag{5.49}$$

(5.47) ve (5.49)'dan $f\left(\overline{z_n},y+1\right)=0$ olur ve sav $\mu^{\leq z}P$ için biter. Savı $\mu^{<z}P$ için görmeyi okura bırakalım.

$\mu^{\leq g(z)}P$ ve $\mu^{<g(z)}P$ yerine koymalarla elde edilmişlerdir ve bkb. ■

Önerme 5.8.21 *(Basit) yinelgen bağıntılar kümesi sınırlı niceleyicilere göre kapalıdır.*

Kanıt. $P\in\mathbf{R}^{n+1}$ için $\forall^{\leq y}xP\left(\overline{z_n},x\right)\Longleftrightarrow\neg\exists^{\leq y}x\neg P\left(\overline{z_n},x\right)$ olduğundan savı $\exists^{\leq y}P$ için kanıtlamak yeterlidir. Şimdi $P\in\mathbf{R}^{n+1}$ (basit) yinelgen olsun. $Q:=\exists^{\leq y}P$ olmak üzere

$$\chi_Q\left(\overline{z_n},y\right)=\text{sg}(\chi_P\left(\overline{z_n},0\right)+\mu^{\leq y}xP\left(\overline{z_n},x\right))$$

olduğundan χ_Q fonksiyonu (basit) yinelgen, dolayısıyla Q (basit) yinelgendir. ■

Önerme 5.8.22 *f fonksiyonun (basit) yinelgen olması için gerek ve yeter koşul G_f grafının (basit) yinelgen olmasıdır.*

Kanıt. $f \in \mathbf{F}^n$ için

$$f\left(\overline{x_n}\right) = y \Longleftrightarrow \left(\overline{x_n}, y\right) \in G_f$$

Eğer f (basit) yinelgen ise G_f bağıntısı basit yinelgen $=$ bağıntısından (bkz. Örnek 5.8.24) (basit) yinelgen yerine koymalarla elde edildiğinden (basit) yinelgendir.

Tersine G_f (basit) yinelgen olsun. $\chi := \chi_{G_f}$ (basit) yinelgen olduğundan $f\left(\overline{x_n}\right) = \mu(\overline{\mathrm{sg}} \circ \chi)\left(\overline{x_n}\right)$ fonksiyonu da (basit) yinelgendir. ■

Önerme 5.8.23 (Durumlara göre tanımlama) *1. $P_1, \ldots, P_n \in \mathbf{R}^m$ ayrık (basit) yinelgen bağıntılar ve $g_1,\ldots,g_{n+1} \in \mathbf{F}^m$ (basit) yinelgen fonksiyonlarsa*

$$f\left(\overline{x_m}\right) := \begin{cases} g_1\left(\overline{x_m}\right), & \left(\overline{x_m}\right) \in P_1 \\ \vdots & \vdots \\ g_n\left(\overline{x_m}\right), & \left(\overline{x_m}\right) \in P_n \\ g_{n+1}\left(\overline{x_m}\right), & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

fonksiyonu da (basit) yinelgendir.

2. $Q_1, \ldots, Q_n \in \mathbf{R}^m$ ve $g_1,\ldots,g_{n+1} \in \mathbf{F}^m$ (basit) yinelgen fonksiyonlarsa

$$f\left(\overline{x_m}\right) := \begin{cases} g_1\left(\overline{x_m}\right), & Q_1\left(\overline{x_m}\right) \\ g_2\left(\overline{x_m}\right), & \neg Q_1\left(\overline{x_m}\right) \wedge Q_2\left(\overline{x_m}\right) \\ \vdots & \vdots \\ g_{n+1}\left(\overline{x_m}\right), & \neg Q_1\left(\overline{x_m}\right) \wedge \cdots \wedge \neg Q_n\left(\overline{x_m}\right) \end{cases}$$

fonksiyonu da (basit) yinelgendir.

Kanıt. (1) Elbette

$$f\left(\overline{x_m}\right) = \sum_{k=1}^{n} g_k\left(\overline{x_m}\right) \cdot \chi_{P_k}\left(\overline{x_m}\right) + g_{n+1}\left(\overline{x_m}\right) \cdot \overline{\mathrm{sg}}\left(\sum_{k=1}^{n} \chi_{P_k}\left(\overline{x_m}\right)\right)$$

(basit) yinelgendir.

(2) $P_1 := Q_1,\ P_2 := \neg Q_1 \wedge Q_2, \ldots, P_n := \neg Q_1 \wedge \neg Q_2 \wedge \cdots \wedge \neg Q_n$ alırsak kendimizi (1) durumunda buluruz. ■

Örnek 5.8.24 Kazandığımız teoremler Sayılar Kuramı'nın birçok fonksiyon ve bağıntısının basit yinelgen olduğunu göstermemizi sağlar.

(1) $\mathbf{N}^2$ üzerindeki $=$ bağıntısı $\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{N}^2 \mid x_1=x_2\right\}$ bağıntısıdır. Bu bağıntının özgün fonksiyonu olan $\overline{\mathrm{sg}}\left(\mathrm{d}\left(x_1,x_2\right)\right)$, (5.8.12)(6) ve (8) ile basit yinelgendir, dolayısıyla $=$ bağıntısı basit yinelgendir. Basit yinelgen bağıntılar Boole işlemlerine göre kapalı olduklarından $\neq$ bağıntısı—ki bu $\neg =$ bağıntısıdır—basit yinelgendir.

(2) $\mathbb{N}^2$'deki $<$ bağıntısı basit yinelgendir, çünkü özgün fonksiyonu

$$\chi_{<}\left(x_1,x_2\right)=\mathrm{sg}(x_2\dot{-}x_1)$$

(5.8.12)(5)(8)'den dolayı basit yinelgendir. $\leq$ bağıntısı basit yinelgen $=$ ve $<$ bağıntılarının birleşimi olarak basit yinelgendir. $\neg\leq$ ve $\neg<$ bağıntıları, dd. $>$ ve $\geq$ bağıntıları basit yinelgendir.

(3) $a\in\mathbb{N}$ keyfi verilsin. $x=y$ bağıntısı basit yinelgen olduğundan (5.8.18)'den $x=a$ bağıntısı basit yinelgendir. Dolayısıyla $\{a\}=\{x\mid x=a\}$ basit yinelgendir. Farklı $a_1,\ldots,a_n$ sayıları verilsin ve $A:=\{a_1,\ldots,a_n\}$ olsun. $\chi_A=\mathrm{sg}(\sum_{i=1}^{n}\chi_{x=a_i})$ özgün fonksiyonu (5.8.13)'ten dolayı basit yinelgendir. Dolayısıyla her *sonlu* $A\subset\mathbb{N}$ basit yinelgendir. Elbette $\mathbb{N}^m$'de açıklanan $=$ bağıntısı da basit yinelgendir ve her sonlu $A\subset\mathbb{N}^m$ basit yinelgendir.

(4) $f\in\mathbf{F}^n$ (basit) yinelgen ise $P:=\{(\overline{x_n})\in\mathbb{N}^n\mid f(\overline{x_n})=0\}$ (basit) yinelgendir. Hemen (5.8.18)'den görüleceği gibi $\chi_P=\overline{\mathrm{sg}}\circ f$'den de çıkar.

(5) $x|y$ bağıntısı $\exists^{\leq y}z\,(y=x\cdot z)$ bağıntısından başkası değildir. Bu bağıntının basit yinelgen olduğunu görmek için (5.8.21)'den dolayı $y=x\cdot z$ bağıntısının basit yinelgen olduğunu görmek yeterlidir. Bu ise $y=w$ basit yinelgen bağıntıda basit yinelgen yerine koyma ile elde edildiğinden (5.8.18) ile basit yinelgendir. Veya kısaca $x|y$ bağıntısı özgün fonksiyonu $\mathrm{sg}(\mathrm{rm}\,(x,y))$ olduğundan basit yinelgendir.

(6) $\mathrm{Pr}\,(x)$ bağıntısı "x asaldır" bağıntısı olsun. (5.8.15)'te tanımlanan B basit yinelgen fonksiyonu ile $\chi_{\mathrm{Pr}}(x)=\mathrm{sg}\left(|B\,(x)-2|\right)$ basit yinelgen olduğundan Pr bağıntısı basit yinelgendir. Bunu şöyle de görebiliriz: $\mathrm{Pr}(x)$ bağıntısı

$$x\neq 0\wedge x\neq 1\wedge\forall^{\leq x}y\,(\neg y|x\vee y=1\vee y=x)$$

bağıntısından başka bir şey değildir. Bu ise basit yinelgen bağıntılar Boole işlemlerine ve sınırlanmış niceleyicilere göre kapalı olduğundan basit yinelgendir. ▲

(Basit) yinelgen bağıntıların sayılabilir çoklukta olduğunu biliyoruz. Şimdi bize bir $R\subseteq\mathbb{N}^2$ (basit) yinelgen bağıntısı verilsin. Her $n\in\mathbb{N}$ için $R_n:=\{y\mid R\,(n,y)\}$ dikey kesitleri $R\,(x,y)$ bağıntısından $x=n$ yerine koymasıyla elde edilirler. Dolayısıyla her $n\in\mathbb{N}$ için (basit) yinelgendir. Şimdi Cantor köşegen yöntemini kullanarak (basit) yinelgen R bağıntısı nasıl seçilirse seçilsin $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dikey kesitlerinin $\mathbb{N}$'deki tüm (basit) yinelgen

bağıntıları vermediğini kanıtlayacağız. Gödel, Birinci Eksiklik Teoremi'nin kanıtında bu teoremi kullanmıştır.

Teorem 5.8.25 *(Basit) yinelgen $R \subseteq \mathbb{N}^2$ bağıntısı nasıl verilirse verilsin (basit) yinelgen bir $A \subseteq \mathbb{N}$ bağıntısı R'nin her dikey kesitinden farklı olacak biçimde vardır.*

Kanıt. (1.1.5)(2)'deki gibi

$$A := D_R^c = \{n \mid (n,n) \notin R\} = \{n \mid (n,n) \in R^c\}$$

olsun. (1.1.5)(2)'den her $n \in \mathbb{N}$ için $A \neq R_n$ olduğunu biliyoruz. Geriye A'nın (basit) yinelgen olduğunu görmek kalıyor. R (basit) yinelgen olduğundan R^c (basit) yinelgendir. A ise $R^c\,(x,y)$'de y yerine x koyarak elde edildiğinden basit yinelgendir ve bkb. ■

5.9 Yinelgen Fonksiyonlara Farklı Bir Yaklaşım

Bu kez başlangıç fonksiyonları olarak

$$c_0^0,\ \pi_m^n,\ S,\ +,\ \cdot,\ \chi_<$$

fonksiyonlarını ve kapanış işlemleri olarak (YK) ve (Min) seçilecektir.

Tanım 5.9.1 *$c_0^0,\ \pi_m^n,\ S,\ +,\ \cdot,\ \chi_<$ fonksiyonlarının (YK) ve (Min) işlemlerine göre $\mathbf{F}$'deki kapanışını $*YF$ ile göstereceğiz ve $*YF$'deki fonksiyonlara ***yinelgen** diyeceğiz. $R \in \mathbf{R}$ bağıntısına χ_R *yinelgen ise ***yinelgen bağıntıdır** denir.*

$*\mathbf{YF} \subseteq \mathbf{YF}$ olduğu apaçıktır. Amacımız $*YF = YF$ olduğunu göstermektir.

Önerme 5.9.2 *1. $x \dot{-} y$ *yinelgendir.*

2. *(5.8.18) ve (5.8.21) aynen *yinelgen fonksiyon ve bağıntılar için de geçerlidir.*
3. *$=$ *yinelgendir.*
4. *$Q\,(x,y,z) :\Longleftrightarrow x \equiv y \pmod z$ ile verilen Q *yinelgendir.*
5. *(5.8.23) *yinelgen fonksiyon ve bağıntılar için de geçerlidir.*

Kanıt. 1. $x \dot{-} y = \mu z(x < (y + z) + 1)$.

2. Boole işlemlerine göre kapalılık (5.8.18)'deki gibi gösterilir. $P(x,y)$ *yinelgen ise

$$g(x,z) := \mu y \ (P(x,y) \vee y = z),$$
$$\exists^{<z} y P(x,y) \Longleftrightarrow g(x,z) < z$$

olduğundan tanım gereği g *yinelgen , dolayısıyla $\exists^{<z} P$ *yinelgendir. Buradan da $\forall^z P = \neg\exists^z \neg P$ *yinelgendir.

3. $x = y \Longleftrightarrow \neg(x < y) \wedge \neg(y < x)$ olduğundan $=$ *yinelgendir.

4. $Q(x,y,z) \Longleftrightarrow \exists^{<x+y+1} w\,(x = y + wz \vee y = x + wz)$ olduğundan Q *yinelgendir.

5. (5.8.23) gibi kanıtlanır. ■

Önerme 5.9.3 (Gödel'in β fonksiyonu) **Yinelgen bir $\beta(x,y,z)$ fonksiyonu şu koşul sağlanacak biçimde vardır: Her sonlu $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{N}$ dizisine karşılık a, b doğal sayıları*

$$\beta(a,b,i) = c_i, \quad i = 0,1,\ldots,n-1$$

olacak biçimde vardır.

Kanıt.

$$\beta(x,y,z) := \mu w\,(w \equiv x \pmod{(y(z+1)+1)})$$

fonksiyonu *yinelgendir. $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ doğal sayıları keyfi verilsinler. b olarak her bir c_i'den büyük ve 1 ile n arasındaki her sayıya bölünebilen bir sayı seçelim: Örneğin $m := \max(n-1, c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ olmak üzere $b := m!$ olsun. Bu durumda $b\cdot 1+1, b\cdot 2+1, \ldots, b\cdot n+1$ sayıları aralarında asaldır: Bir an için $1 \le i < j \le n$ için p asal sayısının hem $b\cdot i+1$ hem de $b\cdot j+1$ sayısını böldüğünü varsayalım. Dolayısıyla $p \mid (j-i)\cdot b$. Diğer yandan $p \not| b$ (aksi halde $p|1$ olurdu!); öyleyse $p \mid (j-i)$. Ancak bu bir çelişkidir; çünkü buradan, tanım gereği $(j-i) \mid b$ olduğundan $p|b$ elde edilir ki bunun olmadığını biliyoruz.

Çin Kalan Teoremi'nden bir a sayısı

$$a \equiv c_i \pmod{b\cdot(i+1)+1}, \quad 0 \le i \le n-1$$

olacak biçimde vardır. $c_i < b\cdot(i+1)+1$ olduğundan c_i sayısı a sayısına modulo $b\cdot(i+1)+1$ eşit olan doğal sayıların en küçüğüdür, dd. $\beta(a,b,i) = c_i$. ■

Elbette

$$\beta(x,y,z) = \mathrm{rm}(y(z+1)+1, x)$$

olduğu apaçıktır.

Teorem 5.9.4 $*YF = \mathbf{YF}$, *dd. yinelgen ve *yinelgen kavramları örtüşürler.*

Kanıt. *YF'nin (Yn)'ye göre kapalı olduğunu göstermek yeterlidir. $f = \mathrm{Yn}(g,h)$ ve g ve h fonksiyonları *yinelgen olsunlar:

$$f(\overline{x_n},0) = g(\overline{x_n})$$
$$f(\overline{x_n},y+1) = h(\overline{x_n},y,f(\overline{x_n},y)).$$

Şimdi

$$(\beta(a,b,0) = g(\overline{x_n})) \wedge \forall^{<y} i \ \ (\beta(a,b,i+1) = h(\overline{x_n},i,\beta(a,b,i)))$$

olarak tanımlanan $R(\overline{x_n},y,a,b)$ bağıntısı*yinelgendir. (5.9.3)'ü kullanarak $\forall\overline{x_n},y\exists a,bR(\overline{x_n},y,a,b)$ elde ederiz. Dolayısıyla

$$Q(\overline{x_n},y,s) := \exists^{\leq s} a,b \ R(\overline{x_n},y,a,b)$$

*yinelgendir. Buradan ise $k(\overline{x_n},y) := \mu s Q(\overline{x_n},y,s)$ *yinelgen olur. Diğer yandan

$$f(\overline{x_n},y) = \mu z \exists^{\leq k(\overline{x_n},y)} a,b\,(R(\overline{x_n},y,a,b) \wedge z = \beta(a,b,y))$$

olduğundan f fonksiyonu *yinelgendir. ■

5.10 Basit Yinelgen Kodlama

Gödel'in matematiğe kazandırdığı aritmetikleştirme yöntemi, biçimsel kuramların sözeden kuramları dışında da işimize yarar. Bu kesimde basit yinelgen fonksiyonları, bir sonraki kesimde yinelgen kısmi fonksiyonları, onu izleyen kesimde ise kayıt makinalarını ve onların hesaplamalarını aritmetikleştirecek ve yinelgen kısmi fonksiyonların, kayıt makinaları ile hesaplanabilir fonksiyonlarla örtüştüğünü kanıtlayacağız.

Her n doğal sayısı için $\mathbb{N}^n$ uzayını doğal sayılarla kodlamak istiyoruz, dd.

$$c^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$$

fonksiyonları tanımlayacağız. Asgari istek uzayımızın farklı öğelerinin farklı kod numaraları edinmesidir. İkinci bir isteğimiz bize verilen bir doğal sayının uzayımızın bir öğesinin kodu olup olmadığını ve bir kod ise hangi öğesinin kodu olduğunu bilmektir. Dolayısıyla

$$p_i^n(c_n(x_1,\ldots,x_n)) = x_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

koşulunu sağlayan kod çözücü $p_i^n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonları tanımlamamız gerekir. Problem bu haliyle aşırı geneldir; biz c^n ve p_i^n fonksiyonlarının basit yinelgen olmasını isteyeceğiz. Problemimizin bu şekliyle de farklı çözümleri vardır.

Her a doğal sayısının, $p_1, \ldots, p_n$ birbirinden farklı asal sayılar ve $\alpha_i \geq 1$ doğal sayılar olmak üzere $a = p_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot p_n^{\alpha_n}$ olarak yazılabildiğini ve ayrıca $p_1 < \cdots < p_n$ olmasını istersek bu gösterimin tek olarak belirli olduğunu biliyoruz. Kodlamada bu gerçekten yararlanacağız.

$p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu, değerleri asal sayılar olan, sıralamaya sadık ve $p(0) = 2$ olan fonksiyonumuz olsun. p'nin ilk değerleri

$$p(0) = 2,\ p(1) = 3,\ p(2) = 5, p(3) = 7, \ldots$$

olacaktır. Bu durumda

$$c^n(x_0, \ldots, x_{n-1}) := p(0)^{x_0+1} \cdot \cdots \cdot p(n-1)^{x_{n-1}+1}$$

olarak açıklayacağız. Sayılar Kuramı'ndan c^n fonksiyonunun birebir olduğunu biliyoruz.

$p(x)$ için bir aritmetik ifade bilmediğimizden p'nin basit yinelgen olması bizi şaşırtabilir. Ancak açıktır ki $p(x+1)$ asal sayısı $p(x)$'ten büyük olan asal sayıların en küçüğü olacaktır. Öklid'le $p(x) < y \leq p(x)! + 1$ olan y asal sayıları olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} p(0) &= 0 \\ p(x+1) &= \mu^{\leq p(x)!+1} y\,(\Pr(y) \wedge p(x) < y) \end{aligned} \tag{5.50}$$

olacaktır. (5.50)'nin sağ yanı basit yinelgen bir $h(z)$ fonksiyonu ile $h(p(x))$ ise işimiz biter. Aşağıdaki önerme bunu gösterecektir:

Önerme 5.10.1 *$p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu basit yinelgendir.*

Kanıt. (5.8.24)(2)'den $<$ ve (5.8.24)(6)'dan $\Pr(x)$ basit yinelgen olduklarından $Q(z,y) := \Pr(y) \wedge z < y$ bağıntısı, dolayısıyla (5.8.19) ile $g(z,u) := (\mu^{\leq u} yQ)(z,y)$ fonksiyonu basit yinelgendir. Ayrıca $z! + 1$ basit yinelgen olduğundan $g(z,u)$'de u yerine $z! + 1$ yazarak elde ettiğimiz

$$h(z) := g(z, z! + 1) = \mu^{\leq z!+1} y\,(\Pr(y) \wedge z < y)$$

basit yinelgen ve böylece $p(x+1) = h(p(x))$ ve bkb. ■

Bundan sonra kimi zaman $p(x)$ yerine p_x yazmayı yeğleyeceğiz. Her $x > 0$ doğal sayısını *tek* olarak belirli $v(x,i) \geq 0$ doğal sayılarıyla

$$x = p_0^{v(x,0)} \cdot p_1^{v(x,1)} \cdot \cdots \cdot p_x^{v(x,x)} = \prod_{i=0}^{x} p_x^{v(x,i)}, \quad (x > 0) \tag{5.51}$$

olarak yazabiliriz. Bu gösterimde tüm $p_0, \ldots, p_x$ asal sayılarını kullandığımız için eğer $p_i \nmid x$ ise elbette $v(x,i) = 0$ olacaktır. $0 \leq i \leq x$ için $p_i \nmid x$ ise $v(x,i) = 0$, eğer $p_i | x$ ise $v(x,i) = \min\{m : p_i^{m+1} \nmid x\}$ olduğu apaçıktır. Bu arada $v(0,y) := 0$ olarak tanımlıyoruz.

Tanım 5.10.2 *Her* $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ *için*

$$v(x,y) := \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \mu^{\leq x} z \neg \left(p_y^{z+1} | x\right), & x \neq 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın.

Sonuç 5.10.3 $v : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *fonksiyonu basit yinelgendir ve her* $x > 0$ *doğal sayısı için (5.51) geçerlidir.*

Kanıt. p_y ve bölme basit yinelgen ve basit yinelgen bağıntıların olumsuzları da basit yinelgen olduğundan $\neg \left(p_y^{z+1} | x\right)$ basit yinelgendir; buradan ise (5.8.19) ve (5.8.23) ile $v(x,y)$ basit yinelgendir. ■

Doğal sayıların sonlu dizlerinin

$$\mathbb{N}^{<\omega} := \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathbb{N}^n$$

kümesini kodlamak için hazırlığımız tamamdır. Yaygın gösterimlere uyarak $\mathbb{N}^{<\omega}$'yı kodlayan fonksiyonu $\langle\rangle$ ile ve kod çözücü fonksiyonlarımızı ise $()_i$ ile göstereceğiz. Burada $\mathbb{N}^0$ uzayının tek öğeli bir küme ve yegane öğesinin sıfır öğeli $()$ boş dizi olduğunu anımsatalım. Yalınlık açısından $\langle(x_0, \ldots, x_n)\rangle$ yerine $\langle x_0, \ldots, x_n\rangle$ yazmayı yeğleyeceğiz; bu uzlaşmayla $\langle()\rangle$ yerine $\langle\rangle$ yazacağız.

Tanım 5.10.4 *(a)* $\langle\rangle := 0$ *ve her* $(z_0, \ldots, z_n)$ *için*

$$\langle z_0, \ldots, z_n\rangle := \prod_{i=0}^{n} p_i^{z_i+1} \tag{5.52}$$

sayısına $\langle z_0, \ldots, z_n\rangle$ *dizisinin* ***kodu*** *veya* ***dizi sayısı*** *denir.*

(b) $(x)_i := v(x,i) \dot{-} 1$, $i \in \mathbb{N}$ *olsunlar. Bunlara* ***(kod) çözücü*** *fonksiyonlar diyelim.*

(c) $Seq := \left\{z \in \mathbb{N} \mid z \neq 1 \wedge \forall^{\leq z} i \left(p_{i+1} | z \Longrightarrow p_i | z\right)\right\}$ *kümesine* ***dizi sayıları*** *veya* ***kodlar*** *kümesi denir.*

(d) $x \neq 0, 1$ *için* $\mathrm{lh}(x) := \mu^{\leq x} z \; p_z \nmid x$ *ve* $\mathrm{lh}(0) = \mathrm{lh}(1) := 0$ *olarak açıklanan* $\mathrm{lh}(x)$ *sayısına* x*'in* ***uzunluğu*** *denir.*

(e) $\langle\rangle^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N},\ \langle\rangle^n (z_0, \ldots, z_{n-1}) := \langle z_0, \ldots, z_{n-1}\rangle$ *olsun.*

(f) $\langle\rangle : \mathbb{N}^{<\omega} \to \mathbb{N}$ *dönüşümü her* n *için* $\langle\rangle | \mathbb{N}^n := \langle\rangle^n$ *olarak açıklansın.*

Not 5.10.5 Daima $\langle z_0, \ldots, z_n\rangle \neq 1$! Dolayısıyla 1 asla bir dizinin kodu değildir. Bunu karşın $(x)_i$ her x doğal sayısı için açıklanmıştır. Bir z sayısının bir dizinin kodu olabilmesi için gerek ve yeter koşul $p_{i+1}|z \Longrightarrow p_i|z$ olmasıdır. $x = \langle z_0, \ldots, z_n\rangle$ dersek (5.52)'nin sağ yanı x sayısının asal çarpanlarına ayrılmışıdır ve her bir asal çarpanın kuvveti ≥ 1'dir. $\mathrm{lh}\,(x) = n+1$ ve açıktır ki x bir kod ise $\mathrm{lh}\,(x)$ tamı tamına x sayısının farklı asal bölenlerinin sayısıdır. Tanımdan ancak çift doğal sayıların bir kod sayısı olabileceğini görürüz ve $t > 1$ herhangi bir tek sayı ise tanım gereği $\mathrm{lh}(t) = 0$ olur.

Biz tanımı yalnızca her $\langle\rangle^n$ değil aynı zamanda $\langle\rangle$ da birebir olacak biçimde verdik. Bağlamdan söz konusu yerde n'nin belli olduğu durumlarda $\langle\rangle^n$ yerine $\langle\rangle$ yalın gösterimini kullanmayı yeğleyeceğiz. ▲

Not 5.10.6 $\langle z_0, \ldots, z_n\rangle$'nin tanımını (5.52)'deki gibi almanız gerekmez! Çokça kullanılan bir kodlama

$$\langle z_0, \ldots, z_n\rangle^n_* := \prod_{i=0}^{n} p_i^{z_i}$$

kodlamasıdır. Bu durumda elbette $(x)_{*i} := v\,(x, i)$ alınır. Her bir $\langle\rangle^n_*$ yine birebirdir, ancak $\langle\rangle_* : \mathbb{N}^{<\omega} \to \mathbb{N}$ dönüşümü birebir değildir. Bu tanımdan yola çıkıldığında tüm teoremler $(x)_i$ yerine $(x)_{*i} := v\,(x, i)$ alınmak koşuluyla, bazen küçük ufak değişimlerle doğru kalırlar. Bu iki farklı tanım arasındaki ilişki

$$\langle z_0, \ldots, z_n\rangle = \langle z_0 + 1, \ldots, z_n + 1\rangle_*$$

ile verilmiştir. Eğer her $z_k > 0$ ise

$$\langle z_0, \ldots, z_n\rangle_* = \langle z_0 \dot{-} 1, \ldots, z_n \dot{-} 1\rangle$$

eşitliği geçerlidir. Gösterimlerin yalınlığı açısından

$$[z_0, \ldots, z_n] := \prod_{i=0}^{n} p_i^{z_i} \quad \text{ve} \quad [x]_i := v\,(x, i)$$

yazacağız. Kuramlarımızın kodlanmasında bu tanımları yeğleyeceğiz. ▲

Her ne kadar biz kullanmayacaksak da mantık kitaplarında kodlamalarda sıkça s.365'de her $n \geq 2$ için açıkladığımız basit yinelgen $\pi_n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ tameşlemeleri kullanılır.

Önerme 5.10.7 $\langle\rangle^n$, $(x)_i$ *ve* $\mathrm{lh}(x)$ *fonksiyonları basit yinelgen fonksiyonlardır ve* Seq *basit yinelgen bağıntıdır. Ayrıca*

1. $z \in Seq \wedge \mathrm{lh}(z) = 0 \Longleftrightarrow z = \langle\rangle = 0$,
2. $z = \langle z_0, \ldots, z_{n-1}\rangle \Longleftrightarrow z \in Seq \wedge \mathrm{lh}(z) = n \wedge \forall i < n\,(z_i = (z)_i)$.

Kanıt. Üs, çarpım ve toplama fonksiyonları basit yinelgen fonksiyonlar olduğundan

$$\langle\rangle^n(x_0 \cdots x_{n-1}) = \prod_{i=0}^{n-1} p_i^{x_i+1},\ (\mathbb{N}^n \to \mathbb{N})$$

fonksiyonu basit yinelgendir. $v(x,y)$ ve $\dot{-}$ fonksiyonları basit yinelgen olduğundan $(x)_i$ fonksiyonları basit yinelgendir. $p(x)$ basit yinelgen, $|$ basit yinelgen ve basit yinelgen bağıntılar Boole işlemlerine göre kapalı olduğundan $p_{i+1}|z \Longrightarrow p_i|z$ bağıntısı basit yinelgendir. Öyleyse Seq basit yinelgendir.

(1) ve (2) doğrudan tanımlardan çıkar. ■

$a, b \in \mathbb{N}$ doğal sayıları arasında **ekleme** veya **ulama** diyeceğimiz bir $\frown$ ikili işlem tanımlayacağız: $a \frown 0 := a$ ve $0 \frown a := a$ ve $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ için

$$a \frown b := \langle (a)_0, \ldots, (a)_{\mathrm{lh}(a)\dot{-}1}, (b)_0, \ldots, (b)_{\mathrm{lh}(b)\dot{-}1}\rangle$$

olarak açıklıyoruz. Tanımdan kolayca görüleceği gibi

$$a \frown b = a \cdot \prod_{j<\mathrm{lh}(b)} p_{\mathrm{lh}(a)+j}^{(b)_j+1}$$

olduğundan basit yinelgen fonksiyonlar ile tanımlanan $x, y \rightsquigarrow x \frown y$ fonksiyonu basit yinelgendir. Ekleme, dizi sayıları dd. kodlar için

$$\langle x_0, \ldots, x_n\rangle \frown \langle y_0, \ldots, y_m\rangle = \langle x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_m\rangle$$

güzel şeklini alır. Bu arada her $x \neq 0$ için $(x)_i < x$ olduğuna dikkat çekelim.

Tam Yineleme

Buraya kadar yinelgen tanımlamanın en yalın şeklini kullandık: $f(\overline{z_n}, x+1)$ değerini hesaplarken yalnızca $f(\overline{z_n}, x)$ değerini kullandık. Yinelgen tanımlama genel olarak yinelemede $f(\overline{z_n}, x+1)$ değerini hesaplarken $f(\overline{z_n}, 0)$,..., $f(\overline{z_n}, x)$ değerlerinin tamamını veya bir kısmını kullanmamıza izin verir, dd. f fonksiyonun *geçmişini* kullanmamıza izin verir. Şimdi her $f \in \mathbf{F}^{n+1}$ için İngilizce literatürde "course-of-values function" da denilen bir $\overline{f} \in \mathbf{F}^{n+1}$ fonksiyonu tanımlayacağız. $f \in \mathbf{F}^{n+1}$ için:

$$\begin{array}{ll} (CV0) & \overline{f}(\overline{z_n}, 0) = \langle\rangle = 0, \\ (CVS) & \overline{f}(\overline{z_n}, x+1) = \overline{f}(\overline{z_n}, x) \frown \langle f(\overline{z_n}, x)\rangle \end{array}$$

ile verilen $\overline{f}$ fonksiyonu f'den CV-yinelemesiyle elde edilmiştir diyelim.

Önerme 5.10.8 *1.* $\overline{f}\left(\overline{z_n}, x+1\right) = \left\langle f\left(\overline{z_n}, 0\right), \ldots, f\left(\overline{z_n}, x\right)\right\rangle$

2. f *basit yinelgendir* $\Longleftrightarrow$ $\overline{f}$ *basit yinelgendir.*

Kanıt. (1) x üzerinden tümevarımla görülür. $x = 0$ için (CV0) ile

$$\overline{f}\left(\overline{z_n}, 1\right) \overset{(CVS)}{=} \overline{f}\left(\overline{z_n}, 0\right) \frown \left\langle f\left(\overline{z_n}, 0\right)\right\rangle \overset{(CV0)}{=} 0 \frown \left\langle f\left(\overline{z_n}, 0\right)\right\rangle \overset{def}{=} \left\langle f\left(\overline{z_n}, 0\right)\right\rangle$$

Şimdi sav x için kanıtlanmış olsun:

$$\begin{aligned}\overline{f}\left(\overline{z_n}, x+1+1\right) &\overset{(CVS)}{=} \overline{f}\left(\overline{z_n}, x+1\right) \frown \left\langle f\left(\overline{z_n}, x+1\right)\right\rangle \\ &\overset{tvk}{=} \left\langle f\left(\overline{z_n}, 0\right), \ldots, f\left(\overline{z_n}, x\right)\right\rangle \frown \left\langle f\left(\overline{z_n}, x+1\right)\right\rangle \\ &= \left\langle f\left(\overline{z_n}, 0\right), \ldots, f\left(\overline{z_n}, x\right), f\left(\overline{z_n}, x+1\right)\right\rangle\end{aligned}$$

(2) f basit yinelgen ise $\overline{f}$'nin basit yinelgen olduğu apaçıktır. Tersine $\overline{f}$ basit yinelgen ise $f\left(\overline{z_n}, x\right) = \left(\overline{f}\left(\overline{z_n}, x+1\right)\right)_x$ ve ulama basit yinelgen olduğundan f de basit yinelgendir. ■

(5.10.8)(1)'den

$$\overline{f}\left(\overline{z_n}, x+1\right) = \prod_{i=0}^{i=x} p_i^{f(\overline{z_n}, i)+1} = p_0^{f(\overline{z_n}, 0)+1} \cdot \ldots \cdot p_x^{f(\overline{z_n}, x)+1}$$

elde ederiz.

Teorem 5.10.9 (CV-yineleme) *1.* $g : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ *basit yinelgen olsun. Bir* $h : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ *fonksiyonu*

$$h\left(\overline{z_n}, x\right) = g(\overline{z_n}, x, \overline{h}\left(\overline{z_n}, x\right)) \tag{5.53}$$

koşulunu sağlıyorsa tek olarak belirlidir ve basit yinelgendir.

2. $Q \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ *basit yinelgen bir bağıntı ve* $R \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ *bağıntısı için*

$$\forall\left(\overline{z_n}, x\right) \in \mathbb{N}^{n+1}\ \left(R\left(\overline{z_n}, x\right) \Longleftrightarrow Q\left(\overline{z_n}, x, \overline{\chi_R}\left(\overline{z_n}, x\right)\right)\right)$$

sağlanıyorsa R *de basit yinelgendir.*

Kanıt. 1. h fonksiyonu (5.53)'ü sağlasın. Bu durumda

$$\begin{aligned}\overline{h}\left(\overline{z_n}, 0\right) &= \langle\rangle = 0 \\ \overline{h}\left(\overline{z_n}, x+1\right) &= \overline{h}\left(\overline{z_n}, x\right) \frown \left\langle g(\overline{z_n}, x, \overline{h}\left(\overline{z_n}, x\right))\right\rangle\end{aligned}$$

ve $f\left(\overline{z_n}, x, y\right) := y \frown \left\langle g\left(\overline{z_n}, x, y\right)\right\rangle$ ile $\overline{h} = \mathrm{Yn}\left(0, f\right)$ olur. $\frown$ ve $\langle\rangle$ basit yinelgen olduğundan f basit yinelgen, dolayısıyla $\overline{h}$ basit yinelgendir ve tek

olarak belirlidir. (5.10.8)'den dolayı h de basit yinelgendir ve tek olarak belirlidir.

2. Her $(\overline{z_n}, x) \in \mathbb{N}^{n+1}$ için

$$\chi_R(\overline{z_n}, x) = \chi_Q(\overline{z_n}, x, \overline{\chi_R}(\overline{z_n}, x))$$

olduğundan sav önermenin birinci kısmından çıkar. ■

Sonuç 5.10.10 *$g \in \mathbf{F}^{n+k+1}, g' \in \mathbf{F}^n$ ve $h_i \in \mathbf{F}^1, 1 \leq i \leq k$ fonksiyonları basit yinelgen olsunlar ve her $1 \leq i \leq k$ ve her $x > 0$ için $h_i(x) < x$ sağlansın. Bu durumda*

$$f(\overline{z_n}, x) := \begin{cases} g'(\overline{z_n}), & x = 0 \\ g(\overline{z_n}, x, f(\overline{z_n}, h_1(x)), \ldots, f(\overline{z_n}, h_k(x)), & x \neq 0 \end{cases}$$

koşulunu sağlayan tek olarak belirli basit yinelgen bir $f \in \mathbf{F}^{n+1}$ fonksiyonu vardır:

Kanıt. f'nin tekliği aşikâr, basit yinelgenlik ise

$$f(\overline{z_n}, x) := \begin{cases} g'(\overline{z_n}), & x = 0 \\ g(\overline{z_n}, x, (\overline{f}(\overline{z_n}, x))_{h_1(x)}, \ldots, (\overline{f}(\overline{z_n}, x))_{h_k(x)}), & x \neq 0 \end{cases}$$

olduğundan doğrudan (5.10.9)'dan çıkar. ■

$h_i(x) < x$ olduğunu göz önünde tutarsak sonuç (6.10.10) son derece kullanışlı bir araçtır: Yinelemede $f(\overline{z_n}, x)$'in tanımında kendisinden önce gelen $f(\overline{z_n}, 0), \ldots, f(\overline{z_n}, x-1)$ değerlerinin tümünü veya bir kısmını kullanabiliriz. Yola çıktığımız fonksiyonlar basit yinelgense tanımladığımız f fonksiyonu da basit yinelgen olur. Bu sonucu sıkça kullanacağız. Bağıntıların basit yinelgenliği özgün fonksiyonlarının basit yinelgenliğine denk olduğundan benzeri bir önerme bağıntı tanımlarında da geçerlidir.

Önerme 5.10.11 (Eşzamanlı yineleme) *$1 \leq i \leq m$ için $g_i \in \mathbf{F}^n$ ve $h_i \in \mathbf{F}^{n+m+1}$ basit yinelgen fonksiyonları verilmiş olsunlar. Tek olarak belirli basit yinelgen $f_i \in \mathbf{F}^{n+1}$ fonksiyonları her $i = 1, \ldots, m$ için*

$$f_i(\overline{z_n}, 0) = g_i(\overline{z_n}), \tag{5.54}$$

$$f_i(\overline{z_n}, x+1) = h_i(\overline{z_n}, x, f_1(\overline{z_n}, x), \ldots, f_m(\overline{z_n}, x)) \tag{5.55}$$

olacak şekilde vardır.

Kanıt. Basit yineleme ile tanımlanan

$$\begin{aligned}\overline{f}(\overline{z_n}, 0) &= \langle g_1(\overline{z_n}), \ldots, g_m(\overline{z_n})\rangle,\\ \overline{f}(\overline{z_n}, x+1) &= \langle h_1(\overline{z_n}, x, (\overline{f}(\overline{z_n}, x))_0, \ldots, (\overline{f}(\overline{z_n}, x))_{m-1}), \ldots .\\ &\qquad \ldots, h_m(\overline{z_n}, x, (\overline{f}(\overline{z_n}, x))_0, \ldots, (\overline{f}(\overline{z_n}, x))_{m-1})\rangle\end{aligned}$$

$\overline{f}$ fonksiyonu basit yinelgendir ve

$$f_i\left(\overline{z_n}, x\right) := \left(\overline{f}\left(\overline{z_n}, x\right)\right)_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

basit yinelgen fonksiyonları (5.54) ve (5.55) denklemlerini sağlarlar. Teklik kolayca x üzerinden tümevarımla elde edilir. ■

Şimdi basit yinelgen fonksiyonlarımızın **BYF** kümesini aritmetikleştireceğiz. Her f fonksiyonuna program kodları da denen doğal sayılar karşılık getireceğiz; öyle ki bu sayılar kendilerinden f fonksiyonunu kazanmamızı sağlayacaklar. Bu program kodlarına **Gödel sayıları, ϕ-damgası** veya kısaca **damga** isimleri verilir. Bunu tümevarımsal biçimde (dikkat!) yapacağız.

Önce başlangıç fonksiyonları için tek olarak belirli kodlar vereceğiz. Sonra bunlardan (YK) ve (Yn) ile elde edilen basit yinelgen fonksiyonları numaralandırmak için bir yöntem açıklayacağız. Bu tür fonksiyonları elde etmenin birden çok yolu olabileceğinden (bkz. aşağıdaki Not) bu fonksiyonları kodlayan birden çok Gödel sayısı olabilecektir:

Tanım 5.10.12 *Basit yinelgen fonksiyonlar için **Gödel sayıları** şu şekilde tanımlanır:*

1. $\ulcorner c_k^n \urcorner := \langle 0, n, k\rangle$.
2. $\ulcorner \pi_k^n \urcorner := \langle 1, n, k\rangle$.
3. $\ulcorner S \urcorner := \langle 2, 1\rangle$.
4. *Eğer $e_1, \ldots, e_n$ ve e' sayıları sırasıyla $h_1, \ldots, h_n$ ve g fonksiyonlarının birer Gödel sayısı ise*

   $$\langle 3, ((e_1)_1, e', e_1, \ldots, e_n\rangle$$

   sayısı $g(h_1, \ldots, h_n)$ fonksiyonunun bir Gödel sayısıdır.
5. *Eğer e ve e' sayıları sırasıyla g ve h fonksiyonlarının birer Gödel sayısı iseler*

   $$\langle 4, (e)_1 + 1, e, e'\rangle$$

   sayısı $\mathrm{Yn}(g, h)$ fonksiyonunun bir Gödel sayısıdır.

Bir $f \in BYF$ için hangi Gödel sayısının kullanıldığının önemli olmadığı durumlarda bunlardan herhangi birini göstermek için $\ulcorner f \urcorner$ yazacağız.

Not 5.10.13 (5.8.4)'te de belirttiğimiz gibi BYF'nin yinelgen tanımlanmış olması BYF'nin öğelerine ilişkin önermeler için yinelgen kanıtlama olanağı verir; ancak asla BYF'nin öğelerine ilişkin bir kavramı yinelgen tanımlama olanağı vermez. Bunun nedeni herhangi bir $f \in BYF$ fonksiyonunu farklı şekillerde kazanabileceğimiz olasılığıdır. Örnek: $f(x,y) = x^2 + xy$ fonksiyonunu $\mathrm{a}(u,v) = u + v$ fonksiyonundan ve $\mathrm{m}(u,v) = u \cdot v$ çarpım fonksiyonundan yerine koymalarla elde edebiliriz: $f(x,y) = \mathrm{a}\left(x^2, xy\right)$ ve $f(x,y) = \mathrm{m}(x, x+y)$.

En yalın şekliyle $f \in BYF$ için $\ulcorner f \urcorner$ bir biçimde açıklanmış olsun. $\pi_1^1 := Id$ olduğundan

$$f = \pi_1^1 \circ f = \pi_1^1 \circ \left(\pi_1^1 \circ f\right) = \ldots$$

elde ederiz. Bu durumda yukarıdaki tanımdan, e sayısı f için bir Gödel sayısı ise, $\pi_1^1 \circ f$ için

$$\langle 3, (e)_1, \ulcorner \pi_1^1 \urcorner, e \rangle > e$$

sayısı bir Gödel sayısıdır. Bunu bu şekilde devam ettirip

$$\pi_1^1 \circ (\pi_1^1 \circ f), \pi_1^1 \circ (\pi_1^1 \circ (\pi_1^1 \circ f)), \ldots$$

bileşkelerini kodlayarak, hepsi de f fonksiyonunu kodlayan kesin artan bir dizi elde ederiz. Dolayısıyla her f fonksiyonuna sonsuz çoklukta kod karşılık getirilmiştir. ▲

Bir f fonksiyonunun değişken sayısını $\sharp f$ ile gösterirsek tanımımızı $\sharp f = (\ulcorner f \urcorner)_1$ olacak biçimde verdik.

$$CBYF := \{e |\ e \text{ bir } f \in BYF \text{ için Gödel sayısıdır.}\}$$

olsun.

Not 5.10.14 $CBYF \subseteq \mathbb{N}$ kümesini

$$A := \{\langle 0, n, k\rangle \mid n, k \in \mathbb{N}\} \cup \{\langle 1, n, k\rangle \mid 1 \leq k \leq n \in \mathbb{N}\} \cup \{\langle 2, 1\rangle\}$$

kümesinin aşağıda vereceğimiz işlemlere göre Seq kümesinde kapanışı olarak da verebiliriz. İşlemlerimiz:

1. *(YK) işlemi:* $a, b_1, \ldots, b_n \in Seq$ girdileri $(a)_1 = n$ ve $(b_1)_1 = \cdots = (b_n)_1 = m$ olmak üzere çıktı

$$\langle 3, m, a, b_1, \ldots, b_n \rangle .$$

2. *(Yn) işlemi:* $a, b \in Seq$ girdileri $(a)_1 = n$ ve $(b)_1 = n+2$ olmak üzere çıktı

$$\langle 4, n+1, a, b\rangle .$$

A kümesinin Seq kümesinde bu iki işleme göre kapanışını E ile gösterirsek $E = CBYF$ olduğu kolayca görülür.

$e \in CBYF$ kodlaması bize e'den, kodlanan f'yi nasıl hesaplayacağımıza ilişkin bir algoritmayı verir. $(e)_0$ bize nasıl bir fonksiyonla karşı karşıya bulunduğumuzu bildirir; bir başlangıç fonksiyonu mu yoksa yerine koymayla mı elde edilmiş ya da basit yinelemeyle mi elde edilmiştir bizi bilgilendirir. $(e)_1$ ise fonksiyonumuzun değişken sayısını bildirir vs... e'nin kodladığı fonksiyon f ise bunu $\{e\} = f$ ile göstereceğiz[32]. Bu durumda örneğin

$$e = \langle 3, m, a, b_1, \ldots, b_n\rangle$$

ise

$$\{e\}\left(\overline{x_m}\right) = \{a\}\left(\{b_1\}\left(\overline{x_m}\right), \ldots, \{b_n\}\left(\overline{x_m}\right)\right)$$

ve $e = \langle 4, n+1, a, b\rangle$ ise $\{e\} = \mathrm{Yn}\left(\{a\}, \{b\}\right)$ ve $\sharp\{e\} = n+1$. ▲

Teorem 5.10.15 ***CBYF*** *basit yinelgendir.*

Kanıt. Her $e \in \mathbb{N}$ için, yukarıdaki tanımları izlersek, $Q := CBYF$ ve $P_0(e)$ olarak $e \in Seq$ bağıntısını alırsak

- $P_1(e) := (e)_0 = 0 \ \wedge \ \mathrm{lh}(e) = 3$,
- $P_2(e) := ((e)_0 = 1 \ \wedge \ \mathrm{lh}(e) = 3) \ \wedge \ 0 < (e)_2 \leq (e)_1)$,
- $P_3(e) := ((e)_0 = 2 \ \wedge \ \mathrm{lh}(e) = 2 \ \wedge \ (e)_1 = 1)$,
- $$P_4(e) :=((e)_0 = 3 \ \wedge \ \mathrm{lh}(e) \geq 4 \ \wedge \ \forall^{<\mathrm{lh}(e)} i((i > 1 \Longrightarrow (e)_i \in Q) \\ \wedge \ (i > 2 \Longrightarrow ((e)_i)_1 = (e)_1) \ \wedge \ ((e)_2)_1 = \mathrm{lh}(e) \dot{-} 3)$$
- $$P_5(e) :=((e)_0 = 4 \ \wedge \ \mathrm{lh}(e) = 4 \ \wedge \ (e)_2 \in Q \ \wedge \ (e)_3 \in Q \\ \wedge \ (e)_1 = ((e)_2)_1 + 1 \ \wedge \ ((e)_3)_1 = (e)_1 + 1$$

[32]Bu gösterim Kleene'nin seçtiği gösterimdir. Rogers $\{e\}$ yerine ϕ_e gösterimini kullanır.

olmak üzere

$$e \in Q \Longleftrightarrow P_0(e) \wedge (P_1(e) \vee P_2(e) \vee P_3(e) \vee P_4(e) \vee P_5(e)) \qquad (5.56)$$

elde ederiz ve sav (5.10.10)'dan çıkar. Buradaki fikri sözle özetlersek: Bir e sayısının Q'da olup olmamasını, e'den küçük sayıların Q'da olup olmaması üzerinden tanımladığımız için Q yinelgen olur. ■

$$U(e,x) := \begin{cases} \{e\}(x) & , \ e \in CBYF \wedge (e)_1 = 1 \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyon sezgisel hesaplanabilir ancak basit yinelgen değildir. Bunu kanıtlayalım:

Teorem 5.10.16 *U basit yinelgen değildir.*

Kanıt. U'nun basit yinelgen olduğunu varsayarsak $g(x) := U(x,x) + 1$ basit yinelgen olur. $c := \ulcorner g \urcorner$ ise

$$U(c,c) = \{c\}(c) = g(c) = U(c,c) + 1$$

çelişkisine ulaşırız. ■

Bu kanıtta elbette Cantor'un köşegen yöntemi devrededir; g fonksiyonu her $x \in \mathbb{N}$ için $g(x) \neq U(x,x)$ olacak biçimde tanımlanmıştır. İleride U'nun algoritmik olduğu için yinelgen olduğunu öğreneceğiz. Öyleyse U yinelgen ancak basit yinelgen değildir, dd. $BYF \subsetneqq YF$!

5.11 (Basit) Yinelgen Kısmi Fonksiyonlar

Şimdiye kadar sınırlandırılmamış (Min) işleminde tümel fonksiyon elde edebilmek için (5.43) kısıtlama koşulunu ekledik. Bu koşulun sağlanmadığı yerlerde $\mu y\,(g(\overline{x_n}.y) = 0) = *$ olarak açıkladık (5.41). $f = \mu g$ fonksiyonu en az bir yerde $*$ değerini alıyorsa artık sayısal bir fonksiyon değildir. Biz ise sayısal fonksiyonlara odaklandığımızdan zorunlu olarak kısmi tanımlı fonksiyonları incelemek durumundayız.

$A \subseteq \mathbb{N}^n$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{N}$ tipindeki fonksiyonlara **kısmi sayısal fonksiyonlar** denir. $A = \mathbb{N}^n$ olduğunda f bir **tümel fonksiyondur** denir. A kümesini belirtmek gerekmediği durumlarda kısaca

$$f :\subseteq \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$$

yazacağız. $KF^n := \{f \mid f :\subseteq \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}\}$ ve $KF := \bigcup_{n=0}^{+\infty} KF^n$ olsun. KF kısmi sayısal fonksiyonların kümesini, KF^n ise bunların n değişkenli olanlarının kümesini gösterir.

$f :\subseteq \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ verilsin. Eğer $x \in \mathbb{N}^n$ ve $x \in \operatorname{dom} f$ ise bu $f(x)\downarrow$, eğer $x \notin \operatorname{dom} f$ ise bu $f(x)\uparrow$ ile gösterilir. $g :\subseteq \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ bir başka kısmi fonksiyon olmak üzere

$$f(x) \simeq g(x) :\Longleftrightarrow (f(x)\uparrow \wedge g(x)\uparrow) \vee (f(x)\downarrow \wedge g(x)\downarrow \wedge f(x) = g(x))$$

olarak açıklanır. $\simeq$ bağıntısı f ve g fonksiyonları arasında değil onların $f(x)$ ve $g(x)$ değerleri arasında açıklanmıştır. $\mathbb{N}_* := \mathbb{N} \cup \{*\}$ olmak üzere her $f \in KF^n$ fonksiyonu için

$$f_*(\overline{x_n}) := \begin{cases} f(\overline{x_n}), & \overline{x_n} \in \operatorname{dom} f \\ *, & \overline{x_n} \in (\mathbb{N}_*)^n \setminus \operatorname{dom} f \end{cases}$$

ile bir tümel $f_* : (\mathbb{N}_*)^n \to \mathbb{N}_*$ fonksiyonu tanımlanır. f tümel sayısal fonksiyon değilse f_* sayısal değildir! Bu tanımla $f(x) \simeq g(x) \Longleftrightarrow f_*(x) = g_*(x)$ olur ve biz her $f, g \in KF^n$ için

$$f = g \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{N}^n \; f(x) \simeq g(x) \Longleftrightarrow f_* = g_*$$

elde ederiz. $f \in KF^n$ olmak üzere

$$f(x) \simeq y \Longleftrightarrow f(x)\downarrow \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow (x, y) \in G_f \tag{5.57}$$

olduğundan $f(x) \simeq y$ bağıntısı $\mathbb{N}^{n+1}$'de tam da f kısmi fonksiyonun grafını tanımlar. (5.57)'den

$$\neg(f(x) \simeq y) \Longleftrightarrow f(x)\uparrow \vee (f(x)\downarrow \wedge f(x) \neq y)$$

olduğuna dikkat ediniz. Ayrıca örneğin

$$0 \cdot * = \mathrm{m}(0, *) \simeq *$$

olduğuna dikkat ediniz.

Şimdi yerine koyma ve basit yinelemenin kısmi fonksiyonlar için ne anlama geleceğini belirtelim.

Tanım 5.11.1 (Kısmi yerine koyma (KYK)) *$g \in KF^m$, $h_1, \ldots, h_m \in KF^n$ olmak üzere her $(\overline{x_n})$ için*

$$f(\overline{x_n}) :\simeq g(h_1(\overline{x_n}), \ldots, h_m(\overline{x_n}))$$

ile tanımlanan f kısmi fonksiyonu g kısmi fonksiyonundan $h_1, \ldots, h_m$ kısmi yerine koymaları ile elde edilmiştir denir. Bu durumu $f \simeq g(h_1, \ldots, h_m)$ ile gösterelim.

Bu tanımdan

$$\operatorname{dom} f = \{(\overline{x_n}) \mid (\overline{x_n}) \in \textstyle\bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{dom} h_i \wedge (h_1(\overline{x_n}), \ldots, h_m(\overline{x_n})) \in \operatorname{dom} g\}$$

ve bir y için

$$f(\overline{x_n}) \simeq y \Longleftrightarrow \exists y_1, \ldots, y_m \ \ (h_1(\overline{x_n}) \simeq y_1 \wedge \cdots \wedge h_m(\overline{x_n}) \simeq y_m)$$

ve

$$g(y_1, \ldots, y_m) \simeq y$$

olduğu apaçıktır.

Tanım 5.11.2 (Kısmi basit yineleme (KYn)) $g \in KF^n,\ h \in KF^{n+2}$ *olmak üzere*

$$f(\overline{x_n}, 0) :\simeq g(\overline{x_n}) \tag{5.58}$$

$$f(\overline{x_n}, y+1) :\simeq h(\overline{x_n}, y, f(\overline{x_n}, y)) \tag{5.59}$$

ile tanımlanan f kısmi fonksiyonu g ve h kısmi fonksiyonlarından basit yineleme ile elde edilmiştir denir. Bu durumu göstermek için $f \simeq \mathrm{Yn}(g,h)$ yazacağız.

Tanımdan hemen görüleceği gibi $f \simeq \mathrm{Yn}(g,h)$ için

$$(\overline{x_n}, 0) \in \operatorname{dom} f \Longleftrightarrow (\overline{x_n}) \in \operatorname{dom} g$$

$$(\overline{x_n}, y+1) \in \operatorname{dom} f \Longleftrightarrow (\overline{x_n}, y) \in \operatorname{dom} f \wedge (\overline{x_n}, y, f(\overline{x_n}, y)) \in \operatorname{dom} h$$

Bir özel durumu vurgulamakta yarar var: h fonksiyonunda üçüncü değişken işlevsiz olabilir, dd. $h = h(x,y)$ olabilir. Bu durumda (5.58) ve (5.59) denklemleri

$$f(\overline{x_n}, 0) :\simeq g(\overline{x_n}),$$

$$f(\overline{x_n}, y+1) :\simeq h(\overline{x_n}, y)$$

şeklini alırlar. Yinelemenin bu tipte olduğunu vurgulamak için $f \simeq \mathrm{Yn}'(g,h)$ yazalım.

Not 5.11.3 1. g ve h tümel fonksiyonlarsa açıktır ki bu durumda $f \simeq \mathrm{Yn}(g,h)$ de tümeldir. Ancak h tümel olmadan da f tümel olabilir. h fonksiyonunun y ve z değişkeninde tümel olması gerekmez. (5.59)'dan görüleceği gibi f fonksiyonunun $(\overline{x_n}, 1)$ noktasında tanımlı olması için h fonksiyonunun $(\overline{x_n}, 0, g(\overline{x_n}))$ noktasında tanımlı olması, f fonksiyonunun $(\overline{x_n}, 2)$ noktasında tanımlı olması için h fonksiyonun $(\overline{x_n}, 0, g(\overline{x_n}))$ ve $(\overline{x_n}, 1, f(\overline{x_n}, 1))$ noktalarında tanımlı olması yeterlidir,vs. . .

2. $f \simeq \mathrm{Yn}(g,h)$ ve $(\overline{x_n}, y) \notin \operatorname{dom}(f)$ ise her $u > y$ için $(\overline{x_n}, u) \notin \operatorname{dom}(f)$ olduğu aşikârdır. ▲

Tanım 5.11.4 (Sınırlandırılmamış μ işlemi (μ-Min)) *$g \in KF^{n+1}$ için $f = \mu g \in KF^n$ fonksiyonu*

$$f\left(\overline{x_n}\right) = \left(\mu g\right)\left(\overline{x_n}\right) :\simeq \min\left\{x \mid g\left(\overline{x_n}, x\right) = 0 \wedge \forall z < x \ \exists y \neq 0 \left(g\left(\overline{x_n}, z\right) \simeq y\right)\right\}$$

olarak tanımlanır, dd.

$$f\left(\overline{x_n}\right) \simeq y \Longleftrightarrow g\left(\overline{x_n}, 0\right)\downarrow \wedge \cdots \wedge g\left(\overline{x_n}, y\right)\downarrow \ \wedge \ g\left(\overline{x_n}, 0\right) > 0 \ \wedge \ \cdots \wedge g\left(\overline{x_n}, y-1\right) > 0 \ \wedge \ g\left(\overline{x_n}, y\right) = 0$$

Eğer $P \in \mathbf{R}^{n+1}$ ise

$$\left(\mu P\right)\left(\overline{x_n}\right) := \left(\mu \overline{\mathrm{sg}}\left(\chi_P\right)\right)\left(\overline{x_n}\right) = \min\left\{x \mid \left(\overline{x_n}, x\right) \in P\right\}$$

olarak açıklanır.

$\left(\mu g\right)\left(\overline{x_n}\right)$'in tanımınını

$$\left(\mu g\right)\left(\overline{x_n}\right) := \begin{cases} \min\left\{x \mid g\left(\overline{x_n}, x\right) = 0 \wedge \forall z < x \ g\left(\overline{x_n}, z\right)\downarrow\right\} \\ \text{tanımsız, diğer durumda} \end{cases}$$

olarak da verebilirdik.

Tanım 5.11.5 (Kleene) *BF başlangıç fonksiyonlarının KF kısmi fonksiyonlar kümesindeki (KYK), (KYn) ve (Min) işlemlerine göre kapanışını YKF ile gösterecek ve buradaki fonksiyonlara **yinelgen kısmi fonksiyonlar** diyeceğiz.*

Her şeyden önce g tümel olsa bile μg tümel olmayabilir. Örneğin bir $\left(\overline{x_n}\right)$ için $\forall y g\left(\overline{x_n}, y\right) \neq 0$ ise $\left(\mu g\right)\left(\overline{x_n}\right)\uparrow$.

Diğer yandan yinelgen kısmi fonksiyonlar genelde hesaplanamazlar. Örneğin $\left(\mu g\right)\left(\overline{x_n}\right)$ değerini hesaplamak için algoritmamız sırasıyla

$$g\left(\overline{x_n}, 0\right), g\left(\overline{x_n}, 1\right), g\left(\overline{x_n}, 2\right) \ldots$$

değerlerini ilk kez sıfırdan farklı bir değer buluncaya kadar hesaplamaktır. Eğer $\left(\overline{x_n}\right) \notin \mathrm{dom}\left(\mu g\right)$ ise, dd. $\forall y g\left(\overline{x_n}, y\right) \neq 0$ ise hesaplama sürer gider! Ancak $\left(\mu g\right)\left(\overline{x_n}\right)\downarrow$ olduğunu biliyorsak er geç makina durur. Bu nedenle kimileri kısmi yinelenebilir fonksiyonların *pozitif hesaplanabilir* olduğunu söylerler.

Önerme 5.11.6 *$f \in YKF$ yinelgen kısmi fonksiyonu tümelse sezgisel hesaplanabilir.*

Kanıt. (5.8.2)'nin kanıtı f tümel olduğu için burada da geçerlidir. ■

Teorem 5.11.7 *$f \in \mathbf{F}$ yinelgendir $\iff$ $f \in YKF$ ve tümeldir.*

Kanıt. Önermenin $\Longrightarrow$ yönü aşikârdır. Aynı şey $\Longleftarrow$ için ilk bakışta aşikâr gibi gelse de kanıtlanması gerekir, çünkü sınırlandırılmamış μ işlemi bunu zorunlu kılar. Ayrıca h tümel olmadan da $f \simeq \mathrm{Yn}(g, h)$ fonksiyonunun tümel olabileceğini biliyoruz.

Şimdi f yinelgen kısmi ve tümel olsun. İleride kanıtlayacağımız Teorem 5.11.11'de basit yinelgen bir g fonksiyonu ile $f(\overline{x_n}) \simeq g(\overline{x_n})$ olacaktır. Ancak f tümel olduğundan bu her $(\overline{x_n})$ için $f(\overline{x_n}) = g(\overline{x_n})$ demektir. g yinelgen olduğundan işimiz biter. ■

YKF kümesini kodlayacağız; yapacağımız tek şey (5.10.12) tanımına

$$6.\ \ulcorner \mu g \urcorner := \langle 5, \ulcorner g \urcorner \dot{-} 1, \ulcorner g \urcorner \rangle \tag{5.60}$$

şıkkını eklemektir.

$$CYKF := \{e|\ e \text{ bir } f \in YKF \text{ için bir Gödel sayısıdır.}\}$$

olsun.

Önerme 5.11.8 *$CYKF$ basit yinelgendir.*

Kanıt. (5.10.15)'in kanıtında bu kez $Q := CYKF$ alınır ve

$$P_6(e) := ((e)_0 = 5 \wedge \mathrm{lh}(e) = 3 \wedge (e)_2 \in CYKF \wedge (e)_1 = ((e)_2)_1 \dot{-} 1)$$

olmak üzere (5.56)'da $P_5(e)$'nin sağına $\vee P_6(e)$ eklenir. ■

Hesaplamaların Kodlanması

$e \in CYKF$ ise bu sayıdan kodladığı f fonksiyonu kolayca kazanılır. e'nin kodladığı fonksiyon $\{e\}$ ile gösterilsin. $f \in YKF$ ve $f(x) \downarrow$ ise $f(x)$ değerinin nasıl hesaplanacağına ilişkin durumlara göre algoritmalar verdik. Şimdi bu hesaplamaları

$$c = \langle \sigma, e, i, \langle c_1, \ldots, c_n \rangle \rangle \tag{5.61}$$

tipinde bir dizi sayısı ile kodlayacağız: Burada σ çıktımız olacak, e fonksiyonumuzu, i girdimizi kodlayacak, $c_1, \ldots, c_n$'ler ise

$$\{e\}((i)_0, \ldots, (i)_{\mathrm{lh}(i)\dot{-}1})$$

değerini hesaplamak için gerekli olan ön hesaplamaları kodlayacaklar. Burada bir noktayı vurgulayalım: Girdimiz $(\overline{x_n}) = (x_1, \ldots, x_n)$ olduğunda

$$i = \prod_{j=0} p_j^{x_{j+1}+1} = p_0^{x_1+1} \cdot \cdots \cdot p_{n-1}^{x_n+1},$$

$$(i)_k = x_{k+1}, \quad k = 0, \ldots, \mathrm{lh}(i) \dot{-} 1$$

olacaktır. İşe başlangıç fonksiyonları ile başlayalım. $\ulcorner c_k^n \urcorner = \langle 0, n, k\rangle = 2^1 3^{n+1} 5^{k+1}$ olacaktır. c_k^n fonksiyonunun girdisi bir $(x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{N}^n$ dizisidir. $c_k^n(x_1, \ldots x_n)$ değerini hesaplamak için ne bir hesaplama ne de bir ön hesaplamaya gerek yoktur; dolayısıyla (5.61)'deki ön hesaplama dizisi $\langle\rangle$ boş dizisidir. Dolayısıyla $c_k^n(x_1, \ldots x_n)$ değerini hesaplamanın kodu

$$\langle k, \langle 0, n, k\rangle, \langle x_1, \ldots, x_n\rangle, \langle\rangle\rangle$$

olacaktır. Ancak biz bu kodu $\langle k, \ulcorner c_k^n \urcorner, i, \langle\rangle\rangle$ olarak yazmayı yeğleyeceğiz. Bu ayrıntılı açıklamadan sonra okurun aşağıdaki hesaplama kodlarını izleyebileceğini umuyoruz: Başlangıç fonksiyonlarımız için

$$\langle k, \ulcorner c_k^n \urcorner, i, \langle\rangle\rangle \tag{5.62}$$
$$\left\langle (i)_{k-1}, \ulcorner \pi_k^n \urcorner, i, \langle\rangle\right\rangle \tag{5.63}$$
$$\langle (i)_0 + 1, \ulcorner S \urcorner, i, \langle\rangle\rangle \tag{5.64}$$

(5.63)'te $\pi_k^n(x_1, \ldots x_n) = x_k$ ve (5.64)'te $Sx = x + 1$ olduğundan ön hesaplamalara gerek olmadığına dikkat ediniz.

Şimdi $f(\overline{x_n}) \simeq g(h_1(\overline{x_n}), \ldots, h_m(\overline{x_n}))$ ise hesaplamamız bellidir: Önce $h_1(\overline{x_n})$, …, $h_m(\overline{x_n})$ değerleri hesaplanır; bunlar $y_1, \ldots, y_m$ değerleri ise, ardından $g(\overline{y_m})$ değeri hesaplanır. $1 \leq k \leq m$ için $h_k(\overline{x_n})$ hesaplaması

$$c_k = \langle \sigma_k, \ulcorner h_k \urcorner, i, \langle c_{k1}, \ldots, c_{kj_k}\rangle\rangle =: \langle \sigma_k, \ulcorner h_k \urcorner, i, \ldots\rangle$$

olarak kodlanmış ise g fonksiyonun girdisi $\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_m\rangle$ ile kodlanır ve çıktısı σ_0 ise tüm hesaplama

$$\langle \sigma_0, \ulcorner g(h_1, \ldots, h_m) \urcorner, i, \langle \langle \sigma_0, \ulcorner g \urcorner, \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_m\rangle, \ldots\rangle, c_1, \ldots, c_m\rangle\rangle \tag{5.65}$$

olarak kodlanır. Daha açık yazılımla

$$\langle \sigma_0, \ulcorner g(h_1, \ldots, h_m) \urcorner, i, \langle \langle \sigma_0, \ulcorner g \urcorner, \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_m\rangle, \ldots\rangle, \langle \sigma_1, \ulcorner h_1 \urcorner, i, \ldots\rangle, \ldots, \langle \sigma_m, \ulcorner h_m \urcorner, i, \ldots\rangle\rangle\rangle.$$

$f \simeq \mathrm{Yn}(g, h)$ ise (5.8.2)'nin kanıtındaki

$$r_0 = g(\overline{x_n}), r_1 = h(\overline{x_n}, 0, r_0),$$
$$r_2 = h(\overline{x_n}, 1, r_1), \ldots, r_m = h(\overline{x_n}, k, r_{m-1}),\ f(\overline{x_n}, m) = r_m$$

hesaplamasını alacağız. i yine $(\overline{x_n})$ dizisinin kodu olmak üzere $(\overline{x_n}, m)$ girdisinin kodu $i \frown \langle m\rangle$ olacaktır. Bu durumda yukarıdaki hesaplamanın kodu

$$\langle \sigma_m, \ulcorner \mathrm{Yn}(g, h) \urcorner, i \frown \langle m\rangle, \langle \langle \sigma_0, \ulcorner g \urcorner, i, \ldots\rangle,$$
$$\langle \sigma_1, \ulcorner h \urcorner, i \frown \langle 0, \sigma_0\rangle, \ldots\rangle, \ldots, \langle \sigma_m, \ulcorner h \urcorner, i \frown \langle m \dot{-} 1, \sigma_{m \dot{-} 1}\rangle, \ldots\rangle\rangle\rangle$$

olacaktır.

Hsp ile hesaplama kodlarının kümesini gösterelim. $c \in Hsp$ ise

$$c = \langle \sigma, e, i, \langle c_1, \ldots, c_n \rangle \rangle \tag{5.66}$$

olacaktır. e burada değeri hesaplanan fonksiyonumuzun kodudur. Fonksiyonlarımızı (5.10.12) ve (5.60)'ta kodladık. $(e)_0$ fonksiyonumuzun türünü belirler; bu sayı 0 ise fonksiyon c_k^n tipinde, 1 ise bir π_k^n izdüşümü, 2 ise S ardıl fonksiyonu, 3 ise $g(h_1, \ldots, h_m)$ tipinde 4 ise $\mathrm{Yn}(g, h)$ ve 5 ise μg tipindedir. $(e)_1$ ise fonksiyonumuzun değişken sayısını verir. (5.62)–(5.65)'te ise hesaplamalarımızı nasıl kodlayacağımızı belirttik. Yazım kolaylığı için

$$(c)_{jk} := ((c)_j)_k,\ (c)_{jkl} := (((c)_j)_k)_l,\ (c)_{jklm} := ((((c)_j)_k)_l)_m$$

olsun. Örnek oluşturmak üzere $(e)_0 = 0$ ve $(e)_0 = 1$ durumunu ayrıntılı olarak vereceğiz. Her şeyden önce c kodu bir hesaplama kodu olacaksa (5.66)'dan

$$c \in Seq \wedge \mathrm{lh}(c) = 4 \wedge (c)_1 \in CYKF \wedge (c)_2 \in Seq \wedge \mathrm{lh}((c)_2) = (c)_{11} \wedge (c)_3 \in Seq$$

olacaktır. Yukarıdaki bağıntıyı $P(c)$ ile gösterelim. $P(c)$ sağlandıktan sonra $(e)_0 = (c)_{10}$'ın değerlerine göre durum irdelemesi yapmak gerekecektir.

$(e)_0 = 0$ olsun. $(e)_1 = n$ ise (5.62)'den bir k ile $c = \langle k, \ulcorner c_k^n \urcorner, i, \langle\rangle\rangle$ olacaktır. Diğer yandan tanım gereği $e = \ulcorner c_k^n \urcorner := \langle 0, n, k \rangle$. $e = (c)_1$ olduğunu gözetirsek $(c)_0 = k = (c)_{12}$ olduğundan

$$(c)_{10} = 0 \wedge (c)_0 = (c)_{12} \wedge (c)_3 = \langle\rangle$$

bağıntısını elde ederiz. Bu bağıntıyı $P_0(c)$ ile gösterelim. Böylece $P(c) \wedge P_0(c)$ bize c sayısının tam da ön işlem gerektirmeyen bir $c_k^n(\overline{x_n}) = k$ hesaplamasını kodladığını söyler.

$(e)_0 = 1$ ise bir izdüşüm fonksiyonu ile karşı karşıyayız. $(e)_1 = n$ olsun. Bu durumda

$$\ulcorner \pi_k^n \urcorner := \langle 1, n, k \rangle \quad ve \quad c = \left\langle (i)_{k-1}, \ulcorner \pi_k^n \urcorner, i, \langle\rangle \right\rangle$$

olacağından, $k - 1 = (c)_{12} - 1$ ve

$$(c)_{10} = 1 \wedge (c)_0 = (c)_{2((c)_{12}-1)} \wedge (c)_3 = \langle\rangle$$

olur. Bu bağıntıyı $P_1(c)$ ile gösterelim. $P(c) \wedge P_1(c)$ bize c sayısının tam da ön işlem gerektirmeyen $\pi_k^n(\overline{x_n}) = x_k$ hesaplamasını kodladığını söyler. Şimdi sırasıyla S, $g(h_1, \ldots, h_m)$, $\mathrm{Yn}(g, h)$ ve μg fonksiyonlarının hesaplamalarını kodlayan $P_2(c), \ldots, P_5(c)$ bağıntılarını tanımlayacağız.

$P_2(c)$ aşağıdaki önerme olsun:

$$(c)_{10} = 2 \wedge (c)_0 = (c)_{20} + 1 \wedge (c)_3 = \langle\rangle$$

$P_3(c)$ aşağıdaki önerme olsun:

$$\begin{aligned}&(c)_{10} = 3 \ \wedge \ \forall j < \mathrm{lh}((c)_3)((c)_{3j} \in Hsp) \ \wedge \ (c)_{300} = (c)_0 \ \wedge \ (c)_{301} = (c)_{12} \\ &\wedge \forall q < \mathrm{lh}((c)_3)(q = 0 \vee ((c)_{3q1} = (c)_{1(q+2)} \ \wedge \ (c)_{3q2} = (c)_2)) \\ &\wedge \ \forall j < \mathrm{lh}((c)_{302})((c)_{302j} = (c)_{3(j+1)0})\end{aligned}$$

$P_4(c)$ aşağıdaki önerme olsun:

$$\begin{aligned}&(c)_{10} = 4 \ \wedge \ \mathrm{lh}((c)_3) = (c)_{2(\mathrm{lh}((c)_2 \dot{-} 1)} + 1 \wedge \\ &\forall j < \mathrm{lh}((c)_3)((c)_{3j} \in Hsp) \wedge \\ &(c)_{301} = (c)_{12} \ \wedge \ (c)_{302} = \langle (c)_{20}, \ldots, (c)_{2(\mathrm{lh}(c)_2 \dot{-} 2)} \rangle \wedge \\ &\forall q < (c)_{2(\mathrm{lh}(c)_2 \dot{-} 1} (q = 0 \vee ((c)_{3q1} = (c)_{13} \wedge \\ &(c)_{3q2} = \langle (c)_{20}, \ldots, (c)_{2(\mathrm{lh}(c)_2 \dot{-} 2)}, q \dot{-} 1, (c)_{3(q \dot{-} 1)} \rangle)) \wedge \\ &(c)_0 = (c)_{3(\mathrm{lh}(c)_3 \dot{-} 2)0}\end{aligned}$$

ve $P_5(c)$ aşağıdaki önerme olsun:

$$\begin{aligned}&(c)_{10} = 5 \ \wedge \ \mathrm{lh}((c)_3) = (c)_0 + 1 \ \wedge \ \forall j < \mathrm{lh}((c)_3)((c)_{3j} \in Hsp \wedge \\ &(c)_{3j1} = (c)_{12} \ \wedge \ (c)_{3j2} = \langle (c)_{20}, \ldots, (c)_{2(\mathrm{lh}((c)_3 \dot{-} 1))}, j \rangle \wedge \\ &(j < \mathrm{lh}((c)_3 \dot{-} 1) \Longrightarrow (c)_{3j0} \neq 0) \ \wedge \ (c)_{3(\mathrm{lh}((c)_3 \dot{-} 1))} = 0)\end{aligned}$$

Önerme 5.11.9 *$Hsp \subseteq \mathbb{N}$ bağıntısı basit yinelgendir.*

Kanıt. $P, P_0, \ldots, P_5$ yukarıda açıklanan bağıntılar olmak üzere

$$c \in Hsp \Longleftrightarrow P(c) \wedge (P_0(c) \vee P_1(c) \vee \cdots \vee P_5(c))$$

olduğundan sav (5.10.10)'dan çıkar. ■

Eğer $e \in CYKF^n$, dd. e sayısı n değişkenli bir yinelgen kısmi fonksiyonun kodu ise ve bu fonksiyonu $\{e\}^n$ ile belirtirsek

$$\{e\}^n(x_1, \ldots, x_n) \simeq y \Longleftrightarrow \exists z \ \langle y, e, \langle x_1, \ldots, x_n \rangle, z \rangle \in Hsp$$

olur.

Tanım 5.11.10

$$T^n(e, x_1, \ldots, x_n, z) :\Longleftrightarrow \langle (z)_0, e, \langle x_1, \ldots, x_n \rangle, (z)_1 \rangle \in Hsp$$

*ile tanımlanan $T^n \in B^{n+2}$ bağıntısına **Kleene T-bağıntısı** denir.*

Tanım gereği T^n basit yinelgen bir bağıntıdır. Burada e ile hesaplanan $f = \{e\}$ fonksiyonu, z ile $f(x_1, \ldots, x_n)$ değerinin hesaplanması kodlanmıştır.

Teorem 5.11.11 (Kleene Normal Biçim Teoremi) *Basit yinelgen bir $T^n \in \mathbf{B}^{n+2}$ bağıntısı ve basit yinelgen bir U fonksiyonu vardır öyle ki, yinelgen kısmi her $f \in YKF^n$ fonksiyonuna karşılık bir $e \in \mathbb{N}$ sayısı*

$$f(\overline{x_n}) \simeq U(\mu y T^n(e, \overline{x_n}, y))$$

olacak biçimde bulunabilir.

Kanıt. T^n Kleene T-bağıntısı basit yinelgen olduğundan μT^n basit yinelgendir. $U := (\cdot)_0$ basit yinelgen olduğundan $e = \ulcorner f \urcorner$ olmak üzere

$$f(\overline{x_n}) \simeq ((\mu y T^n(e, \overline{x_n}, y)))_0 = U(\mu y T^n(e, \overline{x_n}, y))$$

ve bkb. ■

Şimdi

$$\varphi_e^n(\overline{x_n}) :\simeq U(\mu y T^n(e, \overline{x_n}, y)) = (\mu y T^n(e, \overline{x_n}, y))_0$$

olmak üzere (5.11.11)

$$\forall f \in YKF^n \exists e \in CYKF\ (f \simeq \varphi_e^n)$$

olduğunu söyler.

Tanım 5.11.12 *Aşağıdaki koşul sağlandığında $f \subseteq \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu $C \subseteq KF^n$ kısmi fonksiyonlar sınıfı için **evrenseldir** denir:*

$$\forall g \in C\ \exists e \in \mathbb{N}\ \forall \overline{x_n}\ f(e, \overline{x_n}) \simeq g(\overline{x_n}).$$

*e sayısına g **fonksiyonunun f'ye göre damgası** denir.*

Önerme 5.11.13

$$\Phi^n(e, \overline{x_n}) \simeq \{e\}^n(\overline{x_n})$$

ile tanımlanan $\Phi^n :\subseteq \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu yinelgen kısmidir ve n değişkenli yinelgen kısmi fonksiyonların YKF^n kümesi için evrenseldir.

Kanıt. $\{e\}^n(\overline{x_n}) \simeq U(\mu y T^n(e, \overline{x_n}, y))$ olduğundan Φ^n kısmi basit yinelgendir ve (5.11.11)'den dolayı YKF^n kümesi için evrenseldir. ■

Önerme 5.11.14 *Basit yinelgen bir* $S_n^m : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$ *fonksiyonu her* $e \in CYKF$

$$\forall \overline{x_m}\ \forall \overline{y_n}\ \ \{e\}^{m+n}(\overline{x_m}, \overline{y_n}) \simeq \{S_n^m(e, \overline{x_m})\}(\overline{y_n}) \tag{5.67}$$

olacak biçimde vardır.

Kanıt. (5.67) sağlanacaksa

$$\{S_n^m(e, x_1, \ldots, x_m)\} = \{e\}\left(c_{x_1}^m, \ldots, c_{x_m}^m, \pi_1^n, \ldots, \pi_n^n\right)$$

olmalıdır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} S_n^m(e, x_1, \ldots, x_m) &:= \ulcorner \{e\}\left(c_{x_1}^m, \ldots, c_{x_m}^m, \pi_1^n, \ldots, \pi_n^n\right) \urcorner \\ &= \langle 3, n, e, \langle 0, m, x_1\rangle, \ldots, \langle 0, m, x_m\rangle, \langle 1, n, 1\rangle, \ldots, \langle 1, n, n\rangle\rangle \end{aligned}$$

olarak tanımlanır ve elbette S_n^m basit yinelgendir. ■

Teorem 5.11.15 (Yinelgenlik Teoremi) *Her yinelgen kısmi* $f \in \mathbf{F}^{n+1}$ *fonksiyonuna karşılık bir* e *damgası*

$$\forall x_1, \ldots, x_n\ \ \{e\}^n(x_1, \ldots, x_n) \simeq f(e, x_1, \ldots, x_n)$$

olacak biçimde vardır.

Kanıt. f yinelgen kısmi olduğundan $g(y, \overline{x_n}) := f\left(S_n^1(y, y), \overline{x_n}\right)$ fonksiyonu kısmi basit yinelgendir. e_0 sayısı g'nin bir damgası ve $e := S_n^1(e_0, e_0)$ ise

$$\begin{aligned} \{e\}^n(\overline{x_n}) &\simeq \left\{S_n^1(e_0, e_0)\right\}(\overline{x_n}) \\ &\simeq \{e_0\}^{n+1}(e_0, \overline{x_n}), \quad S_n^m \text{ teoremi} \\ &\simeq f\left(S_n^1(e_0, e_0), \overline{x_n}\right), \quad e_0\text{'ın tanımı} \\ &\simeq f(e, \overline{x_n}) \end{aligned}$$

olur. ■

5.12 Yarı Yinelgen Bağıntılar

$\varphi_e^n(\overline{x_n}) \simeq U(\mu y T^n(e, \overline{x_n}, y))$ fonksiyonları yinelgen kısmidir ve $W_e^n := \mathrm{dom}(\varphi_e^n)$ olmak üzere tanım gereği

$$(\overline{x_n}) \in \mathrm{dom}(\varphi_e^n) \Longleftrightarrow: (\overline{x_n}) \in W_e^n \Longleftrightarrow \exists y T^n(e, \overline{x_n}, y)$$

olur. Dikkat edilirse $Q_e^n(\overline{x_n}, y) := T^n(e, \overline{x_n}, y)$ basit yinelgendir ve

$$(\overline{x_n}) \in W_e^n \Longleftrightarrow \exists y Q_e^n(\overline{x_n}, y) \tag{5.68}$$

sağlanır. Her $f \in YKF^n$ yinelgen kısmi f için $f \simeq \varphi_e^n = \{e\}^n$ olacak biçimde bir e bulunabildiğinden

$$\{\mathrm{dom}\, f \mid f \in YKF^n\} = \{W_e^n \mid e \in CYKF^n\}$$

olur.

Teorem 5.12.1 *Herhangi bir $P \subseteq \mathbb{N}^n$ bağıntısı için aşağıdaki önermeler denktirler:*

1. *Yinelgen bir $Q \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ bağıntısı her $(\overline{x_n}) \in \mathbb{N}^n$ için*

$$P(\overline{x_n}) \Longleftrightarrow \exists y Q(\overline{x_n}, y) \tag{5.69}$$

   olacak biçimde vardır.

2. *P yinelgen kısmi bir $f \in YKF^n$ fonksiyonunun tanım bölgesidir.*

3. *$P = \emptyset$ veya yinelgen bir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu*

$$P = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \exists x\ f(x) = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle\}$$

   olacak biçimde vardır.

Kanıt. (1)$\Longrightarrow$(2): Q ile (5.69) sağlansın. $f(\overline{x_n}) :\simeq \mu y Q(\overline{x_n}, y)$ yinelgen kısmidir ve $P(\overline{x_n}) \Longleftrightarrow (\overline{x_n}) \in \mathrm{dom}(f)$.

(2)$\Longrightarrow$(1): $f \in YKF^n$ ile $P = \mathrm{dom}(f)$ ise bir e ile $\mathrm{dom}(f) = W_e^n$ olduğundan (5.68)'den dolayı (5.69) $Q := Q_e^n$ ile sağlanır.

(2)$\Longrightarrow$(3): $P \neq \emptyset$, $g \in YKF^n$ yinelgen kısmi ve $P = \mathrm{dom}(g)$ olsun. (1) $\Longleftrightarrow$ (2) olduğundan yinelgen bir $Q(\overline{x_n}, y)$ bağıntısıyla

$$(\overline{x_n}) \in P \Longleftrightarrow \exists y Q(\overline{x_n}, y)$$

olur. $(\overline{a_n}) \in P$ keyfi seçilsin ve her $x \in \mathbb{N}$ için

$$f(x) := \begin{cases} \langle (x)_0, \ldots, (x)_{n-1} \rangle, & ((x)_0, \ldots, (x)_n) \in P \\ \langle a_1, \ldots, a_n \rangle, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

olsun. Elbette f yinelgendir ve istenen koşul sağlanır.

(3)$\Longrightarrow$(1): $P = \emptyset$ ise $Q(\overline{x_n}, y) :\Longleftrightarrow c_1^{n+1}(\overline{x_n}, y) = 0$ alırsak $f(\overline{x_n}) :\simeq \mu y Q(\overline{x_n}, y)$ fonksiyonu için $\mathrm{dom}(f) = \emptyset$ olur. Şimdi $P \neq \emptyset$ ve (3) sağlansın.

$$Q(x_1, \ldots, x_n, x) :\Longleftrightarrow f(x) = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$$

ile açıklanan Q yinelgendir ve

$$(\overline{x_n}) \in P \Longleftrightarrow \exists x\ Q\left(\overline{x_n}, x\right).$$

■

$P \subseteq \mathbb{N}^n$ bir yinelgen bağıntı ise χ_P yinelgen bir fonksiyon olduğundan sezgisel hesaplanabilir ve $(\overline{x_n}) \in P \Longleftrightarrow \chi_P\left(\overline{x_n}\right) = 1$ olduğundan P bağıntısı belirlenebilir.

Eğer bir $f \in YKF^n$ ile $P = \mathrm{dom}\left(f\right)$ ise $(\overline{x_n}) \in P \Longleftrightarrow f\left(\overline{x_n}\right) \downarrow$ olduğundan keyfi verilen $(\overline{x_n})$ noktası ancak P'de olduğu zaman $f\left(\overline{x_n}\right)$ değerini hesaplayabiliriz. $(\overline{x_n}) \notin P$ ise algoritma yanıt vermez. Bu nedenle P yarı belirlenebilir veya yarı hesaplanabilirdir denir. $P \neq \emptyset$ ve f fonksiyonu (5.12.1)(3)'ü sağlasın. Bu durumda yinelgen f fonksiyonu P'nin öğelerini $p_m := \left(\left(m\right)_0, \ldots, \left(m\right)_{n-1}\right)$ olmak üzere

$$p_0, p_1, p_2, \ldots$$

olmak üzere etkin (algoritmik) sayar, f yinelgen fonksiyonu p_m'leri hesaplamamıza izin verir. Burada $P = \{p_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ ancak eşlemenin birebir olması gerekmez! Bu açıklamalar ışığında aşağıdaki tanım anlaşılır.

Tanım 5.12.2 *$P \subseteq \mathbb{N}^n$ bağıntısına ava (5.12.1) teoreminin önermelerinin herhangi biri sağlandığında **yarı yinelgen** (veya **yinelgen sayılabilir** veya **etkin sayılabilir**) denir:*

Sonuç 5.12.3 *$P \subseteq \mathbb{N}$'nin yarı yinelgen olması için gerek ve yeter koşul $P = \emptyset$ veya yinelgen bir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonun resmi olmasıdır. Eğer P sonsuzsa f birebir seçilebilir.*

Kanıt. $\Longrightarrow$ yönü (5.12.1)(3)'ten çıkar.

$\Longleftarrow$: $P \neq \emptyset$, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ yinelgen ve $\mathrm{im}(f) = P$ olsun. $Q\left(x, y\right)$ bağıntısı $f\left(x\right) = y$ seçilirse $P\left(x\right) \Longleftrightarrow \exists y Q\left(x, y\right)$, Q yinelgen ve P yarı yinelgen olur.

Şimdi P sonsuz olsun.

$$g\left(x\right) := f\left(\mu y\left(f\left(y\right) \notin \{f\left(0\right), \ldots, f\left(x-1\right)\}\right)\right)$$

yinelgen, birebir ve $\mathrm{im}(g) = P$. ■

Önerme 5.12.4 *1. Yinelgen bağıntılar yarı yinelgendir.*

2. $P\left(\overline{x_n}, y\right)$ yarı yinelgen ve $f_1\left(\overline{x_n}\right), \ldots, f_n\left(\overline{x_n}\right)$ yinelgen fonksiyonlar ise

$$P\left(f_1\left(\overline{x_n}\right), \ldots, f_n\left(\overline{x_n}\right)\right)$$

bağıntısı da yarı yinelgendir.

3. $P, R \subseteq \mathbb{N}^n$ *yarı yinelgen ise* $P \vee R$ *ve* $P \wedge R$ *de yarı yinelgendirler.*

4. $P(\overline{x_n}, y)$ *yarı yinelgen ise* $\exists y P(\overline{x_n}, y)$ *yarı yinelgendir.*

5. $P(\overline{x_n}, y)$ *yarı yinelgen ise* $\forall^{<z} y P(\overline{x_n}, y)$ *yarı yinelgendir.*

Kanıt. 1. $P(\overline{x_n})$ yinelgen olsun. $Q(\overline{x_n}, y) :\Longleftrightarrow P(\overline{x_n})$ ile tanımlanan Q da yinelgendir ve (5.69) sağlanır.

2. (5.69) sağlanmışsa $Q'(\overline{x_n}, y) := Q(f_1(\overline{x_n}), \ldots, f_n(\overline{x_n}), y)$ bağıntısı yinelgendir ve

$$P(f_1(\overline{x_n}), \ldots, f_n(\overline{x_n})) \Longleftrightarrow \exists y Q'(\overline{x_n}, y)$$

3. yinelgen P' ve R' bağıntılarıyla

$$P(\overline{x_n}) \Longleftrightarrow \exists y P'(\overline{x_n}, y) \text{ ve } R(\overline{x_n}) \Longleftrightarrow \exists y R'(\overline{x_n}, y)$$

olsun. Bu durumda yinelgen $(P' \vee R')$ ve $(P' \wedge R')$ bağıntılarıyla

$$\begin{aligned}(P \vee R)(\overline{x_n}) &\Longleftrightarrow \exists y (P' \vee R')(\overline{x_n}, y)\\ (P \wedge R)(\overline{x_n}) &\Longleftrightarrow \exists a, b \left(P'(\overline{x_n}, a) \wedge R'(\overline{x_n}, b)\right)\\ &\Longleftrightarrow \exists y \left(P'(\overline{x_n}, (y)_0) \wedge R'(\overline{x_n}, (y)_1)\right) \qquad (5.70)\end{aligned}$$

(5.70)'teki parantez içindeki bağıntı yinelgen bir bağıntıdan yinelgen yerine koymalarla elde edildiğinden yinelgendir.

4. Yinelgen Q ile $P(\overline{x_n}, y) \Longleftrightarrow \exists z Q(\overline{x_n}, y, z)$ ise

$$\exists y P(\overline{x_n}, y) \Longleftrightarrow \exists u Q(\overline{x_n}, (u)_0, (u)_1).$$

5. Yinelgen Q ile $P(\overline{x_n}, y) \Longleftrightarrow \exists z Q(\overline{x_n}, y, z)$ olsun. $Q(\overline{x_n}, u, (z)_u)$ yinelgen olduğundan $\forall^{<z} i Q(\overline{x_n}, i, (u)_i)$ yinelgendir. Böylece

$$\forall^{<z} y P(\overline{x_n}, y) \Longleftrightarrow \exists u \forall^{<z} i Q(\overline{x_n}, i, (u)_i)$$

olduğundan yarı yinelgendir. ■

$\pi^{n+1}_{1\ldots n} : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}^n$ fonksiyonu $\pi^{n+1}_{1\ldots n}(\overline{x_n}, x_{n+1}) := (\overline{x_n})$ ile tanımlanan ilk n koordinata izdüşüm fonksiyonu olsun. Bir $\varphi \in YKF^n$ yinelgen kısmi fonksiyonunu için $G_\varphi = \{(\overline{x_n}, x_{n+1}) \mid \varphi(\overline{x_n}) \simeq x_{n+1}\}$ olduğunu anımsatalım.

Teorem 5.12.5 *Her yarı yinelgen* $P \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ *bağıntısına karşılık yinelgen kısmi bir* $\varphi \in \mathbf{F}^n$ *fonksiyonu* $G_\varphi \subseteq P$ *ve* $\pi^{n+1}_{1\ldots n}(G_\varphi) = \pi^{n+1}_{1\ldots n}(P)$ *olacak biçimde vardır.*

Sonuç 5.12.6 *1.* ***(Kleene-Post).*** P *yinelgendir* $\Longleftrightarrow$ P *ve* $\neg P$ *yarı yinelgendir.*

2. *f yinelgen kısmidir $\Longleftrightarrow$ G_f yarı yinelgendir.*
3. *$\Phi^n(e, \overline{x_n}) :\simeq \{e\}^n(\overline{x_n})$ ile bir $\Phi^n : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ yinelgen kısmi fonksiyon tanımlanır.*

Kanıt. $P \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ yinelgen kısmi olduğundan yinelgen bir Q bağıntısıyla

$$P(\overline{x_n}, y) \Longleftrightarrow \exists z Q(\overline{x_n}, y, z)$$

olur. $\varphi(\overline{x_n}) :\simeq (\mu z Q(\overline{x_n}, (z)_0, (z)_1)_0$ fonksiyonu yinelgen kısmidir ve istenen özellikleri sağlar.

Sonucun kanıtı: 1. $\Longrightarrow$: P yinelgen ise $\neg P$ de yinelgendir ve yinelgen bağıntılar yarı yinelgendir.

1. $\Longleftarrow$: $P \subseteq \mathbb{N}^n$ ve P, $\neg P$ bağıntıları yarı yinelgen olsunlar. $Q := P \times \{1\} \cup \neg P \times \{0\}$ olsun. $Q \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ yarı yinelgendir. φ yinelgen kısmi fonksiyonu teoremdeki gibi $\pi^{n+1}_{1\ldots n}(G_\varphi) = \pi^{n+1}_{1\ldots n}(P)$ ve $G_\varphi \subseteq Q$ olarak seçilsin. Bu durumda $\chi_P = \varphi$ olur. χ_P özgün fonksiyonu yinelgen kısmi ve tümel olduğundan yinelgendir; dolayısıyla (5.8.22) ile P yinelgendir.

2. $\Longrightarrow$: $f \in \mathbf{F}^n$ yinelgen kısmi ise bir e ile $f = \varphi^n_e$, dolayısıyla

$$(\overline{x_n}, x_{n+1}) \in G_f \Longleftrightarrow \exists z(T^n(e, \overline{x_n}, z) \wedge x_{n+1} = (z)_0)$$

olduğundan G_f yarı yinelgendir.

2. $\Longleftarrow$: $G_f \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ yarı yinelgen olduğundan yinelgen kısmi bir φ fonksiyonu ile $\pi^{n+1}_{1\ldots n}(G_\varphi) = \pi^{n+1}_{1\ldots n}(G_f)$ ve $G_\varphi \subseteq G_f$ olur; ancak bu durumda $f = \varphi$ olmak zorundadır.

3. Tanım gereği $\Phi^n(e, \overline{x_n}) \simeq y \Longleftrightarrow \{e\}(\overline{x_n}) \simeq y$ olduğundan, Kleene Normal Biçim Teoremi'ndeki gösterimlerle $(e, \overline{x_n}, y) \in G_{\Phi^n}$ olması

$$\exists u\,(T^n(e, \overline{x_n}, u) \wedge U(u) = y)$$

olmasına denktir. T^n ve U basit yinelgen olduklarından yukarıdaki bağıntı yarı yinelgendir, dolayısıyla önermemizin ikinci kısmından Φ^n fonksiyonu kısmi yinelgendir. ■

Önerme 5.12.7 *Yarı yinelgen ancak yinelgen olmayan bağıntılar vardır.*

Kanıt. $K := \{x \in \mathbb{N} \mid \exists z T^1(x, x, z)\} = \{x \mid x \in W^1_x\}$ bağıntısı yarı yinelgendir. Cantor Köşegen Lemması'ndan dolayı (bkz. 1.1.5) $\{x \mid x \notin W^1_x\} = \neg K$ kümesi her bir W^1_x'den farklıdır, dolayısıyla yarı yinelgen olamaz. Açalım: $\neg K$ yarı yinelgen olsaydı bir e ile W^1_e olurdu; çünkü $\mathbb{N}$'deki tüm yarı yinelgen bağıntılar $\{W^e_1 \mid e \in \mathbb{N}\}$ ailesindedir. $\neg K = W^1_e$ ise

$$e \notin K \Longleftrightarrow e \in W^1_e \overset{def}{\Longleftrightarrow} e \in K$$

çelişkisine ulaşırız. (5.12.6)(1)'den K yinelgen değildir. ■

Not 5.12.8 (5.12.4)'te eksik olan noktaları şimdi açıklığa kavuşturabiliriz. K ile şunu öğrendik ki P yarı yinelgen ise $\neg P$'nin yarı yinelgen olması gerekmez.

$$K(x) \Longleftrightarrow \exists z T^1(x,x,z) \quad \text{ve} \quad \neg K(x) \Longleftrightarrow \forall z \neg T^1(x,x,z).$$

$Q(x,z) := \neg T^1(x,x,z)$ basit yinelgen olduğundan yarı yinelgendir; ancak $\forall z Q(x,z)$ yarı yinelgen değildir. ▲

Not 5.12.9 Aslında algoritmalar bazında düşünülürse yukarıda kanıtlanan kimi teoremler apaçık ortada olan şeylerdir. Anımsarsak $P \subseteq \mathbb{N}^n$ bağıntısına, elimizde $x \in \mathbb{N}^n$ girdisi için çıktısı $x \in P$ ise "evet", $x \notin P$ ise "hayır" olan bir algoritmamız varsa belirlenebilir demiştik. Eğer elimizde yalnızca $x \in P$ ise "evet" yanıtını veren, $x \notin P$ için hiçbir yanıt vermeyen bir algoritma varsa P yarı belirlenebilir demiştik.

Örneğin P ve $P^c = \neg P$ yarı belirlenebilir olsunlar. A_1 algoritması P'yi A_2 ise P^c'yi yarı belirlesinler. A algoritması x girdisi için A_1 algoritması "evet" dediğinde "evet" ve A_2 algoritması "evet" dediğinde "hayır" desin. A algoritması elbette P bağıntısını belirler. ▲

Teorem 5.12.10 *$P_1, \ldots, P_m \subseteq \mathbb{N}^n$ ikişer ikişer ayrık yarı yinelgen bağıntılar, $g_1, \ldots, g_m \in \mathbf{F}^n$ yinelgen kısmi fonksiyonlar olmak üzere*

$$f(\overline{x_n}) :\simeq \begin{cases} g_1(\overline{x_n}), & P_1(\overline{x_n}) \\ \vdots & \vdots \\ g_m(\overline{x_n}), & P_m(\overline{x_n}) \\ \uparrow & , \text{ diğer durum.} \end{cases}$$

ile tanımlanan f fonksiyonu yinelgen kısmidir.

Kanıt. g_i yinelgen kısmi olduğundan (5.12.6)(2)'de G_{g_i} yarı yinelgen ve ayrıca $g_i(\overline{x_n}) \simeq y \Longleftrightarrow (\overline{x_n}, y) \in G_{g_i}$ olduğundan $Q_i(\overline{x_n}, y) = P_i(\overline{x_n}) \wedge (g_i(\overline{x_n}) \simeq y)$ bağıntısı yarı yinelgen ve

$$\begin{aligned} (\overline{x_n}, y) \in G_f &\Longleftrightarrow f(\overline{x_n}) \simeq y \\ &\Longleftrightarrow (\overline{x_n}, y) \in (Q_1 \vee \cdots \vee Q_m), \end{aligned}$$

dolayısıyla (5.12.4) ile G_f yarı yinelgen ve (5.12.6)(2) ile f yinelgen kısmidir. ■

Teorem 5.12.11 (Rice) $\emptyset \neq F \subsetneqq YKF^n$ *ise* $P := \{e \mid \{e\}^n \in F\}$ *yinelgen değildir.*

Kanıt. P'nin yinelgen olduğunu varsayalım. $f \in F$ ve $g \in YKF^n \backslash F$ olmak üzere

$$h\left(e, \overline{x_n}\right) :\simeq \begin{cases} g\left(\overline{x_n}\right), & e \in P \\ f\left(\overline{x_n}\right), & e \in \neg P \end{cases}$$

ile tanımlanan $h : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ fonksiyonunu, P ve $\neg P$ yarı yinelgen olduğundan (5.12.10)'dan dolayı yinelgen kısmidir. Yinelgenlik Teoremi'nden dolayı bir $e_0 \in \mathbb{N}$ her $\overline{x_n}$ için $h\left(e_0, \overline{x_n}\right) \simeq \{e_0\}^n \left(\overline{x_n}\right)$ olacak biçimde vardır. Ancak her $\overline{x_n}$ için

$$e_0 \in P \Longrightarrow \{e_0\}^n \left(\overline{x_n}\right) \simeq h\left(e_0, \overline{x_n}\right) \simeq g\left(\overline{x_n}\right),$$

böylece $\{e_0\}^n = g \notin F$, dd. $e_0 \notin P$ çıkar. Ayrıca

$$e_0 \notin P \Longrightarrow \{e_0\}^n \left(\overline{x_n}\right) \simeq h\left(e_0, \overline{x_n}\right) \simeq f\left(\overline{x_n}\right),$$

ve dolayısıyla $\{e_0\}^n = f \in F$, dd. $e_0 \in P$ olur. Her iki durumda da bir çelişkiye ulaştık; sonuç olarak P yinelgen değildir. ■

(5.12.11)'de özel olarak $F = \{f\}, f \in YKF^n$ alırsak f fonksiyonunun damgalarının $\{e \mid \{e\}^n = f\}$ kümesinin yinelgen olmadığını görürüz. Bu bize dolaylı olarak bu kümenin sonsuz olduğunu da söyler, ki biz bunu biliyoruz.

5.13 Kayıt Makinaları

Bu kesimde kayıt makinalarını tanıyacağız ve herhangi bir $f \in \mathbf{F}^n$ için

$$f \text{ yinelgen kısmidir} \Longleftrightarrow f \text{ bir kayıt makinasında kısmi hesaplanabilir}$$

olduğunu kanıtlayacağız.

Net tanımı vermeden önce bir kayıt makinasını kabaca tanıtalım. Öncelikle, hesaplama yapacak makinamızın belleği sonlu sayıda $R_1, \ldots, R_N$ kütüğünden oluşacaktır. Burada N istenildiği kadar büyük olabilecek bir doğal sayıdır. Her bir kütükte yine istenildiği kadar büyük olabilecek tek bir doğal sayı kaydedilebilir (veya depolanabilir). i damgasına R_i kütüğünün **adresi** denir.

Makina üç **temel işlem** gerçekleştirebilir:

1. $+$: kütükteki sayıya 1 ekler.
2. $\dot{-}$: kütükteki sayı pozitifse 1 çıkarır, 0 ise hiçbir işlem yapmaz.
3. **Ktr:** Kütükteki sayının 0 veya pozitif olup olmadığını kontrol eder.

Bu işlemler kolaylıkla gerçekleştirilebilirler. Bir **komut** (veya **emir** veya **yönerge**) $E = (j, i, k, l)$ gibi bir dörtlüdür. Bu dörtlüde j komut numarasıdır, i işlem yapılacak adres numarasıdır, l ve eğer bir doğal sayı ise k **geçiş** numaralarıdır. $k \in \{+, \dot{-}\} \cup \mathbb{N}$ ve $j, i, l \in \mathbb{N}$. Bu durumda

1. $(j, i, +, l)$ komutu i. adreste $+$ işleminin uygulanacağını, dd. i. adresteki sayıya 1 ekleyip E_l komutuna geçilmesini bildirir.
2. $(j, i, \dot{-}, l)$ komutu i. adreste $\dot{-}$ işleminin uygulanacağını, dd. i. adresteki sayıdan bu sayı pozitifse 1 çıkarılacağını, 0 ise bir şey yapılmayıp E_l komutuna geçilmesini bildirir.
3. (j, i, k, l) komutu (Ktr komutu): k bir doğal sayıdır. i. adresteki sayıyı kontrol eder; bu sayı pozitifse E_k komutuna, sıfırsa E_l komutuna geçilmesini bildirir.

Not 5.13.1 Bilindiği gibi $\mathbb{N}$ doğal sayıları tek harfli $A = \{|\}$ abecesinin $A^* = \mathrm{Sz}\, A$ sözcükleri olarak ele alınabilir. Bu yaklaşımda $0 := \emptyset$ boş sözcük olur.

$$|^n := \underbrace{||\cdots|}_{n \text{ tane}}$$

ve $|^1 := |$ olmak üzere doğal sayılarımız

$$\emptyset,\ |^1,\ |^2,\ |^3, \ldots, |^n, |^{n+1}, \ldots$$

olur ve daima $\emptyset|^n = |^n\emptyset = |^n$ olduğunu biliyoruz. Doğal sayılara böyle yaklaşırsak $+$ temel işlemi "kütükteki sözcüğün sonuna bir $|$ ekle" ve $\dot{-}$ temel işlemi "kütükteki sözcük boş sözcük değilse en sağdaki $|$ harfini sil" ve Ktr temel işlemi ise "kütükteki sözcüğün boş sözcük olup olmadığını kontrol et" şeklini alır. Aşağıda yapacaklarımız A^* sözcükleriyle de dillendirilebilir. Biz $\mathbb{N}$ ile çalışmayı yeğleyeceğiz. ▲

Tanım 5.13.2 *Bir **kayıt makinası** veya (kayıt) **programı** başlangıç komutunu belirleyen bir $k \in \{0, \ldots, d-1\}$ sayısı ile birlikte verilen bir sonlu*

$$\mathcal{M} = (E_0, E_1, \ldots, E_{d-1})$$

komutlar dizisidir ve burada her bir $E_m = (j_m, i_m, k_m, l_m)$ için

$$0 \le j_m < d, \quad 1 \le i_m \le N, \quad k_m \in \{+, \dot{-}\} \vee 0 \le k_m \le d, \quad 0 \le l_m \le d$$

*koşulları sağlanır. d sayısına $\mathcal{M}$ makinasının **uzunluğu** denir. $\mathcal{M}$ makinasının komutlarında geçen adreslerin en büyüğü p olmak üzere her $q \ge p$ için $\mathcal{M}$ bir **q-makinasıdır** denir. Makinanın durma şansının olabilmesi için en az bir komutun geçiş sayısı d olmalıdır. j_m sayısına E_m komutunun **(özdeşleyen) belirteci** ve l_m sayısına ise **geçiş belirteci** denir.*

Ayrıca belirtilmemişse başlangıç komutu olarak $k = 0$ alınır.

Örnek 5.13.3 Önce birkaç örnek tanıyalım.

1. $E_0 = (0, 1, \dot{-}, 1)$ olmak üzere $\mathcal{M} = (E_0)$ olsun. Tek komutumuz var, bu zorunlu olarak başlangıç komutudur. Makina R_1'de kayıtlı olan sayı pozitifse ondan bir çıkarır, sıfırsa öyle bırakır ve makinada bir E_1 komutu olmadığı için durur.

2. $E_0 = (0, 1, \dot{-}, 0)$ olmak üzere $\mathcal{M} = (E_0)$ olsun. Makina R_1'deki sayı 0 olana kadar oradan art arda birler çıkarır; R_1'deki sayı 0 olduktan sora hiçbir işlem yapmaz ama çalışmaya devam eder, durmaz!

3. $E_0 = (0, 1, 1, 2)$, $E_1 = (1, 1, \dot{-}, 0)$ ve $\mathcal{M} = (E_0, E_1)$ ve başlangıç komutu E_0 olsun. Makina R_1'deki sayı 0 değilse onu sıfırlayana kadar çalışır ve durur.

4. $E_0 = (0, 1, 2, 1), E_1 = (1, 1, \dot{-}, 0)$ ve $\mathcal{M} = (E_0, E_1)$ ve başlangıç komutu E_0 olsun. Makina E_0 komutu ile R_1'deki sayıyı kontrol eder. Bu sayı pozitifse bizi olmayan bir E_2 komutuna yönlendirdiği için makina durur. R_1'deki sayıyı 0 ise E_1 komutuna geçilir; ancak R_1'deki sayı sıfır olduğundan bir işlem yapılmadan E_0'a yönlendirilir ve makina hiçbir işlem yapmadan $E_0 \to E_1 \to E_0 \to E_1 \to \cdots$ döngüsünde çalışır.

5. $\mathcal{M} = () = \emptyset$ makina hiçbir yönerge içermez, uzunluğu 0 olan tek makinadır. Çalışmaya başlamaz bile, başlamadan durur. ▲

Kütüklerimiz $R_1, \ldots, R_N$ olmak üzere makina çalışmaya E_0 komutuyla başlasın. Başlangıçta her bir R_i'de bir a_i doğal sayısı kaydedilmiştir. Yani bir $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{N}^N$ ile karşı karşıyayız. Bir süre işlem yaptıktan sonra kütüklerde bir $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{N}^N$ noktası vardır. Bu $\mathbf{x}$ ile ne yapacağımızı, dd. buna hangi j komutunu uygulayacağımızı biliyorsak, makina bundan sonra işlemin nasıl devam edeceğini belirler. Bu nedenle $0 \leq j \leq d$ ve $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^N$ olmak üzere $(j, \mathbf{x})$ gibi bir ikiliye bir **kurulum** veya **yapılandırma** (konfigürasyon) denir. $\mathbf{a}$ ilk girdi noktası ise $(0, a)$'ya **başlangıç kurulumu** ve $(d, \mathbf{x})$'e ise **son kurulum** veya **bitiş kurulumu** denir. Kurulumları $\mathcal{Y}$ ile göstereceğiz.

Tanım 5.13.4 *$j \leq d$ olmak üzere $\mathcal{Y} = (j, \mathbf{x})$ kurulumunun $\mathcal{M}$ makinasındaki $\tau_{\mathcal{M}}(j, \mathbf{x}) = (j', \mathbf{x}')$ $\mathcal{M}$-**ardılından** veya $\mathcal{M}$-**geçişinden** şu kurulumu anlayacağız:*

1. $j < d$ ve $E_j = (j, i, +, l)$ ise $j' = l$ ve $\mathbf{x}' = (x_1, \ldots, x_i + 1, \ldots, x_N)$

2. $j < d$ ve $E_j = (j, i, \dot{-}, l)$ ise $j' = l$ ve $\mathbf{x}' = (x_1, \ldots, x_i \dot{-} 1, \ldots, x_N)$

3. $j < d$ ve $E_j = (j, i, k, l)$ ve $k \in \mathbb{N}$ ise $x_i > 0$ için $j' = k$, değilse $j' = l$ ve hep $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$.

4. $j = d$ ise $j' = j = d$ ve $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$.

Her kurulumun bir $\mathcal{M}$-ardılı vardır ve bu ardıl tek olarak belirlidir.

Tanım 5.13.5 *T **süreli** veya **adımlı** bir $\mathcal{M}$-**hesaplaması,** makinanın uzunluğu d ise, aşağıdaki koşulları sağlayan bir $((j_0, \mathbf{x}_0), \ldots, (j_T, \mathbf{x}_T))$ kurulumlar dizisidir:*

1. $j_0 = 0$,

2. Her $t < T$ için $(j_{t+1}, \mathbf{x}_{t+1}) = \tau_{\mathcal{M}}(j_t, \mathbf{x}_t)$, dd. $(j_{t+1}, \mathbf{x}_{t+1})$ kurulumu $(j_t, \mathbf{x}_t)$'nin $\mathcal{M}$-ardılıdır.

T süresinin ne d durma damgası ne de N kütük sayısı ile hiçbir ilişkisi yoktur. $\mathbf{x}_0$'a hesaplamanın **girdisi** denir. Eğer $\mathcal{Y}_T = (j_T, \mathbf{x}_T)$ ve $j_T = d$ ise hesap **bitmiştir** veya **kapanmıştır** denir; böyle bir durumda $\mathbf{x}_T$'ye girdi $\mathbf{x}_0$ olduğunda $\mathcal{M}$-hesaplamasının **çıktısı** veya **sonucu** denir. Bu durumu

$$\mathcal{M} : \mathbf{x}_0 \Longrightarrow \mathbf{x}_T \quad \text{veya} \quad \mathbf{x}_0 \overset{\mathcal{M}}{\Longrightarrow} \mathbf{x}_T$$

ile göstereceğiz. T üzerinden tümevarımla kolayca görüleceği gibi eğer bir $\mathcal{M}$-hesaplamasının bir sonucu varsa bu sonuç tek olarak belirlidir. Ancak şunu vurgulamakta yarar var: Tanım gereği, $((j_0, \mathbf{x}_0), \ldots, (j_T, \mathbf{x}_T))$ bir $\mathcal{M}$-hesaplama ise, her $T \leq t \leq T'$ için $j_t = d$ ve $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_T$ olmak üzere

$$((j_0, \mathbf{x}_0), \ldots, (j_T, \mathbf{x}_T), \ldots, (j_{T'}, \mathbf{x}_{T'}))$$

de bir $\mathcal{M}$-hesaplamadır. Özetle bir hesaplama, makinanın çalışırken uyguladığı her komutun ve onların yaptığı değişiklerin uygulanış sırasına göre dökümüdür.

Örnek 5.13.6 $E_0 = (0, 1, 1, 2)$, $E_1 = (1, 1, \dot{-}, 0)$ ve $\mathcal{M} = (E_0, E_1)$ ve başlangıç komutu E_0 olsun. $\mathbf{x}_0 = (3, 0, \ldots, 0) := (3, \mathbf{0})$ ise $(3, \mathbf{0})$ girdisi için hesaplama

$$(0, 3, \mathbf{0}), (1, 3, \mathbf{0}), (0, 2, \mathbf{0}), (1, 2, \mathbf{0}), (0, 1, \mathbf{0}), (1, 1, \mathbf{0}), (0, 0, \mathbf{0}), (2, 0, \mathbf{0})$$

olur. Burada $j_2 = j_4 = j_6 = 0$ ve $j_1 = j_3 = 1$ ve $j_7 = 2 = d$ ve bu 7 süreli bir hesaplamadır. Bu hesaplama elbette sonuna diğer $(2, 0, \mathbf{0})$ üçlüleri eklenerek istenildiği kadar uzatılabilir. ▲

Bazen kütüklerdeki sayılardan birine, örneğin x_i sayısına odaklanmak isteriz; böyle bir durumda kütükteki verileri $\mathbf{y}x_i\mathbf{z}$ veya $\ldots x_i \ldots$ ile göstereceğiz. Bazen de örneğin x_i ve x_k'ye odaklanarak, kütükteki verileri $\mathbf{y}x_i\mathbf{z}x_k\mathbf{w}$ veya $\ldots x_i \ldots x_k$ olarak yazmayı yeğleyeceğiz.

Şimdi ileride işimize yarayacak birkaç basit makina (program) ve makinanın kenetlenmesini örnekleyeceğiz.

Örnek 5.13.7 1. Önce (5.13.3)(3)'te yapacağımız küçük bir değişiklikle $E_0 = (0, i, 1, 2)$, $E_1 = (1, i, \dot{-}, 0)$ ve $\mathcal{S}_i = (E_0, E_1)$ makinasını tanımlayalım.

$\mathcal{S}_i$ makinası i. kütükteki sayıyı sıfırlar ve durur. i. kütükteki sayı zaten sıfırsa hiçbir şey yapmadan durur. $\mathcal{S}_i$'ye bir **sıfırlama** programı veya sıfırlama makinası denir.

$$\mathcal{S}_i : \ldots x_i \ldots \Longrightarrow \ldots 0 \ldots$$

2. $\mathcal{T}_{ik} := (E_0, E_1, E_2)$, $E_0 = (0, i, 1, 3)$, $E_1 = (1, i, \dot{-}, 2)$ ve $E_2 = (2, k, +, 0)$, $1 \leq i, k \leq n$ ve $i \neq k$ olsun.

$$\mathcal{T}_{ik} : \ldots x_i \ldots x_k \ldots \Longrightarrow \ldots 0 \ldots x_k + x_i \ldots$$
$$\mathcal{T}_{ik} : \ldots x_i \ldots 0 \ldots \Longrightarrow \ldots 0 \ldots x_i \ldots$$

$\mathcal{T}_{ik}$ makinası i. kütükteki x_i sayısını oradan alır, k. kütüğe taşır ve oradaki sayıya ekler; o nedenle ona **taşıma** veya **kopyalama** makinası denir.

3. Şimdi

$$\ldots x_i \ldots x_k \ldots \overset{\mathcal{S}_k}{\Longrightarrow} x_i \ldots 0 \ldots \overset{\mathcal{T}_{ik}}{\Longrightarrow} \ldots 0 \ldots x_i \ldots$$

Burada $\mathcal{S}_k$ sıfırlama makinası durduktan sonra $\mathcal{T}_{ik}$ makinası onun çıktısını girdi olarak alır ve çalışır. $\mathcal{T}_{ik}$ makinasının komutlarını $\mathcal{S}_k$'nin komutları ile karıştırmamak için bunları $\mathcal{S}_i = (E_0, E_1)$ ve $\mathcal{T}_{ik} := (E_0', E_1', E_2')$ olarak yazalım. $\mathcal{S}_k$'nin uzunluğu 2 ve $\mathcal{T}_{ik}$'nin uzunluğu 3'tür. Şimdi aynı işi yapan, uzunluğu $2 + 3 = 5$ olan bir

$$\ldots x_i \ldots x_k \ldots \overset{\mathcal{M}}{\Longrightarrow} \ldots 0 \ldots x_i \ldots \tag{5.71}$$

makinası tanımlayacağız. Bunu E_v''de komut numarası olan her koordinata iki ekleyerek yapacağız. Böylece

$$E_0' = (0, i, 1, 3) \rightsquigarrow 2 + E_0' := E_2 = (2, i, 3, 5)$$
$$E_1' = (1, i, \dot{-}, 2) \rightsquigarrow 2 + E_1' := E_3 = (3, i, \dot{-}, 4)$$
$$E_2' = (2, k, +, 0) \rightsquigarrow 2 + E_2' := E_4 = (4, k, +, 2)$$

olmak üzere $\mathcal{M} = (E_0, \ldots, E_4)$ olsun. Gerçekten $\mathcal{M}$ ile (5.71) sağlanır. $\mathcal{M} := \mathcal{S}_k\mathcal{T}_{ik}$ ve $2 + \mathcal{T}_{ik} := (E_2, E_3, E_4)$ yazalım. $\mathcal{S}_k\mathcal{T}_{ik}$ makinasının komut dizisi önce $\mathcal{S}_k$'nin komutları, peşine $2 + \mathcal{T}_{ik}$'nin komutları yazılarak elde edilmiştir.

4. $\mathcal{T}_{ik}$ makinası i. kütükteki sayıyı 0 yapar, k. kütükteki sayıyı $x_k + x_i$'ye dönüştürürken diğer kütükteki sayılara dokunmaz. $\mathcal{S}_k\mathcal{T}_{ik}$ ise i. kütükteki sayıyı 0 yapar, k. kütükteki sayıyı x_i'ye dönüştürürken diğer kütükteki sayılara dokunmaz. Şimdi öyle bir makina tasarlayalım ki yaptığı tek değişiklik $k \neq i$ olmak üzere k. kütükteki sayının da x_i olmasını sağlasın, dd.

$$\mathcal{M} : \ldots x_i \ldots x_k \ldots \Longrightarrow \ldots x_i \ldots x_i \ldots \tag{5.72}$$

olsun. i, k, l birbirinden farklı adresler olmak üzere önce bir

$$\mathcal{T}_{ik}^{l} : \ldots x_i \ldots x_k \ldots x_l \ldots \Longrightarrow \ldots 0 \ldots x_k + x_i \ldots x_l + x_i \ldots \tag{5.73}$$

makinası tanımlayacağız. Ancak önce bir uyarı: İster 4. örnekte ister burada asla $i < k < l$ gibi bir koşulumuz yoktur, bu sayılar birbirine göre herhangi bir konumda olabilirler. Biz sadece olası bir konumla olayı görselleştiriyoruz. $E_0, \ldots, E_3$ komutları sırasıyla

$$(0, i, 1, 4)\,,\ (1, i, \dot{-}, 2)\,,\ (2, k, +, 3)\,,\ (3, l, +, 0)$$

olmak üzere $\mathcal{T}_{ik}^{l} := (E_0, \ldots, E_3)$ makinası için (5.73)'ün doğru olduğu kolayca görülür. Öyleyse

$$\mathcal{S}_k \mathcal{S}_l \mathcal{T}_{ik}^{l} : \ldots x_i \ldots x_k \ldots x_l \ldots \Longrightarrow \ldots 0 \ldots x_i \ldots x_i \ldots$$
$$\mathcal{S}_k \mathcal{S}_l \mathcal{T}_{ik}^{l} \mathcal{T}_{li} : \ldots x_i \ldots x_k \ldots x_l \ldots \Longrightarrow \ldots x_i \ldots x_i \ldots 0 \ldots$$

olur. Bu işlem bize, yalnızca i ve k kütükleriyle ilgilensek bile, oradaki bilgileri geçici olarak kopyalayacağımız boş kütüklere gereksinimimiz olduğunu gösterir. Biraz problem üzerinde düşününce okur kolayca i ve k kütükleri dışında bir kütüğümüz yoksa (5.72)'yi sağlayan bir $\mathcal{M}$ makinası olamayacağını görür. ▲

Not 5.13.8 $\mathcal{T}_{ik}$ ve $\mathcal{T}_{ik}^{l}$ gösterimlerinde i ve k sayılarını karıştırma tehlikesi olduğunda $\mathcal{T}_{i,k}$ ve $\mathcal{T}_{i,k}^{l}$ gösterimlerini yeğleyeceğiz. ▲

Tanım 5.13.9 *$d \in \mathbb{N}$ için*

$$d + (j, i, +, l) := (j + d, i, +, l + d)\,,$$
$$d + (j, i, \dot{-}, l) := (j + d, i, \dot{-}, l + d)\,,$$
$$d + (j, i, k, l) := (j + d, i, k + d, l + d)\,,\ k \in \mathbb{N}$$

olsun. Bir $\mathcal{M}' := \left(E'_0, \ldots, E'_{p-1}\right)$ için

$$d + \mathcal{M}' := \left(d + E'_0, \ldots, d + E'_{p-1}\right)$$

olarak tanımlanır. $\mathcal{M} = (E_0, \ldots, E_{d-1})$ verildiğinde

$$\left(E_0, \ldots, E_{d-1}, d + E'_0, \ldots, d + E'_{p-1}\right),$$

dd. $E_{d+q} := d + E'_q,\ 0 \le q \le p - 1$ olmak üzere

$$(E_0, \ldots, E_{d-1}, E_d, \ldots, E_{d+p-1}) \tag{5.74}$$

makinasına $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}'$ makinasının birbirine ***kenetlenmesi*** *veya* ***bağlanması*** *denir ve bu makina $\mathcal{M}\mathcal{M}'$ ile gösterilir. $\mathcal{M}\mathcal{M}'$ makinasının komutlarına vurgu yapmak istediğimizde (5.74) dizisini $(\mathcal{M}, d + \mathcal{M}')$ ile göstermeyi yeğleyeceğiz. Ayrıca*

$$\mathcal{M}^0 := \emptyset \text{ ve } \mathcal{M}^{n+1} := \mathcal{M}^n\mathcal{M}$$

olarak tanımlanır.

Farklı makinalar aynı etkiye sahip olabilirler. $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ aynı etkiye sahipseler bunu $\mathcal{M}_1 \equiv \mathcal{M}_2$ ile göstereceğiz. Örneğin $\mathcal{M}$ makinasına asla çağrılmayan komutlar ekleyerek elde edeceğiniz her $\mathcal{M}'$ makinası için $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}'$ olur. Aşağıdaki özellikler apaçıktır:

1. $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}'$'nün uzunlukları d ve p ise $\mathcal{M}\mathcal{M}'$'nün uzunluğu $d + p$'dir.
2. $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$, ve $\mathcal{M}''$ makinalar olmak üzere

$$\emptyset\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}\emptyset \equiv \mathcal{M} \text{ ve } \mathcal{M}\left(\mathcal{M}'\mathcal{M}''\right) \equiv \left(\mathcal{M}\mathcal{M}'\right)\mathcal{M}''.$$

3. $(\mathbf{x} \overset{\mathcal{M}\mathcal{M}'}{\Longrightarrow} \mathbf{z}) \Longleftrightarrow \exists \mathbf{y}\ (\mathbf{x} \overset{\mathcal{M}}{\Longrightarrow} \mathbf{y} \wedge \mathbf{y} \overset{\mathcal{M}'}{\Longrightarrow} \mathbf{z})$.

Demek ki makinalar kenetleme işlemine göre bir yarı gruptur ve işlem birleşmeli olduğundan ayraç kullanmak gereksizdir.

Hesaplamalarda şu yolu izleyeceğiz. Diyelim ki bize n değişkenli bir $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ fonksiyonu verilmiştir ve biz $f(\mathbf{x})$ değerini hesaplamak istiyoruz. Biz işlem sonunda $f(\mathbf{x})$ değerinin birinci kütükte olmasını istiyoruz. Bize işlem için boş kütüklerde gerekli olabileceğinden makinamızın N kütük sayısı $N > n$ olacaktır. $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ olmak üzere başlangıç kurulumunu

$$(0, \mathbf{x}_0) = (0, \mathbf{x}, 0, 0, \ldots) = (0, \mathbf{x}, \mathbf{0})$$

olarak seçeceğiz. Şimdi bir basit örnekle kendimizi aynı zamanda yeni bir kavrama, bir makinanın yinelenmesine hazırlayacağız. Yalınlık açısından $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ için $(\mathbf{x}) \in \mathbb{N}^n$ yerine $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^n$ yazacağız.

Örnek 5.13.10 $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}\,((x, y) \rightsquigarrow x \cdot y)$ fonksiyonunu hesaplayan bir program, dd. bir makina vereceğiz. Değişken sayımız ikidir. Sonuç için birinci kütüğü ayırdık, bir de arada kullanacağımız bir başka kütük, yani toplamda 4 kütük işimizi görecektir. Öyleyse biz $(0, x, y, 0) \Longrightarrow (x \cdot y, x', y', 0)$ hesaplamasını yapan bir makinanın peşindeyiz. İlkokulda bize öğretilen

$$x \cdot y = x + x + \cdots + x, \quad (y \text{ tane } x)$$

algoritmasıdır. Yapacağımız iş bellidir: $y = 0$ ise işimiz biter, R_1 kütüğüne 0 yazarız. $y > 0$ ise bir makinayla $(0, x, y, 0) \Longrightarrow (x, x, y - 1, 0)$ hesaplamasını

yaparız, dd. y'den 1 çıkarır sonra R_1 kütüğüne bir x taşırız. Bu işlemi üçüncü kütükteki sayı 0 oluncaya kadar sürdürür, işlemi durdururuz. Şimdi

$$E_0 = (0, 3, \dot{-}, 1) \text{ olmak üzere } s_3 = (E_0)$$

makinası üçüncü kütükteki y sayısı pozitifse ondan bir çıkarır durur, eğer $y = 0$ ise hiçbir işlem yapmadan durur. Daha önce öğrendiğimiz $\mathcal{T}_{21}^4$ ve $\mathcal{T}_{42}$ makinalarıyla $y > 0$ ise

$$(0, x, y, 0) \overset{s_3}{\Longrightarrow} (0, x, y-1, 0) \overset{\mathcal{T}_{21}^4}{\Longrightarrow} (x, 0, y-1, x) \overset{\mathcal{T}_{42}}{\Longrightarrow} (x, x, y-1, 0)$$

olur. $\mathcal{M} := s_3\mathcal{T}_{21}^4\mathcal{T}_{42}$ olsun. s_3, $\mathcal{T}_{21}^4$ ve $\mathcal{T}_{42}$ makinalarının uzunlukları sırasıyla 1, 4 ve 3 olduğundan $\mathcal{M} = \left(s_3, 4 + \mathcal{T}_{21}^4, 3 + \mathcal{T}_{42}\right)$ ve dolayısıyla $\mathcal{M}$'nin uzunluğu 8 olur. $\mathcal{M}$ durduktan sonra 3. adresteki sayının pozitif olup olmadığını test etmemiz gerekir, Öyleyse bir Ktr komutuna gereksinimiz var ve bu testi en başta da yapacağız. Öyleyse başa $E_0 := (0, 3, 1, 9)$ komutunu koyarak $(\mathcal{M})_3 = (E_0, 1 + \mathcal{M})$ makinasına geçeceğiz. Bu durumda $(\mathcal{M})_3$ makinası gerçekten $x \cdot y$'yi hesaplar, dd,

$$(\mathcal{M})_3 : (0, x, y, 0) \Longrightarrow (x \cdot y, x, 0, 0)\,.$$

Şimdi komutları yukarıdan aşağıya yazarak makinalarımızı verelim:

$\mathcal{M}$		$(\mathcal{M})_3$	
		$(0, 3, 1, 9)$	
$(0, 3, \dot{-}, 1)\}$	s_3	$(1, 3, \dot{-}, 2)\}$	$1 + s_3$
$(1, 2, 2, 5)$	$1 + \mathcal{T}_{21}^4$	$(2, 2, 3, 6)$	$2 + \mathcal{T}_{21}^4$
$(2, 2, \dot{-}, 3)$		$(3, 2, \dot{-}, 4)$	
$(3, 1, +, 4)$		$(4, 1, +, 5)$	
$(4, 4, +, 1)$		$(5, 4, +, 2)$	
$(5, 4, 6, 8)$	$5 + \mathcal{T}_{42}$	$(6, 4, 7, 0)$	$6 + \mathcal{T}_{42} \pmod 9$
$(6, 4, \dot{-}, 7)$		$(7, 4, \dot{-}, 8)$	
$(7, 2, +, 5)$		$(8, 2, +, 6)$	

$(\mathcal{M})_3$ makinasının $1 + \mathcal{M}$ kısmının komut numaraları 9 olanları 0 yaparak başlangıç komutuna yönlenmeyi sağladık. Bu örneği genelleştireceğiz. ▲

Tanım 5.13.11 *Uzunluğu d olan bir $\mathcal{M}$ makinasının* ***i. kütüğe göre yinelenmesinden*** $(\mathcal{M})_i := ((0, i, 1, d+1), (1 + \mathcal{M}) \pmod{(d+1)})$ *makinası anlaşılır.* $(1+\mathcal{M}) \pmod{(d+1)}$ *gösteriminden anlaşılacak olansa* $1+\mathcal{M}$ *makinasındaki komut numaralarından* $d+1$ *olanların* 0 *olarak değiştirildiğidir.*

$i \leq N$ olmak üzere $(\mathcal{M})_i : \mathbf{x} \Longrightarrow \mathbf{y}$ aşağıdaki iki önermeye denktir:

1. $y_i = 0$.
2. $\exists k\ (\mathbf{x} \overset{\mathcal{M}^k}{\Longrightarrow} \mathbf{y}) \wedge \forall m < k\ ((\mathbf{x} \overset{\mathcal{M}^m}{\Longrightarrow} \mathbf{z}) \Longrightarrow z_i \neq 0)$.

Başka deyişle $\mathbf{x} =: \mathbf{y}_0$ girdisine, i. koordinat sıfırdan farklı ise $\mathcal{M}$ uygulanır, çıktının i. koordinatı sıfırdan farklıysa bu çıktıya yeniden $\mathcal{M}$ uygulanır,.... ta ki ilk kez çıktının i. koordinatı sıfır olsun. Bu hesaplama tam da $(\mathcal{M})_i$'nin hesaplamasıdır, özetle

$$\mathbf{x} = \mathbf{y}_0 \overset{\mathcal{M}}{\Longrightarrow} \mathbf{y}_1 \overset{\mathcal{M}}{\Longrightarrow} \cdots \overset{\mathcal{M}}{\Longrightarrow} \mathbf{y}_k = \mathbf{y}, \quad 0 \leq v < k \Longrightarrow (\mathbf{y}_v)_i \neq 0, \quad (\mathbf{y})_i = 0.$$

Makinaların yinelenmesi kavramı çoğu makinaları daha kolay yazmamızı sağlar.

Not 5.13.12

$$s_i = ((0, i, \dot{-}, 1)) \quad \text{ve} \quad a_i = ((0, i, +, 1))$$

olsun. Okur kolayca

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_i &= (s_i)_i \\ \mathcal{T}_{ik} &= (s_i a_k)_i \\ \mathcal{T}_{ik}^l &= (s_i a_k a_l)_i \end{aligned}$$

olduğunu görür. Kenetleme ve yineleme işlemleriyle çoğu makinamızı, komutları yazmadan bu s_i ve a_k makinaları ile verebiliriz. ▲

Şimdi $D \subseteq \mathbb{N}^n$ olmak üzere bize bir $f : D \to \mathbb{N}$ kısmi fonksiyonu verilsin. $\mathbf{x} \in D$ için $f(\mathbf{x})$ değerini bir $\mathcal{M}$ kayıt makinası ile hesaplamak istersek ve birinci kütükte hesap sonunda $f(\mathbf{x})$ değerinin bulunmasını istiyorsak en az $n+1$ kütüğe gereksinim duyarız. Fonksiyona bağlı olarak başka boş kütüklere de ihtiyacımız olacaktır. Öyleyse N kütük sayımız $N > n+1$ koşulunu sağlayan uygun bir sayı olacaktır. Gerçekte eğer f fonksiyonunun bazı değişkenleri işlevsizse $n+1$'den daha az kütük de işimizi görür, ancak $N > n+1$ seçmenin bir sakıncası yoktur.

Tanım 5.13.13 *Bir $f :\subseteq \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ kısmi fonksiyonuna ava bir $\mathcal{M}$ kayıt makinası*

$$\begin{array}{ll} \mathcal{M} : (0, \mathbf{x}, 0, \ldots, 0) \Longrightarrow (f(\mathbf{x}), \mathbf{x}, 0, \ldots, 0), & \mathbf{x} \in \operatorname{dom} f \\ \mathcal{M},\ (0, \mathbf{x}, 0, \ldots, 0)\ \textit{girdisinde durmaz}, & \mathbf{x} \notin \operatorname{dom} f \end{array}$$

olacak biçimde bulunabiliyorsa ***KM-kısmi hesaplanabilir*** *ve $\mathcal{M}$ makinası f fonksiyonunu* ***kısmi hesaplar*** *denir. f fonksiyonu KM-kısmi hesaplanabilir ve tümelse f fonksiyonu* ***KM-hesaplanabilir*** *denir.*

Lemma 5.13.14 *Başlangıç fonksiyonları KM-hesaplanabilirdir.*

Kanıt. c_0^n fonksiyonunu s_1 makinası hesaplar. $k > 0$ için c_k^n fonksiyonunu $(a_1)^k$ makinası ve S ardıl fonksiyonunu ise örneğin $\mathcal{T}_{21}^3\mathcal{T}_{32}a_1$ makinası hesaplar. Açılımını yazalım:

$$(0,x,0,0) \overset{\mathcal{T}_{21}^3}{\Longrightarrow} (x,0,x,0) \overset{\mathcal{T}_{32}}{\Longrightarrow} (x,x,0,0) \overset{a_1}{\Longrightarrow} (x+1,x,0,0)$$

π_i^n fonksiyonunu örneğin $\mathcal{T}_{i+1,1}^{n+2}\mathcal{T}_{n+2,i+1}$ makinası hesaplar. Açarsak

$$\begin{array}{lll} (0,x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n,0) & \overset{\mathcal{T}_{i+1,1}^{n+2}}{\Longrightarrow} & (x_i,x_1,\ldots,0,\ldots,x_n,x_i) \\ (x_i,x_1,\ldots,0,\ldots,x_n,x_i) & \overset{\mathcal{T}_{n+2,i+1}}{\Longrightarrow} & (x_i,x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n,0) \end{array}$$

ve gerçekten $\mathcal{T}_{i+1,1}^{n+2}\mathcal{T}_{n+2,i+1} : (0,\mathbf{x},0) \Longrightarrow (x_i,\mathbf{x},0)$ ile $\pi_i^n(\mathbf{x}) = x_i$ fonksiyonunu hesaplar. ■

İzleyen lemmalarda makinaları vermekle yetineceğiz ve açılımları okura bırakıyoruz.

Lemma 5.13.15 *$g \in YKF^m$ ve $h_1,\ldots,h_m \in YKF^n$ KM-kısmi hesaplanabilirlerse $f = g(h_1,\ldots,h_m)$ fonksiyonu da KM-kısmi hesaplanabilirdir.*

Kanıt. Varsayımdan dolayı elimizde $g,h_1,\ldots,h_m$ fonksiyonlarını kısmi hesaplayan $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_1$, ..., $\mathcal{M}_m$ makinalarımız vardır:

$$\mathcal{M}_0 : (0,\mathbf{y},\mathbf{0}) \Longrightarrow \begin{cases} (g(\mathbf{y}),\mathbf{y},\mathbf{0}), & \mathbf{y} \in \operatorname{dom} g \\ \text{durmaz}, & \mathbf{y} \notin \operatorname{dom} g \end{cases},$$

$$\mathcal{M}_i : (0,\mathbf{x},\mathbf{0}) \Longrightarrow \begin{cases} (h_i(\mathbf{x}),\mathbf{x},\mathbf{0}), & \mathbf{x} \in \operatorname{dom} h_i \\ \text{durmaz}, & \mathbf{x} \notin \operatorname{dom} h_i \end{cases}, \ i = 1,\ldots,m.$$

Burada $\mathbf{0}$ gereksinim duyduğumuz kadar sıfırdan oluşan bir $0,\ldots,0$ dizisidir. 0^m ile m tane sıfırdan oluşan bir $0,\ldots,0$ dizisini anlayacağız. $h(\mathbf{x})$ ile $h_1(\mathbf{x}),\ldots,h_m(\mathbf{x})$ dizisini gösterelim. Herhangi bir N doğal sayısı seçilsin ve $\mathcal{N}_1,\ldots,\mathcal{N}_4$ makinaları aşağıdaki gibi tanımlansınlar:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1 &:= \mathcal{M}_1\mathcal{T}_{1,N+1}\mathcal{M}_2\mathcal{T}_{1,N+2}\cdots\mathcal{M}_m\mathcal{T}_{1,N+m}, \\ \mathcal{N}_2 &:= \mathcal{T}_{2,N+m+1}\cdots\mathcal{T}_{n+1,N+m+n}\mathcal{T}_{N+1,2}\cdots\mathcal{T}_{N+m,m+1}, \\ \mathcal{N}_3 &:= \mathcal{M}_0, \\ \mathcal{N}_4 &:= \mathcal{S}_2\cdots\mathcal{S}_{m+1}\mathcal{T}_{N+m+1,2}\cdots\mathcal{T}_{N+m+n,n+1}. \end{aligned}$$

$\mathcal{M} := \mathcal{N}_1\mathcal{N}_2\mathcal{N}_3\mathcal{N}_4$ makinası $f(\mathbf{x}) = g(h_1(\mathbf{x}),\ldots,h_m(\mathbf{x}))$ değerini ava $\mathbf{x} \in \operatorname{dom} f$ ise izleyen biçimde hesaplar: $\mathbf{0}$ daima N bileşenli olmak üzere

$$\begin{aligned} &(0,\mathbf{x},\mathbf{0},0^m,0^n) \overset{\mathcal{N}_1}{\Longrightarrow} (0,\mathbf{x},\mathbf{0},h(\mathbf{x}),0^n) \overset{\mathcal{N}_2}{\Longrightarrow} (0,h(\mathbf{x}),\mathbf{0},0^m,\mathbf{x}) \\ &\overset{\mathcal{N}_3}{\Longrightarrow} (f(\mathbf{x}),h(\mathbf{x}),\mathbf{0},0^m,\mathbf{x}) \overset{\mathcal{N}_4}{\Longrightarrow} (f(\mathbf{x}),\mathbf{x},\mathbf{0},0^m,0^n) \end{aligned}$$

ve $\mathbf{x} \notin \operatorname{dom}(f)$ için makina durmaz. ■

Lemma 5.13.16 *$g \in \mathbf{F}^n$ ve $h \in \mathbf{F}^{n+2}$ KM-kısmi hesaplanabilirlerse $f = \operatorname{Yn}(g,h)$ fonksiyonu da KM-kısmi hesaplanabilir.*

Kanıt. Varsayımdan dolayı g ve h fonksiyonlarımız KM-kısmi hesaplanabilir olduklarından onları ancak tanım kümelerinde hesaplayan $\mathcal{M}_g$ ve $\mathcal{M}_h$ makinalarımız vardır. Bu iki makinada kullandığımız maksimal kütük sayısı $N-1$ olsun. Şimdi N kütük kullanan iki makina

$$\mathcal{N}_1 := \mathcal{T}_{n+2,N}\mathcal{M}_g \text{ ve } \mathcal{N}_2 := \mathcal{T}_{1,n+3}\mathcal{M}_h\mathcal{S}_{n+3}a_{n+2}s_N$$

olmak üzere $\mathcal{M} := \mathcal{N}_1(\mathcal{N}_2)_N$ olsun. Bu durumda $\mathbf{x} = x_1,\ldots,x_n$ olmak üzere $(\mathbf{x},y) \in \operatorname{dom}(f)$ ise

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}_1 : (0,\mathbf{x},y,\mathbf{0},0) \Longrightarrow (g(\mathbf{x}),\mathbf{x},0,\mathbf{0},y),\ f(\mathbf{x},0) = g(\mathbf{x}),\\
&\mathcal{N}_2 : (f(\mathbf{x},0),\mathbf{x},0,\mathbf{0},y) \Longrightarrow (f(\mathbf{x},1),\mathbf{x},1,\mathbf{0},y-1),\\
&\mathcal{N}_2 : (f(\mathbf{x},z),\mathbf{x},z,\mathbf{0},y-z) \Longrightarrow (f(\mathbf{x},z+1),\mathbf{x},z+1,\mathbf{0},y-(z+1)),\ z<y
\end{aligned}$$

olduğundan $\mathcal{M} : (0,\mathbf{x},y,\mathbf{0},0) \Longrightarrow (f(\mathbf{x},y),\mathbf{x},y,\mathbf{0},0)$ olur. Eğer $(\mathbf{x},y) \notin \operatorname{dom} f$ ise ya $\mathcal{N}_1$ durmaz, ya da $\mathcal{N}_1$ durduğunda $(\mathcal{N}_2)_N$ durmaz. ■

Lemma 5.13.17 *g KM-kısmi hesaplanabilirse $f = \mu g$ de KM-kısmi hesaplanabilir.*

Kanıt. Eğer $\mathcal{M}$ makinası g fonksiyonunu kısmi hesaplıyorsa

$$\mathcal{M}' := a_1(\mathcal{S}_1\mathcal{M}a_{n+2})_1 \text{ ve } \mathcal{M}'' := \mathcal{M}'\mathcal{T}_{n+2,1}s_1$$

ise $\mathcal{M}''$ makinası $f = \mu g$ fonksiyonunu

$$\begin{aligned}
(0,\mathbf{x},0,\mathbf{0}) &\overset{\mathcal{M}'}{\Longrightarrow} (0,\mathbf{x},y+1,\mathbf{0}),\ \forall z<y\ \ g(\mathbf{x},z)\neq 0 \text{ ve } g(\mathbf{x},y)=0,\\
(0,\mathbf{x},y+1,\mathbf{0}) &\overset{\mathcal{T}_{n+2,1}}{\Longrightarrow} (y+1,\mathbf{x},0,\mathbf{0}) \overset{s_1}{\Longrightarrow} (y,\mathbf{x},0,\mathbf{0})
\end{aligned}$$

olarak kısmi hesaplar. $\mathbf{x} \notin \operatorname{dom} g$ ise $\mathcal{M}$ durmadığı için $\mathcal{M}'$ de durmaz ve $\mathbf{x} \in \operatorname{dom} g$ olduğunda ise her y için $g(\mathbf{x},y) \neq 0$ ise $\mathcal{M}'$ asla durmaz. Dolayısıyla $\mathcal{M}$ makinamız $f(\mathbf{x}) = \mu g(\mathbf{x})$ değerini tamı tamına $\mathbf{x} \in \operatorname{dom} g$ ve $g(\mathbf{x},y) = 0$ olacak şekilde bir y var ise hesaplar. ■

(5.13.14)–(5.13.17)'den aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 5.13.18 *$f \in YKF$ yinelgen kısmi fonksiyon ise KM-kısmi hesaplanabilir. f yinelgen ise f KM-hesaplanabilir.*

Not 5.13.19 Herhangi bir makina türüyle veya herhangi bir biçimde açıklanmış hesaplanabilirlik kavramıyla n bilindiğinde $n+1$, $n \dot{-} 1$ hesaplanabiliyor ve herhangi bir n doğal sayısı için $n > 0$ olup olmadığı kontrol edilebiliyorsa (5.13.18) geçerliliğini korur. Bunlar ise her akla yatkın hesaplanabilirlik kavramının asgarileridir. Bu, amacımızın bir yarısıdır, hem de zor olan yarısıdır. ▲

Sıra (5.13.18)'in ters yönünü kanıtlamaya, dd. f fonksiyonu KM-kısmi hesaplanabilir bir kısmi fonksiyonsa yinelgen kısmi olduğunu göstermeye geldi! Bu daha da anlaşılır bir şeydir, ancak önce bir tanım:

Tanım 5.13.20 *Bir* $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^m$ *dönüşümüne*

$$\langle f \rangle (\mathbf{x}) := \langle f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}) \rangle^m \tag{5.75}$$

ile tanımlanan $\langle f \rangle : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *fonksiyonu (basit) yinelgense* f *dönüşümü* ***(basit) yinelgendir*** *denir. Eğer* f_i*'ler kısmi fonksiyonlar olmak üzere* $\langle f \rangle$ *yinelgen kısmi fonksiyon ise* f ***yinelgen kısmidir*** *denir.*

$\langle \rangle^m : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ basit yinelgen olduğundan eğer $f_1, \ldots, f_m$ fonksiyonları (basit) yinelgen (kısmi) fonksiyonlar iseler elbette $\langle f \rangle$ fonksiyonu da (basit) yinelgen (kısmi) fonksiyondur. Yalınlık açısından $\langle \rangle^m$ yerine çoğu zaman $\langle \rangle$ yazacağız.

Bize N kütüklü, uzunluğu d olan bir $\mathcal{M}$ kayıt makinası verilsin. Makinamız $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ olmak üzere $0\mathbf{x0}$ girdileri ile çalıştırıldığında bazı $\mathbf{x}$'ler için $y\mathbf{x0}$ çıktısı verir ve bazı girdilerde durmaz, dolayısıyla tanım kümesi makinanın durduğu girdiler olan bir $f_{\mathcal{M}} :\subseteq \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ kısmi fonksiyonu tanımlar. Makinanın $0\mathbf{x0}$ girdisinde durmasını $\mathcal{M}0\mathbf{x0}\downarrow$ ve durmamasını $\mathcal{M}0\mathbf{x0}\uparrow$ ile gösterirsek $f_{\mathcal{M}}(\mathbf{x})\downarrow \iff \mathcal{M}0\mathbf{x0}\downarrow$ olur. $f_{\mathcal{M}}$ fonksiyonunu $\tau_{\mathcal{M}} : \mathbb{N}^{N+1} \to \mathbb{N}^{N+1}$ geçiş dönüşümü üzerinden de dile getirebiliriz.

$\tau_{\mathcal{M}}$ geçiş dönüşümümüz $\mathbf{z} = z_1, \ldots, z_N$ ve ilk dört şıkta $j < d$ olmak üzere

$$\tau_{\mathcal{M}}(j, \mathbf{z}) := \begin{cases} (l, z_1, \ldots, z_i + 1, \ldots, z_N), & (j,i,+,l) \in \mathcal{M} \\ (l, z_1, \ldots, z_i \dot{-} 1, \ldots, z_N), & (j,i,\dot{-},l) \in \mathcal{M} \\ (k, z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_N), & (j,i,k,l) \in \mathcal{M}, k < d, z_i > 0 \\ (l, z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_N), & (j,i,k,l) \in \mathcal{M}, k < d, z_i = 0 \\ (j, z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_N), & j = d \end{cases} \tag{5.76}$$

olarak tanımlanmıştır; burada $(j,i,k,l) \in \mathcal{M}$ ile kastedilen (j,i,k,l)'nin $\mathcal{M}$'nin komutlarından biri olduğudur. (5.76)'nın sağ yanında, $\mathcal{M}$'de sonlu komut olduğundan, birbirini dışlayan basit yinelgen bağıntılar var. Ayrıca tanımın koordinatları basit yinelgen fonksiyonlar olduğundan aşağıdaki önerme aşikârdır.

Önerme 5.13.21 *$\tau_{\mathcal{M}} : \mathbb{N}^{N+1} \to \mathbb{N}^{N+1}$ basit yinelgendir.*

Tanım 5.13.22 *$\tau_{i\mathcal{M}} : \mathbb{N}^{N+1} \to \mathbb{N}^{N+1}$ dönüşümü basit yineleme ile k sayısı $\mathcal{M}$ makinasının başlangıç belirteci olmak üzere*

$$\begin{aligned} \tau_{i\mathcal{M}}(0, \mathbf{z}) &:= (k, \mathbf{z}) \\ \tau_{i\mathcal{M}}(n+1, \mathbf{z}) &:= \tau_{\mathcal{M}}(\tau_{i\mathcal{M}}(n, \mathbf{z})) \end{aligned}$$

olarak tanımlansın.

Önerme 5.13.23 *$\tau_{i\mathcal{M}}$ basit yinelgendir.*

Kanıt. $\tau_{i\mathcal{M}}$, basit yinelgen $\tau_{\mathcal{M}}$'den basit yineleme ile elde edilmiştir. ■

Bu durumda $\mathbf{z}_0$ bizim başlangıç girdimiz olmak üzere

$$H = ((j_0, \mathbf{z}_0), (j_1, \mathbf{z}_1), \ldots, (j_T, \mathbf{z}_T)), \; j_T = d$$

kapanmış bir $\mathcal{M}$-hesaplaması olsun. Basit bir gözatma makinamızın başlangıç komutunun belirteci k ise

$$\tau_{i\mathcal{M}}(0, \mathbf{z}_0) = (k, \mathbf{z}_0) \text{ ve } m \geq 1 \text{ için } \tau_{i\mathcal{M}}(m, \mathbf{z}_0) = (j_m, \mathbf{z}_m)$$

olduğunu gösterir, dd. $\mathbf{z}_m$ tam da makina $\mathbf{z}_0$ girdisiyle m adım çalıştıktan sonra kütüklerdeki sayıların dizisidir. Biz $j_T = d$ ise her T' için hesaplamayı uzatacak olsak yine $j_{T'} = d$ olacağını biliyoruz. Dolayısıyla T sayısı $j_{T'} = d$ koşulunu sağlayan T' sayılarının en küçüğü olsun.

Şimdi başlangıç girdimiz $\mathbf{z}_0 = 0\mathbf{x}\mathbf{0}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^n$ olarak seçilmiş olsun. $\langle \tau_{i\mathcal{M}} \rangle$ fonksiyonu basit yinelgendir ve $\mathbf{x} \in \mathrm{dom}(f_{\mathcal{M}})$ için

$$\tau_{i\mathcal{M}}(T, 0, \mathbf{x}, \mathbf{0}) = (d, y, \mathbf{x}, \mathbf{0}) \text{ ise } f_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) = y,$$

veya başka bir yazımla

$$\langle \tau_{i\mathcal{M}} \rangle (T, 0, \mathbf{x}, \mathbf{0}) = \langle d, y, \mathbf{x}, \mathbf{0} \rangle \text{ ise } f_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) = y$$

ve elbette

$$f_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) \simeq (\langle \tau_{i\mathcal{M}} \rangle (T, 0, \mathbf{x}, \mathbf{0}))_1, \quad T = \min\{t \mid (\langle \tau_{i\mathcal{M}} \rangle (t, 0, \mathbf{x}, \mathbf{0}))_0 = d\}. \tag{5.77}$$

$\langle \tau_{i\mathcal{M}} \rangle$ basit yinelgen olduğundan $\mathbb{N}^n$'de $(\langle \tau_{i\mathcal{M}} \rangle (T, 0, \mathbf{x}, \mathbf{0}))_1$ fonksiyonu basit yinelgendir ve $T = \min\{t \mid (\langle \tau_{i\mathcal{M}} \rangle (t, 0, \mathbf{x}, \mathbf{0}))_0 = d\}$ bağıntısı da basit yinelgen olduğundan (5.77) denkliğinin sağ yanı bir yinelgen kısmi fonksiyondur. Böylece aşağıdaki teoreme ulaşırız.

Teorem 5.13.24 *Herhangi bir $\mathcal{M}$ kayıt makinasının kısmi hesapladığı her $f_{\mathcal{M}}$ fonksiyonu bir yinelgen kısmi fonksiyondur.*

Teorem 5.13.25 *Bir kısmi fonksiyonun yinelgen kısmi fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul KM-kısmi hesaplanabilir olmasıdır.*

Kanıt. (5.13.18) ve (5.13.25). ■

Not 5.13.26 (5.13.25)'ten dolayı "yinelgen (kısmi)" ve "KM-(kısmi) hesaplanabilir" kavramları birbirine denktir. Diğer yandan kayıt makinalarının üç komutunu gerçekleştirebilen her yanıtlama türü (kısmi) yinelgen fonksiyonları (kısmi) hesaplar. Kesin bilemeyeceğimiz ise bunların (kısmi) yinelgen fonksiyonlardan daha fazlasını hesaplayıp hesaplamadıklarıdır. Tanımlanan diğer bazı hesaplamaların daha fazlasını hesaplamadıkları da kanıtlanmıştır. Ayrıca yinelgen olmayan ve herhangi bir algoritma ile hesaplayabildiğimiz bir fonksiyonu da bugüne kadar bilmiyoruz. Tüm bunlar Church Tezi'ni destekler görünmektedir.

Bundan sonra "KM-(kısmi) hesaplanabilir" yerine kısaca "(kısmi) hesaplanabilir" diyeceğiz. Böylece f fonksiyonları ve P bağıntıları için

$$\begin{aligned} f \text{ yinelgen (kısmi) fonksiyondur} &\iff f \text{ (kısmi) hesaplanabilir,} \\ P \text{ (yarı) yinelgen} &\iff P \text{ (yarı) hesaplanabilir} \\ &\iff P \text{ (yarı) belirlenebilir} \end{aligned}$$

denkliklerini elde ederiz. Bu terimlerin kâh birini kâh ötekisini kullanmakta sakınca görmeyeceğiz. ▲

Evrensel Kayıt Makinasından anlaşılan sonsuz kütüklü bir makinadır. Daha önce kayıt makinası veya program olarak adlandırdığımız $\mathcal{M}$ makinalarına bu makinada çalıştırdığımız programlar olarak bakarız. Dikkat edilirse çalıştırabileceğimiz programlar sayılabilir çokluktadır.

Bundan sonra önümüzde iki yol var: Ya KM-hesaplanabilirlik üzerinden yolumuza devam etmek, ya da Gödel'in izlediği yolu izlemek. Biz ikinci yolu yeğleyeceğiz. Ancak ilk yolu izlediğimizde yararlanılan bir teoreme kısaca değinelim. Kayıt makinasından artık evrensel kayıt makinasının anlayalım.

Tanım 5.13.27 ***Durma Problemi*** *belli bir programla programlanmış kayıt makinamızın yine belli bir girdi verildiğinde sonlu bir zamanda durup durmayacağını, yani hesaplamayı bitirip bitirmeyeceğini belirleme problemidir.*

Özetle biz kayıt makinamız için öyle bir P programı arıyoruz ki P ile programlanmış kayıt makinamız, makinamız herhangi bir Q programı ile programlanıp bir G girdisi verildiğinde hesaplamanın sonlu zamanda durup durmayacağını belirlesin.

Teorem 5.13.28 *Durma Problemi belirlenemez. Tam olarak: Kayıt makinası hangi P programıyla programlanmış olursa olsun daima bir Q programı ve bir G girdisi bulunabilir öyle ki Q ile programlanmış makinanın G girdisi verildiğinde sonlu zamanda hesabı bitirip bitiremeyeceğine karar veremez.*

Kanıt. Bir an için savımızın tersini varsayalım. Bir P ile programlanmış kayıt makinamızın herhangi bir Q ile programlanmış makinanın herhangi bir g girdisi verildiğinde durup durmayacağını belirlediğini varsayalım.

Şimdi girdileri yine $G = (Q, g)$ ikilileri olan bir P' programını, P programı yardımıyla şöyle tanımlayalım: P' ile programlanmış kayıt makinamız (Q, g) girdisi verildiğinde ancak ve ancak Q ile programlanmış makinamız g girdisinde durmadığı zaman dursun.

P' programının varlığı bizi doğrudan bir çelişkiye götürür. Çelişki P' programını $Q = P'$ ile çalıştırdığımızda çıkar. Tanım gereği P' ile programlanmış makinamız $Q = P'$ girdisiyle çalıştırıldığında ancak ve ancak $Q = P'$ ile programlanmış makina $Q = P'$ girdisiyle durmadığı zaman durur. Çelişki! ■

Durma Problemi'nin çözümünde aslında yine Cantor Köşegen Yöntemi devrededir. Önünde sonunda, hangi türden olursa olsun (ister kayıt makinası ister Turing makinası vs.) elimizde sayılabilir çoklukta $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots$ makinaları ve sayılabilir çoklukta $g_0, g_1, g_2, \ldots$ girdilerimiz vardır. Bu verilere bir (m_{ij}) matrisi şöyle karşılık getirilsin. $\mathcal{M}_i$ makinası g_j girdisi ile çalıştığında duruyorsa $m_{ij} = 1$ ve durmuyorsa $m_{ij} = 0$ olsun. Şimdi biz makinalarımızdan $\mathcal{H}$ ile göstereceğimiz birinin, herhangi bir $\mathcal{M}_i$ makinası g_j girdisi ile çalıştığında sonlu adımda durup durmayacağını bildirmesini istiyoruz, dd. $\mathcal{H}$ makinasına kodlanmış olarak bir g_j girdisi ve bir $\mathcal{M}_i$ makinası verildiğinde m_{ij} çıktısını versin. Böyle bir $\mathcal{H}$ makinasının olamayacağını, var olduğunu varsayarsak bir çelişkiye ulaşarak göstereceğiz. Elimizde böyle bir $\mathcal{H}$ makinamız varsa bir $\mathcal{H}'$ makinasını g_i girdisiyle çalıştığında çıktısı $1 - m_{ii}$ olacak biçimde tanımlayabiliriz. $\mathcal{H}'$ bizim makinalarımızdan biri olmalıdır, $\mathcal{H}' = \mathcal{M}_i$ olsun. Bu olamaz; çünkü g_i girdisiyle çalıştırıldıklarında $\mathcal{M}_i$ makinamız m_{ii} çıktısını verirken $\mathcal{H}'$ makinamız $1 - m_{ii}$ çıktısını verir ve $m_{ii} \neq 1 - m_{ii}$! Öyleyse böyle bir $\mathcal{H}$ makinası olamaz.

Gödel teoremleri kayıt makinaları üzerinden devam edilerek de kanıtlanabilir. Bu yolda ilerlerken de Gödel'in aritmetikleştirme yöntemini kullanırız. Yani programlarımıza, hesaplamalarımıza vs. doğal sayılar karşılık getirip bunlar üzerindeki söylemlerimiz doğal sayılar üzerinde söylemlere dönüştürülür. Biz bu yolu izlemek yerine Gödel'in yolunu izleyecek ve biçimsel kuramlarımızı aritmetikleştireceğiz.

5.14 Aritmetikleştirme

Bu kesimde daha önce "hesaplanabilirlik" ve "belirlenebilirlik" gibi kavramlarla kanıtladığımız bazı teoremleri yeniden kanıtladığımız görülecektir. Bunun nedeni, bu kavramlara ilgi duymayan, doğrudan yinelgen fonksiyonlardan yola çıkıp Gödel'in yolunu izlemek isteyenlerin isteklerini karşılamaktır.

Bir $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramı verilsin. Biz $\mathcal{K}$'nın sözeden kuramından bizi ilgilendiren bir kısmını $\mathfrak{N}$ yapısına taşımak istiyoruz. Bunun için en azından her $t \in \operatorname{Tm} L$ terimine ve her $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ formülüne onların Gödel sayıları diyeceğimiz $\ulcorner t \urcorner$ ve $\ulcorner \varphi \urcorner$ doğal sayıları karşılık getirmek, dd. bir $\ulcorner \urcorner : \operatorname{Tm} L \cup \operatorname{Fm} L \to \mathbb{N}$ fonksiyonu tanımlamak zorundayız. Bu dönüşüm şu iki koşulu sağlamalıdır:

1) $\ulcorner \urcorner$ dönüşümü birebir ve her $n \in \mathbb{N}$ için $n \in \operatorname{Im} \ulcorner \urcorner$ olup olmadığı belirlenebilir olmalıdır.

2) Eğer $n \in \operatorname{Im} \ulcorner \urcorner$ ise elimizde $\ulcorner x \urcorner = n$ koşulun sağlayan x öğesini bulmamızı sağlayan bir yöntemimiz olmalıdır.

Bu koşullar sağlanacaksa L dili en fazla sayılabilir sonsuz olabilir. Sayılabilir her L dilini (kurulacak bir gömme ile) baştan seçilmiş sabit ve sayılabilir bir $\mathbf{L}$ dilinin altkümeleri olarak düşünebiliriz. $\mathbf{L}$ dilinin sabit imlerinin kümesi $\{c_k\}_{k\geq 0}$, değişken imlerinin kümesi $\{v_k\}_{k\geq 0}$, fonksiyon imlerinin kümesi $\{f_k^n \mid n \geq 1, k \geq 0\}$ ve bağıntı imlerinin kümesi ise $\{R_k^n \mid n \geq 1, k \geq 0\}$ kümesidir. f_k^n imi n değişkenli bir fonksiyon imi ve R_k^n ise n yerli bir bağıntı imidir. Burada imlerimizi $c_p = c_q \iff p = q$, $f_k^n = f_l^m \iff n = m \wedge k = l$ ve $R_k^n = R_l^m \iff n = m \wedge k = l$ olacak biçimde seçtiğimizi anımsatalım.

Kitabımızı buraya kadar okuyan okur için bu kesimde ondan isteyeceğimiz bir iki değişiklik herhangi bir zorluk taşımaz:

1. Yalınlık açısından ön yazılım kullanacağız, dolayısıyla L dili dışındaki imlerimiz $\neg, \to, \dot{\forall}$ ve $\doteq$ olacaktır; ayraç ve virgül kullanmayacağız. Biz s.116'de ön yazılımın dışına iki yerde çıktık: "s, t terimlerse $s \doteq t$ bir formüldür" ve "φ ve ψ formülse $(\varphi \to \psi)$ de bir formüldür" derken alışıldık iç yazılımı kullandık. Şimdi bunları

   (1) s, t terimseler $\doteq st$ bir formüldür ve

   (2) φ ve ψ formülse $\to \varphi\psi$ de bir formüldür

   olarak değiştireceğiz.

2. f bir 0 değişkenli fonksiyon ve $c = f(\emptyset)$ ise f'yi c ile özdeş kılmıştık. Şimdi dilimizdeki sabit imlerinden vazgeçecek ve onları 0 değişkenli fonksiyon imleriyle değiştireceğiz. $\mathbf{L}$ dilinde c_k sabit imlerinden vazgeçip onların yerine f_k^0 fonksiyon imini alacağız. Böylece $\mathbf{L}$ dili $\mathcal{F} = \{f_k^n \mid n, k \geq 0\}$ fonksiyon imleri ve $\mathcal{R} = \{R_k^n \mid n \geq 1, k \geq 0\}$ bağıntı imlerinden oluşur. Herhangi bir L dili söz konusu olduğunda da bu

dilin sabit imlerini de sıfır değişkenli fonksiyon imleri olarak düşüneceğiz.

$\mathbf{A} := \mathbf{L} \sqcup \{\neg, \to, \dot\forall, \doteq\}$ abecesindeki her a imine onun yer sayısı diyeceğimiz bir $\sharp(a)$ doğal sayısını

$$\sharp(v_k) = 0,\ \sharp(\neg) = 1,\ \sharp(\to) = \sharp(\doteq) = \sharp(\dot\forall) = 2,$$
$$\sharp(f_k^n) = n,\ \sharp(R_k^n) = n$$

olarak açıklayacağız.

$L = \mathcal{R} \sqcup \mathcal{F}$ dilinin A abecesinin sözcüklerinin ön yazılımdaki harfsel yazılımları tek türlü belirlidir. Bu sözcüklerden bizi ilgilendirenler $\operatorname{Tm} L$ terimleri ile $\operatorname{Fm} L$ formülleridir. Bunlara L dilinin **kelimeleri** diyelim ve bunların kümesini $\operatorname{Klm} L$ ile gösterelim ve L dili belli olduğunda yalın olarak Klm yazalım. Aşikâr da olsa tamlık açısından aşağıdaki önermeyi kanıtlayacağız.

Önerme 5.14.1 (Tek Türlü Okunabilirlik) *Her* $\kappa \in \operatorname{Klm}$ *kelimesi ve bir* $n \in \mathbb{N}$ *için* $u \in A,\ \sharp(u) = n$ *ve* $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in \operatorname{Klm}$ *olmak üzere* tek *türlü* $\kappa = u\kappa_1 \cdots \kappa_n$ *olarak yazılabilir.*

Kanıt. Burada $n = 0$ ise $u\kappa_1 \cdots \kappa_n := u$ alınacaktır. Böyle bir gösterimin varlığı terim ve formüllerin tanımından aşikardır.

Tekliği gösterelim. $\kappa = u\kappa_1 \cdots \kappa_n$ ve $\kappa = u^*\kappa_1^* \cdots \kappa_m^*$ olsun. Harfsel yazılımın tekliğinden $u = u^*$ ve dolayısıyla $m = n$ olacaktır. Böylece $\kappa_1 \cdots \kappa_n = \kappa_1^* \cdots \kappa_n^*$ elde ederiz. $\kappa_1 \cdots \kappa_n$ sözcüğünün uzunluğu üzerinden tümevarımla $1 \le i \le n$ için $\kappa_i = \kappa_i^*$ olduğunu göstereceğiz. Bu uzunluğu $\kappa_1 \cdots \kappa_n$ sözcüğünün uzunluğundan daha kısa olanlar için gösterilmiş olsun. Her şeyden önce $n = 0$ ise sav aşikârdır. Dolayısıyla $n \ge 1$ olsun. Az önceki irdelemeyle bir p ile $\kappa_1 = u_1\kappa_{11} \cdots \kappa_{1p}$ ve $\kappa_1^* = u_1\kappa_{11}^* \cdots \kappa_{1p}^*$ olacaktır. Böylece

$$\kappa_{11} \cdots \kappa_{1p}\kappa_2 \cdots \kappa_n = \kappa_{11}^* \cdots \kappa_{1p}^*\kappa_2^* \cdots \kappa_m^*$$

olacaktır. Tümevarım koşulundan $1 \le i \le p$ için $\kappa_{1i} = \kappa_{1i}^*$ ve $2 \le j \le n$ için $\kappa_j = \kappa_j^*$ olur. Bu ise bize her $1 \le j \le n$ için $\kappa_j = \kappa_j^*$ eşitliklerini verir. ■

(5.14.1) önermesinden dolayı her $\kappa \in \operatorname{Klm}$ kelimesi aşağıdaki üç tipten tam bir tanesinde bulunur:

(1) $\kappa \in \mathcal{V}$,

(2) $\kappa = q\kappa_1 \cdots \kappa_n,\ q \in A \backslash \{\dot\forall\},\ \sharp(q) = n,\ \kappa_1, \ldots, \kappa_n \in \operatorname{Klm}$ tek olarak belirli,

(3) $\kappa = \dot\forall x\varphi$.

Bu bize kelimeler için bir kavramı tümevarımsal biçimde nasıl açıklayacağımızı gösterir. Bunun bir örneğini biraz ileride kelimelerin Gödel

sayılarını açıklarken göreceğiz. Gödel sayılarımızı dizi sayıları (bkz. Tanım 5.10.4(a)) olarak açıklayacağımızdan $(x_0, \ldots, x_n)$ dizisini $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ sayısı ile kodlamak yerine (5.10.6)'da belirtiğimiz gibi

$$[x_0, \ldots, x_{n-1}]^n := \prod_{i=0}^{n-1} p_i^{x_i}$$

ile kodlayacağız. () boş dizisini $[] := [()] := 1$ olarak kodlayacağız. Elbette $[]^n$ dönüşümü birebirdir. $[x_0, \ldots, x_{n-1}]^n = [x_0, \ldots, x_{n-1}, 0]^{n+1}$ olduğundan $[]^n$ fonksiyonlarının birleşimi $\mathbb{N}^{<\omega}$'da birebir değildir. Gödel sayıları söz konusu olduğunda $(x_0, \ldots, x_{n-1})$ pozitif terimli bir dizi olacaktır; dolayısıyla Gödel sayılarımız dizi sayıları olacaktır.

$v(x, i)$, $\langle\rangle^n$, $(x)_i$ ve $\mathrm{lh}(x)$ basit yinelgen fonksiyonları ve Seq basit yinelgen bağıntısı (5.10.2) ve (5.10.4)'te olduğu gibi tanımlansınlar. $[x]_i := v(x, i)$ olarak tanımlanırsa

$$x = [x_0, \ldots, x_{n-1}]^n \Longrightarrow [x]_i = x_i,\ 0 \leq i \leq n-1$$

fonksiyonu ve $[]^n$ fonksiyonları da basit yinelgendirler. Daha önce belirttiğimiz gibi

$$[x_0, \ldots, x_{n-1}] = \langle x_0 \dot{-} 1, \ldots, x_{n-1} \dot{-} 1 \rangle$$

geçerlidir. Basit Yinelgen Kodlama kesimindeki $\frown$ eklemesinin yerine, benzer biçimde tanımlanan $*$ eklemesini tanımlayacağız. Her bir x_i ve y_j pozitif olmaz üzere x ve y sayıları sırası ile $[x_0, \ldots, x_k]$ ve $[y_0, \ldots, y_m]$ ise

$$\begin{aligned} x * y = [x_0, \ldots, x_k] * [y_0, \ldots, y_m] &:= [x_0, \ldots, x_k, y_0, \ldots, y_m] \\ &= \prod_{i=0}^{k} p_i^{x_i} \cdot \prod_{j=0}^{k+1+m} p_{k+1+j}^{y_j} \end{aligned}$$

olarak açıklanır. Herhangi $x, y \in \mathbb{N}$ için

$$x * y = x \cdot \prod_{j < \mathrm{lh}(y)} p_{\mathrm{lh}(x)+j}^{[y]_j}$$

olduğu apaçıktır ve $* : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ ekleme fonksiyonu basit yinelgendir. Tanım gereği $x * 0 = x * 1 = x$ ve $y \neq 0$ ise $x * (y * z) = (x * y) * z$. Bizi yalnızca pozitif sayılar ilgilendireceği için bu koşul hep sağlanmış olacaktır ve biz $*$ işlemi söz konusu olduğunda ayraçları atabiliriz. Bu ve tanımdan

$$[x_0, \ldots, x_n] = [x_0] * \cdots * [x_n] = 2^{x_0} * \cdots * 2^{x_n}$$

elde ederiz

Şimdi $\overline{f}$ fonksiyonunun benzeri f^* fonksiyonunu şöyle tanımlayacağız: Eğer $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ ise

$$\begin{aligned} f^*(\overline{x_n}, y) &= \prod_{i<y} p_i^{f(\overline{x_n}, i)} && (5.78)\\ &= [f(\overline{x_n}, 0), \ldots, f(\overline{x_n}, y-1)] \\ &= [f(\overline{x_n}, 0)] * \cdots * [f(\overline{x_n}, y-1)] && (5.79)\\ &= 2^{f(\overline{x_n}, 0)} * \cdots * 2^{f(\overline{x_n}, y-1)} && (5.80) \end{aligned}$$

olarak açıklansın. Tanım gereği daima $f^*(\overline{x_n}, 0) = 1$ olduğuna dikkat ediniz. f basit yinelgense f^* da basit yinelgendir. Tersine f^* basit yinelgense $f(\overline{x_n}, y) = [f^*(\overline{x_n}, y+1)]_y$ olduğundan f de basit yinelgendir. (5.10.9) ve onu izleyen teoremler $\overline{f}$ yerine f^* aldığımızda da doğrudurlar. Biz sıkça kullanacağımız için (5.10.9)'un benzerini ifade edip kanıtlayacağız.

Teorem 5.14.2 (CV-yineleme) *1. $g : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ (basit) yinelgen olsun. Bir $h : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu*

$$h(\overline{z_n}, x) = g(\overline{z_n}, x, h^*(\overline{z_n}, x)) \tag{5.81}$$

koşulunu sağlıyorsa tek olarak belirlidir ve (basit) yinelgendir.

2. $Q \subseteq \mathbb{N}^{n+2}$ (basit) yinelgen bir bağıntı ve $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ bağıntısı için

$$\forall\, (\overline{z_n}, x) \in \mathbb{N}^{n+1}\ (R(\overline{z_n}, x) \iff Q(\overline{z_n}, x, \chi_R^*(\overline{z_n}, x)))$$

sağlanıyorsa R'de (basit) yinelgendir.

Kanıt. 1. h fonksiyonu (5.81)'i sağlasın. Bu durumda

$$\begin{aligned} h^*(\overline{z_n}, 0) &= [] = 1 \\ h^*(\overline{z_n}, x+1) &= h^*(\overline{z_n}, x) * \langle g(\overline{z_n}, x, h^*(\overline{z_n}, x))\rangle \end{aligned}$$

ve $f(\overline{z_n}, x, y) = y * [g(\overline{z_n}, x, y)]$ ile $h^* = \mathrm{Yn}(1, f)$ olur. $*$ ve $[]$ (basit) yinelgen olduğundan f (basit) yinelgen, dolayısıyla h^* (basit) yinelgendir. Teklik aşikârdır. Teorem öncesi irdelemelerimizden dolayı h de (basit) yinelgendir.

2. Her $(\overline{z_n}, x) \in \mathbb{N}^{n+1}$ için

$$\chi_R(\overline{z_n}, x) = \chi_Q(\overline{z_n}, x, \chi_R^*(\overline{z_n}, x))$$

olduğundan sav önermenin birinci kısmından çıkar. ■

Not 5.14.3 $f^*(\overline{x_n}, y)$'nin tanımında tüm $f^*(\overline{x_n}, 0), \ldots, f^*(\overline{x_n}, y-1)$ değerlerini kullandık. Böyle olması gerekmez. Örneğin $0 \le k < l \le y-1$ olmak üzere $f^*(\overline{x_n}, k)$ ve $f^*(\overline{x_n}, l)$ değerlerini kullanmak istemiyorsak

$$g(\overline{x_n}, y) := \begin{cases} f(\overline{x_n}, y) & y \neq k, l \\ 0 & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

fonksiyonundan yola çıkarız. f (basit) yinelgense g de (basit) yinelgendir ve

$$g^*(\overline{x_n}, y) = \prod_{i<y} p_i^{g(x_1,\ldots,x_n,i)} = \prod_{i<y,\ i\neq k,l} p_i^{f(x_1,\ldots,x_n,i)}$$

olur. Diğer yandan $[]^n$ basit yinelgen fonksiyonunda değişkenleri istediğimiz gibi permütasyona uğrattığımızda yine basit yinelgen bir fonksiyon elde ettiğimizi biliyoruz. Dolayısıyla (5.78)'de f^* fonksiyonun tanımında $f(\overline{x_n}, 0)$, $\ldots, f(\overline{x_n}, y-1)$ değerlerinin bir kısmını veya tamamını ve istediğimiz sırada kullanabiliriz ve (5.14.2) yine doğrudur. Demek ki (5.80)'de $f(\overline{x_n}, 0), \ldots,$ $f(\overline{x_n}, y-1)$ değerlerinin bir kısmını veya tamamını ve istediğimiz sırada kullanabiliriz. ▲

Her şeyden önce $\mathbf{A} := \mathbf{L} \sqcup \{\neg, \to, \dot\forall, \doteq\}$ abecesindeki her a imine a'nın **im numarası** diyeceğimiz bir $\mathrm{IN}(a)$ doğal sayısını aşağıdaki gibi karşılık getireceğiz:

$$\begin{aligned}
\mathrm{IN}(v_k) &:= 2^0 3^0 5^k =: [0,0,k],\ k \geq 0,\\
\mathrm{IN}(f_k^n) &:= 2^n 3^1 5^k =: [n,1,k],\ n \geq 0,\ k \geq 0,\\
\mathrm{IN}(R_k^n) &:= 2^n 3^2 5^{k+1} = [n,2,k],\ n \geq 1,\ k \geq 0,\\
\mathrm{IN}(\neg) &:= [1,2,0],\\
\mathrm{IN}(\to) &:= [2,0,0],\\
\mathrm{IN}(\dot\forall) &:= [2,0,1],\\
\mathrm{IN}(\doteq) &:= [2,2,0].
\end{aligned}$$

$\mathrm{IN} : \mathbf{A} \to \mathbb{N}$ dönüşümü birebirdir ve her l imi için $\mathrm{IN}(l) \geq 1$ sağlanır. Önceden açıkladığımız gibi herhangi bir sayılabilir L dilini $\mathbf{L}$ dilinin altkümesi olarak düşünebiliriz. Böylece L dilinin n değişkenli her f fonksiyon imine $[n,1,k]$ tipinde bir im numarası ve n yerli her R bağıntı imine ise $i \geq 1$ olmak üzere $[n,2,i]$ tipinde bir im numarası karşılık getirilebilir.

Tanım 5.14.4 $\mathrm{IN}(\mathcal{F})$ *ve* $\mathrm{IN}(\mathcal{R})$ *kümeleri (basit) yinelgense* L *dili* ***(basit) yinelgendir*** *denir. Bu kümeler yarı yinelgen ise* L *dili* ***yarı yinelgendir*** *denir.*

Matematikte kuramlarımızın dilleri genelde sonlu oldukların bunlar basit yinelgendirler. Örneğin bizi en çok ilgilendiren L_a aritmetik dili için $\mathcal{F} = \{f_0^0, f_0^1, f_0^2, f_1^2\}$ ve $\mathcal{R} = \emptyset$. Biz $\mathbf{0} := f_0^0$, $\mathbf{S} := f_0^1$, $\dot + := f_0^2$ ve $\bullet := f_1^2$ yazdık.

L dili (basit) yinelgense elbette $A := L \sqcup \left\{\neg, \to, \dot\forall, \doteq\right\}$ olmak üzere $\mathrm{IN}(L)$ ve $\mathrm{IN}(A)$ (basit) yinelgendir.

Uzlaşma: Bundan sonra, ayrıca belirtmesek de L dili (basit) yinelgen olacaktır.

$\mathcal{K}$ kuramının **aritmetikleştirilme**sinden anladığımız birebir bir $\ulcorner\urcorner : \mathrm{Klm} \sqcup \mathrm{Klm}^{<\omega} \to \mathbb{N}$ dönüşümü vermektir öyle ki 1) her $n \in \mathbb{N}$ için $n \in \mathrm{Im}^{\ulcorner\urcorner}$ olup olmadığı belirlenebilir olsun ve 2) eğer $n \in \mathrm{Im}^{\ulcorner\urcorner}$ ise elimizde $\ulcorner x \urcorner = n$ koşulun sağlayan x öğesini bulmamızı sağlayan bir yöntemimiz olsun. Şimdi kelimelerimizin üç tipten olduğunu anımsayarak onların Gödel sayılarını açıklayacağız.

Tanım 5.14.5 $x \in \mathcal{V}$, $\kappa_0, \kappa_1, \ldots, \kappa_n \in \mathrm{Klm}$ *ve* $\varphi \in \mathrm{Fm}$ *ise*

$$\ulcorner x \urcorner := [\mathrm{IN}(x)], \tag{5.82}$$

$$\ulcorner q\kappa_1 \cdots \kappa_n \urcorner := [\mathrm{IN}(q), \ulcorner \kappa_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner \kappa_n \urcorner], \tag{5.83}$$

$$\ulcorner \dot{\forall} x\varphi \urcorner := [\mathrm{IN}(\dot{\forall}), \ulcorner x \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner]. \tag{5.84}$$

Her l imi için $\mathrm{IN}(l) \geq 1$ olduğundan her $\kappa \in \mathrm{Klm}$ için $\ulcorner \kappa \urcorner \geq 1$ olur; dolayısıyla Gödel sayılarımız dizi sayılarıdır. Burada $x \in \mathcal{V}$ iminin $\mathrm{IN}(x)$ im numarası ve bir tek x iminden oluşan x kelimesinin $\ulcorner x \urcorner = 2^{\mathrm{IN}(x)}$ Gödel sayılarının farklı kavramlar olduğunu vurgulayalım. Yine $q = f^0_k = c_k$ gibi 0 değişkenli bir fonksiyon imi, dd. bir sabit imi ise tanımdaki ikinci satır

$$\ulcorner c_k \urcorner = \ulcorner f^0_k \urcorner = [\mathrm{IN}(f^0_k)] = 2^{[0,1,k]} = 2^{2^0 3^1 5^k}$$

şeklini alır. Ayrıca kelimelerin tek türlü okunabilirliğinin bir sonucu olarak $\ulcorner\urcorner : \mathrm{Klm} \to \mathbb{N}$ iyi tanımlı ve birebirdir. (5.80)'den dolayı (5.83) ve (5.84)'ü şöyle de yazabiliriz:

$$\ulcorner q\kappa_1 \cdots \kappa_n \urcorner = 2^{\mathrm{IN}(q)} * 2^{\ulcorner \kappa_1 \urcorner} * \cdots * 2^{\ulcorner \kappa_n \urcorner} \quad \text{ve} \tag{5.85}$$

$$\ulcorner \dot{\forall} x\varphi \urcorner = 2^{\mathrm{IN}(\dot{\forall})} * 2^{\ulcorner x \urcorner} * 2^{\ulcorner \varphi \urcorner}. \tag{5.86}$$

Not 5.14.6 Aritmetiğin L_a dili için $f^0_0 = \mathbf{0}$,$f^1_0 = \mathbf{S}$, $f^2_0 = \dot{+}$ ve $f^2_1 = \bullet$ olduğundan

$$\mathrm{IN}(\mathbf{0}) = 2^0 3^1 5^0 = 3,\ \mathrm{IN}(\mathbf{S}) = 2^1 3^1 5^0 = 6,$$
$$\mathrm{IN}(\dot{+}) = 2^2 3^1 5^0 = 12,\ \mathrm{IN}(\bullet) = 2^2 3^1 5^1 = 60$$

olur. $\mathrm{IN}\,(v_1) = 5$, $\ulcorner v_1 \urcorner = 2^5 = 32$, $\ulcorner \mathbf{0} \urcorner = 2^{\mathrm{IN}(\mathbf{0})} = 2^3 = 8$ olduğundan $\dot{+} v_1 \mathbf{0}$ teriminin—ki bu iç yazılımda $v_1 \dot{+} \mathbf{0}$ terimidir—Gödel sayısı

$$\ulcorner \dot{+} v_1 \mathbf{0} \urcorner = 2^{\mathrm{IN}(+)} 3^{\ulcorner v_1 \urcorner} 5^{\ulcorner \mathbf{0} \urcorner} = 2^{12} 3^{32} 5^8$$

ve $\doteq \mathbf{S}\dot{+}v_1\mathbf{0}v_1$ kelimesinin—ki bu şimdiye kadar ki yazılımızla $\mathbf{S}(v_1\dot{+}\mathbf{0}) \doteq v_1$ formülüdür—Gödel sayısı

$$\begin{aligned}\ulcorner \doteq \mathbf{S} \dot{+} v_1\mathbf{0}v_1\urcorner &= 2^{\mathrm{IN}(\doteq)}3^{\ulcorner \mathbf{S}\dot{+}v_1\mathbf{0}\urcorner}5^{\ulcorner v_1\urcorner} = 2^{36}3^{2^{\mathrm{IN}(\mathbf{S})}3^{\ulcorner \dot{+}v_1\mathbf{0}\urcorner}}5^{32}\\ &= 2^{36}3^{2^6 3^{2^{12}3^{32}5^8}}5^{32}.\end{aligned}$$

olur. Özetle Gödel sayılarını hesaplamaya kalkmak anlamsızdır; çok basit kelimelerin Gödel sayılarını hesaplamak en gelişmiş bilgisayarların kapasitesini aşar. ▲

L dili (basit) yinelgen olan $\mathcal{K}$ kuramlarının sözeden kuramının bazı söylemlerini (basit) yinelen fonksiyon veya (basit) yinelgen bağıntılara dönüştüreceğiz. Bunu yaparken "(Basit) Yinelgen Fonksiyonlar" ve "Basit Yinelgen Kodlama" başlıklı kesimlerde verdiğimiz tanım ve teoremlere sıkça başvuracağız. Tekrar tekrar geri dönüşler yapmamak için bu iki kesimin işimize yarayacak kısımlarını özetleyeceğiz.

- (A1) $\mathrm{a}, \mathrm{m}, \exp, \delta, \mathrm{sub}, \mathrm{sg}, \overline{\mathrm{sg}}, \mathrm{fac}, \min, \max, \mathrm{rm}$ ve qt fonksiyonları basit yinelgendir (5.8.12).

- (A2) $f \in \mathbf{F}^{n+1}$ (basit) yinelgense $\sum_{y<z} f(\overline{x_n}, y)$, $\sum_{y\leq z} f(\overline{x_n}, y)$ fonksiyonları ve $\prod_{y<z} f(\overline{x_n}, y)$, $\prod_{y\leq z} f(\overline{x_n}, y)$ fonksiyonları (basit) yinelgendirler (5.8.14).

- (A3) (Basit) yinelgen bağıntıların kümesi Boole işlemlerine ve (basit) yinelgen yerine koymalara göre kapalıdır (5.8.18).

- (A4) P (basit) yinelgen bir bağıntı ise $\mu^{<z}P$ ve $\mu^{\leq z}P$ fonksiyonları basit yinelgendirler (5.8.19).

- (A5) $P \in \mathbf{R}^{n+1}$ (basit) yinelgen ve $g \in \mathbf{F}^1$ (basit) yinelgense $\mu^{\leq g(z)}P$ de (basit) yinelgendir (5.8.20).

- (A6) (Basit) yinelgen bağıntılar kümesi sınırlanmış niceleyicilere göre kapalıdır (5.8.21).

- (A7) f fonksiyonu (basit) yinelgendir $\Longleftrightarrow$ G_f (basit) yinelgendir. Bunu (5.8.22)'de kanıtladık.

- (A8) $P_1, \ldots, P_n \in \mathbf{R}^m$ ayrık (basit) yinelgen bağıntılar ve $g_1, \ldots, g_{n+1} \in \mathbf{F}^m$ (basit) yinelgense $1 \leq k \leq n$ için $f(\overline{x_m}) := g_k(\overline{x_m}) \Longleftrightarrow (\overline{x_m}) \in P_k$ ve diğer durumda $f(\overline{x_m}) := g_{n+1}(\overline{x_m})$ olarak açıklanan f fonksiyonu (basit) yinelgendir (5.8.23).

- (A9) $=, \neq, <, \leq$ ve sonlu $R \subset \mathbb{N}$ bağıntıları (basit) yinelgendir. $f \in \mathbf{F}^n$ (basit) yinelgense $\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = 0\}$ (basit) yinelgendir. $x|y$ (bölünebilirlik) bağıntısı basit yinelgendir. $\mathrm{Pr} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ asaldır}\}$ ile açıklanan Pr bağıntısı basit yinelgendir (5.8.24).

$\mathcal{K} = (L, \Gamma)$'nın sözeden kuramına ilişkin bazı söylemleri vereceğiz ve bunları Gödel sayıları üzerinden $\mathfrak{N}$ yapısına taşıyacağız. Bu söylemler $\mathfrak{N}$ yapısının bazı fonksiyon ve bağıntılarına dönüştürüleceklerdir. L dilini (basit) yinelgen seçersek aktaracağımız fonksiyon ve bağıntılarda (basit) yinelgen olacaklardır. Bir s söylemine $\mathfrak{N}$ yapısının bir φ_s formülünü $s \Longleftrightarrow \varphi_s$ olacak biçimde karşılık getireceğiz. φ_s formülünden söz konusu fonksiyon veya bağıntının (basit) yinelgen olduğu kolayca okunacaktır.

- Ayrıca belirtmeye gerek duymadığımız gerekçeler yukarıda listelediğimiz bilgilere dayanacaktır. En çok başvuracak olduklarımız (A1), (A3), (A5) ve (A9), (5.14.2) ve (5.14.3) olacaktır.

Daha önce terimlerin, formüllerin, bir formülde bir değişken yerine bir terim koymanın tanımlarını verirken aşırı titiz gelebilecek bir tutum sergilemiştik, ancak bu tanımların yinelgen olduğunu ve ileride işimize yarayacağını belirtmiştik; bunun yeri gelmiştir.

Tanım 5.14.7 *$n \geq 1$ için $\mathrm{Fm}^n L := \{\varphi \in \mathrm{Fm}\, L \mid \mathrm{Sb}\, \varphi \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}\}$ ve $\mathrm{Fm}^0 L := \mathrm{Sav}\, L$ olsun. Bir $\varphi(x_1, \ldots x_n) \in \mathrm{Fm}^n L$ formülüne ise ava $x_1 = v_1, \ldots, x_n = v_n$ ise* ***düzgün*** *diyeceğiz.*

Not 5.14.8 Örneğin $x_1 = v_{17}$ ve $x_2 = v_{41}$ olmak üzere $\doteq x_1 x_2$ formülü düzgün değildir. Ancak değişken değiştirme teoremi ile $\doteq x_1 x_2$ formülünün $\doteq v_1 v_2$ düzgün formülüne mantıksal denk olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla herhangi bir formülle çalışmak yerine ona mantıksal olarak denk bir düzgün formülle çalışabiliriz. ▲

Uzlaşma: Bundan sonra tüm formüllerimiz, ayrıca belirtilmese de düzgün olacaktır.

L (basit) yinelgen bir dil olsun. Yalınlık açısından $\mathrm{Fm}\, L$, $\mathrm{Tm}\, L$, $\mathrm{At}\, L$ (atomik formüller, $\mathrm{Klm}\, L$, $\mathrm{Fm}^0 L$ ve $\mathrm{Fm}^n L$ yerine yalın olarak Fm, Tm, At, Klm, Fm^0 ve Fm^n gösterimlerini kullanacağız. Yine $\mathrm{IN}\, L := \mathrm{IN}(\mathcal{F}) \sqcup \mathrm{IN}(\mathcal{R})$ yerine yalın olarak IN yazalım. Son olarak $R \subseteq \mathbb{N}^n$ bağıntısı için $(x_1, \ldots, x_n) \in R \Longleftrightarrow R(x_1, \ldots, x_n)$ yazdığımızı belirtelim.

Tanım 5.14.9 *$X \subseteq \mathrm{Klm}$ için $\ulcorner X \urcorner := \{\ulcorner \kappa \urcorner \mid \kappa \in X\}$ olsun. $\ulcorner X \urcorner$ (basit) yinelgen veya yarı yinelgense sırasıyla X **(basit) yinelgen** veya yarı **yinelgendir** diyelim. Ayrıca*

$$\ulcorner \mathrm{SB} \urcorner := \{(\ulcorner x \urcorner, \ulcorner \kappa \urcorner) \mid x \in \mathcal{V} \ \wedge \ \kappa \in \mathrm{Klm} \ \wedge x \in \mathrm{Sb}(\kappa)\},$$
$$\ulcorner \mathrm{SBK} \urcorner := \{(\ulcorner t \urcorner, \ulcorner x \urcorner, \ulcorner \kappa \urcorner) \mid t \in \mathrm{Tm} \ \wedge x \in \mathcal{V} \ \wedge \ \kappa \in \mathrm{Klm} \ \wedge \ \mathrm{Sb}(\kappa, x|t)\}$$

olsunlar.

$\ulcorner \mathrm{SB} \urcorner \subseteq \mathbb{N}^2$ ve $\ulcorner \mathrm{SBK} \urcorner \subseteq \mathbb{N}^3$ bağıntıları L dilinin sözeden kuramı üzerinden açıklanmıştır. Örneğin $(m, n) \in \ulcorner \mathrm{SB} \urcorner$ tam da "m doğal sayısı, Gödel sayısı n olan bir κ kelimesinde serbest olan bir x değişkeninin Gödel sayısıdır" demektir. $(m, n, k) \in \ulcorner \mathrm{SBK} \urcorner$ ise tam da "m bir t teriminin, n bir x değişkenin ve k ise kendisinde x yerine t terimini koymaya izinli olduğumuz bir κ kelimesinin Gödel sayılarıdırlar" demektir. Herhangi bir x doğal sayısı için $[x]_{i,j} := [[x]_i]_j$ olsun.

Önerme 5.14.10 *L (basit) yinelgense $\ulcorner \mathcal{V} \urcorner$, $\ulcorner \mathrm{Tm} \urcorner$, $\ulcorner \mathrm{At} \urcorner$, $\ulcorner \mathrm{Fm} \urcorner$, $\ulcorner \mathrm{Fm}^n \urcorner$, $\ulcorner \mathrm{SB} \urcorner$ ve $\ulcorner \mathrm{SBK} \urcorner$ bağıntıları (basit) yinelgendir.*

Kanıt. Önermeler (A1)–(A9), (5.14.2), (5.14.3) ve aşağıdaki denkliklerin doğrudan sonucudur.

1. $a \in \ulcorner \mathcal{V} \urcorner \iff a = [[0, 0, [a]_{0,2}]]$.
2. $$a \in \ulcorner \mathrm{Tm} \urcorner \iff a \in \ulcorner \mathcal{V} \urcorner \vee$$
$$([a]_0 \in \mathrm{IN} \ \wedge [a]_0 = [\mathrm{lh}(a) \dot{-} 1, 1, [a]_{0,2}] \ \wedge \ \forall^{<\mathrm{lh}(a)\dot{-}1} i \ ([a]_{i+1} \in \ulcorner \mathrm{Tm} \urcorner)).$$
3. $$a \in \ulcorner \mathrm{At} \urcorner \iff \mathrm{lh}(a) > 0 \ \wedge \ \forall^{<\mathrm{lh}(a)\dot{-}1} i \ ([a]_{i+1} \in \ulcorner \mathrm{Tm} \urcorner) \wedge$$
$$[a]_0 \in (\mathrm{IN} \cup \{\mathrm{IN}(\doteq)\}) \ \wedge \ [a]_0 = \langle \mathrm{lh}(a) \dot{-} 1, 2, [a]_{0,2} \rangle.$$
4. $$a \in \ulcorner \mathrm{Fm} \urcorner \iff a \in \ulcorner \mathrm{At} \urcorner \vee$$
$$(\mathrm{lh}(a) = 2 \ \wedge \ [a]_0 = \mathrm{IN}(\neg) \ \wedge \ [a]_1 \in \ulcorner \mathrm{Fm} \urcorner) \vee$$
$$(\mathrm{lh}(a) = 3 \ \wedge \ [a]_0 = \mathrm{IN}(\rightarrow) \ \wedge \ [a]_1 \in \ulcorner \mathrm{Fm} \urcorner \ \wedge \ [a]_2 \in \ulcorner \mathrm{Fm} \urcorner) \vee$$
$$(\mathrm{lh}(a) = 3 \ \wedge \ [a]_0 = \mathrm{IN}(\dot{\forall}) \ \wedge \ [a]_1 \in \ulcorner \mathcal{V} \urcorner \ \wedge \ [a]_2 \in \ulcorner \mathrm{Fm} \urcorner).$$

(2) ve (4)'ten dolayı $\mathrm{Klm} = \mathrm{Tm} \cup \mathrm{Fm}$ (basit) yinelgendir.

5.

$$\begin{aligned}&(j,a)\in\ulcorner\mathrm{SB}\urcorner\iff(j=a\wedge a\in\ulcorner\mathcal{V}\urcorner)\vee\\&(a\in\ulcorner\mathrm{Klm}\urcorner\wedge\exists^{<\mathrm{lh}(a)\dot{-}1}i((j,[a]_{i+1})\in\ulcorner\mathrm{SB}\urcorner)\\&\wedge([a]_0=\mathrm{IN}(\dot\forall)\Longrightarrow j\neq[a]_1)).\end{aligned}$$

6. $a\in\ulcorner\mathrm{Fm}^n\urcorner\iff a\in\ulcorner\mathrm{Fm}\urcorner\wedge\forall^{<a}i\ ((i,a)\in\ulcorner\mathrm{SB}\urcorner\Longrightarrow 1\leq[i]_{0,2}\leq n)$.

7.

$$\begin{aligned}&(c,j,a)\in\ulcorner\mathrm{SBK}\urcorner\iff\\&c\in\ulcorner\mathrm{Tm}\urcorner\ \wedge\ j\in\ulcorner\mathcal{V}\urcorner\ \wedge\ a\in\ulcorner\mathrm{Fm}\urcorner\wedge\\&([a\in\ulcorner\mathrm{At}\urcorner\ \vee\ ([a]_0=\mathrm{IN}(\neg)\ \wedge\ (c,j,[a]_1)\in\ulcorner\mathrm{SBK}\urcorner)\vee\\&([a]_0=\mathrm{IN}(\to)\ \wedge\ (c,j,[a]_1)\in\ulcorner\mathrm{SBK}\urcorner\ \wedge\ (c,j,[a]_2)\in\ulcorner\mathrm{SBK}\urcorner)\vee\\&([a]_0=\mathrm{IN}(\dot\forall)\wedge\\&((j,a)\in\ulcorner\mathrm{SB}\urcorner\Longrightarrow([a]_1,c)\notin\ulcorner\mathrm{SB}\urcorner\ \wedge\ (c,j,[a]_2)\in\ulcorner\mathrm{SB}\urcorner))).\end{aligned}$$

■

Tanım 5.14.11 *Bir a formülünde c_2 yerine c_1 koyma işlemini temsil edecek olan* $\mathrm{Subs}:\mathbb{N}^3\to\mathbb{N}$ *fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın:*

$$\mathrm{Subs}(c_1,c_2,a):=\begin{cases}c_1, & a=c_2\\ a, & a=[\mathrm{IN}(\dot\forall),c_2,[a]_2]\end{cases}\tag{5.87}$$

ve diğer durumlarda ise $\mathrm{lh}(a)>1$ *için*

$$\mathrm{Subs}(c_1,c_2,a):=[[a]_0,\mathrm{Subs}(c_1,c_2,[a]_1),\ldots,\mathrm{Subs}(c_1,c_2,[a]_{\mathrm{lh}(a)\dot{-}1})]\tag{5.88}$$

ve $\mathrm{lh}(a)=1$ *ise* $\mathrm{Subs}(c_1,c_2,a):=[[a]_0]$ *olarak açıklansın.*

Önerme 5.14.12 *(a)* $t\in\mathrm{Tm}$, $x\in\mathcal{V}$ *ve* $\kappa\in\mathrm{Klm}$ *olmak üzere*

$$\mathrm{Subs}(\ulcorner t\urcorner,\ulcorner x\urcorner,\ulcorner\kappa\urcorner)=\ulcorner\kappa(x|t)\urcorner.$$

(b) Subs *fonksiyonu (basit) yinelgendir.*

Kanıt. Kelimelere göre tümevarımla kanıtlayacağız.

(a) $t\in\mathrm{Tm}$ ve $x\in\mathcal{V}$ verilsinler; bunları sabit tutalım ve her $\kappa\in\mathrm{Klm}$ için $\phi(\kappa):=\mathrm{Subs}(\ulcorner t\urcorner,\ulcorner x\urcorner,\ulcorner\kappa\urcorner)$ olarak açıklayalım.

1. $\kappa = x$: $\phi(\kappa) = \mathrm{Subs}(\ulcorner t \urcorner, \ulcorner x \urcorner, \ulcorner x \urcorner) \overset{(5.87)}{=} \ulcorner t \urcorner = \ulcorner \kappa(x|t) \urcorner$.
2. $\kappa = y, y \neq x$ ve $y \in \mathcal{V}$: Bu durumda $\kappa(x|t) = y$ olduğundan

$$\phi(\kappa) = \mathrm{Subs}(\ulcorner t \urcorner, \ulcorner x \urcorner, \ulcorner y \urcorner) \overset{(5.88)}{=} [\mathrm{IN}(y)] = \ulcorner y \urcorner = \ulcorner \kappa(x|t) \urcorner.$$

3. $\kappa = q\kappa_1 \cdots \kappa_n,\ q \in L \cup \{\neg, \to, \doteq\}, \kappa_1, \ldots \kappa_n \in \mathrm{Klm}$ için sav kanıtlanmış olsun. $a := \ulcorner \kappa \urcorner = [\mathrm{IN}(q), \ulcorner \kappa_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner \kappa_n \urcorner]$ olduğundan $[a]_0 = \mathrm{IN}(q)$ ve $1 \leq i \leq n$ için $[a]_i = \ulcorner \kappa_i \urcorner$ ve $\mathrm{Subs}(\ulcorner t \urcorner, \ulcorner x \urcorner, [a]_i) = \phi(\kappa_i)$ olduğunu gözetirsek (5.88) ile

$$\begin{aligned} \phi(\kappa) &= [\mathrm{IN}(q), \phi(\kappa_1), \ldots, \phi(\kappa_n)] \\ &\overset{tvk}{=} [\mathrm{IN}(q), \ulcorner \kappa_1(x|t) \urcorner, \ldots, \ulcorner \kappa_n(x|t) \urcorner] \\ &= [q\kappa_1(x|t) \cdots \kappa_n(x|t)] = \ulcorner \kappa(x|t) \urcorner. \end{aligned}$$

4. $\kappa = \dot{\forall} y\varphi$ ve $y \neq x$ ve sav φ için kanıtlanmış olsun. $a := \ulcorner \kappa \urcorner = [\mathrm{IN}(\dot{\forall}), \ulcorner y \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner]$ olmak üzere $\ulcorner x \urcorner \neq \ulcorner y \urcorner$ olduğundan (5.88) ile

$$\begin{aligned} \phi(\kappa) = \mathrm{Subs}(\ulcorner t \urcorner, \ulcorner x \urcorner, [\kappa]) &= [[a]_0, \phi(y), \phi(\varphi)] \overset{tvk}{=} [\mathrm{IN}(\dot{\forall}), \ulcorner y \urcorner, \ulcorner \varphi(x|t) \urcorner] \\ &= [\dot{\forall} y \varphi(x|t)] = [\kappa(x|t)]. \end{aligned}$$

5. $\kappa = \dot{\forall} x\varphi$ ise $\phi(\kappa) = \ulcorner \kappa \urcorner = \ulcorner \kappa(x|t) \urcorner$.

(b) Burada (5.14.2) ilk kez kullanılacaktır. Subs fonksiyonunun (basit) yinelgen olduğunu kanıtlamak için tanımındaki (5.88) durumunda verilen fonksiyonun (basit) yinelgen olduğunu kanıtlamak gerekir. g ve h fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlansınlar:

$$\begin{aligned} g(a, d, 0) &:= [[a]_0], \\ g(a, d, n+1) &:= g(a, d, n) * [[d]_{[a]_{n+1}}], \\ h(c_1, c_2, a, d) &:= \begin{cases} c_1, & a = c_2 \\ a, & a = [\mathrm{IN}(\dot{\forall}), c_2, [a]_2] \\ g(a, d, \mathrm{lh}(a) \dot{-} 1), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}. \end{aligned}$$

g basit yinelgen olduğundan h de basit yinelgendir. Ancak (5.88) ile verilen ifade h'nin tanımındaki üçüncü durum ile örtüştüğünden

$$\begin{aligned} \mathrm{Subs}(c_1, c_2, a) &= [[a]_0, \mathrm{Subs}(c_1, c_2, [a]_1), \ldots, \mathrm{Subs}(c_1, c_2, [a]_{\mathrm{lh}(a) \dot{-} 1})] \\ &= [[a]_0, [\mathrm{Subs}^*(c_1, c_2, a)]_{[a]_1}, \ldots, [\mathrm{Subs}^*(c_1, c_2, a)]_{[a]_{\mathrm{lh}(a) \dot{-} 1}}] \\ &= g(a, \mathrm{Subs}^*(c_1, c_2, a), \mathrm{lh}(a) \dot{-} 1) \\ &= h(c_1, c_2, a, \mathrm{Subs}^*(c_1, c_2, a)) \end{aligned}$$

olur ve (5.14.2) ile Subs (basit) yinelgendir.

■

Tanım 5.14.13 $\mathrm{Neg} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\mathrm{Con} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *fonksiyonları ve* $\mathrm{Gen} \subseteq \mathbb{N}^2$, $\mathrm{MP} \subseteq \mathbb{N}^3$ *bağıntıları şöyle tanımlansınlar:*

1. $\mathrm{Neg}(x)$*: x sayısı bir φ formülünün Gödel sayısı ise* $\mathrm{Neg}(x)$ *sayısı* $\ulcorner\neg\varphi\urcorner$ *formülünün Gödel sayısıdır, diğer durumda sıfırdır.*

2. $\mathrm{Con}(x,y)$*: $\varphi, \psi \in \mathrm{Fm}$, $x = \ulcorner\varphi\urcorner$ ve $y = \ulcorner\psi\urcorner$ ise* $\mathrm{Con}(x,y) = \ulcorner\to\varphi\psi\urcorner$*, diğer durumda sıfırdır.*

3. $\mathrm{Gen}(x,y) :\Longleftrightarrow$ *Gödel sayısı y olan formül Gödel sayısı x olan formülden (Gen) kuralı ile elde edilmiştir.*

4. $\mathrm{MP}(x,y,z) :\Longleftrightarrow$ *Gödel sayısı z olan formül Gödel sayıları x ve y olan formüllerden doğrudan modus ponensle elde edilmiştir.*

Önerme 5.14.14 Neg *ve* Con *basit yinelgen fonksiyonlar,* Gen *ve* MP *ise (basit) yinelgen bağıntılardır.*

Kanıt. $\mathrm{IN}(\neg) = 18$, $\mathrm{IN}(\to) = 4$ ve $\mathrm{IN}(\dot\forall) = 20$ olduğundan (5.85) ve (5.86) ile

1. $\mathrm{Neg}(x) = \begin{cases} 2^{18} * 2^x & x \in \ulcorner\mathrm{Fm}\urcorner \\ 0 & \text{diğer durumda} \end{cases}$.

2. $\mathrm{Con}(x,y) = \begin{cases} 2^4 * 2^x * 2^y & x, y \in \ulcorner\mathrm{Fm}\urcorner \\ 0 & \text{diğer durumda} \end{cases}$.

3. Öncelikle eğer y numaralı formül x numaralı formülden v numaralı değişkene (Gen) uygulanarak elde edilmişse $y > x$ ve $y > v$ olmak zorundadır (çünkü formül soldan uzadıkça Gödel sayısı büyür). Böylece

$$(x,y) \in \mathrm{Gen} \Longleftrightarrow \exists^{<y} v, x\ (v \in \ulcorner\mathcal{V}\urcorner \wedge x \in \ulcorner\mathrm{Fm}\urcorner \wedge y = 2^{20} * 2^v * 2^x).$$

4. $\ulcorner\to\varphi\psi\urcorner = 2^{\mathrm{IN}(\to)}3^{\ulcorner\varphi\urcorner}5^{\ulcorner\psi\urcorner} = 2^4 * 2^{\ulcorner\varphi\urcorner} * 2^{\lceil\psi\rceil}$ olduğundan, yine (3)'teki mantıkla

$$(x,y,z) \in \mathrm{MP} \Longleftrightarrow \exists^{<z} x, y(x \in \ulcorner\mathrm{Fm}\urcorner \wedge y \in \ulcorner\mathrm{Fm}\urcorner \wedge z = 2^4 * 2^x * 2^y).$$

■

Tanım 5.14.15 *$x \in \ulcorner\mathrm{Fm}\urcorner$ ve $x = \ulcorner\varphi\urcorner$ ise* $\mathrm{Kap}(x) := \ulcorner\varphi^{\dot\forall}\urcorner$ *olarak açıklansın. $x \notin \ulcorner\mathrm{Fm}\urcorner$ için ise* $\mathrm{Kap}(x) := 0$ *olsun.*

Önerme 5.14.16 Kap *fonksiyonu (basit) yinelgendir.*

Kanıt. $M(x) := \mu^{<x} v\,(v \in \ulcorner \mathcal{V} \urcorner \wedge (v,x) \in \ulcorner \mathrm{SB} \urcorner)$ olsun, dd. $M(x)$ sayısı Gödel sayısı x olan formülün serbest değişkenlerinin Gödel sayılarının en küçüğüdür. M (basit) yinelgendir. $\mathrm{Sav}(x) :\Longleftrightarrow \exists \sigma \in \mathrm{Sav} \wedge x = \lceil \sigma \rceil$ olarak açıklanırsa

$$\mathrm{Sav}(x) \Longleftrightarrow x \in \ulcorner \mathrm{Fm} \urcorner \wedge \neg(\exists^{\leq x} v\ \ (v,x) \in \ulcorner \mathrm{SB} \urcorner)$$

olduğundan Sav bağıntısı (basit) yinelgendir. Şimdi

$$G(x) := \begin{cases} [\mathrm{IN}(\dot{\forall}), M(x), x], & x \in \ulcorner \mathrm{Fm} \urcorner \wedge \neg\, \mathrm{Sav}(x) \\ x, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

olarak açıklansın. x serbest değişkenleri olan bir φ formülünün Gödel sayısı ve bu formülün damgası en küçük olan serbest değişkeni v_k ise $G(x) = \ulcorner \dot{\forall} v_k \varphi \urcorner = 2^{20} 3^{\mathrm{M}(x)} 5^x = 2^{20} * 2^{\mathrm{M}(x)} * 2^x$ ve bu (basit) yinelgendir. Bu durumda

$$H(x,0) := G(x),$$
$$H(x,y+1) := G(H(x,y))$$

ile tanımlanan H fonksiyonu (basit) yinelgendir. Dolayısıyla

$$\mathrm{Kap}(x) = H(x, \mu^{<x} y(H(x,y) = H(x,y+1)))$$

olduğundan Kap (basit) yinelgendir. ■

Mantık ilksavlarımız eşitlik ilksavları ile $\sigma_1(\varphi,\psi)$, $\sigma_2(\varphi,\psi,\eta)$, $\sigma_3(\varphi,\psi)$, $\sigma_4(\varphi,x,t)$ ve $\sigma_5(\varphi,\psi,x)$ ilksavlarıdır. Şimdi $\varepsilon_1^0(x)$, $\varepsilon_2^0(x,y)$, $\varepsilon_3^0(x,y,z)$ formülleri sırasıyla $x \doteq x$, $x \doteq y \to y \doteq x$ ve $x \doteq y \curlywedge y \doteq z \to x \doteq z$ olsun. Biz eşitlik ilksavları olarak $\varepsilon_1(x)$, $\varepsilon_2(x,y)$ ve $\varepsilon_3(x,y,z)$ yerine $\varepsilon_1^0(x)$, $\varepsilon_2^0(x,y)$ ve $\varepsilon_3^0(x,y,z)$ alabileceğimizi biliyoruz. E4 ve E5 eşitlik ilksavlarının yerine her $\varphi \in \mathrm{At}$ için

$$\varepsilon\,(\varphi, x|s, x|t) : \qquad s \doteq t \to (\varphi\,(x|s) \to \varphi\,(x|t))$$

alınabileceğini görmeyi okura bırakıyoruz. Bu arada eşitlik ilksavları olarak yalnızca $\varepsilon_0(x)$ ve $\varepsilon(\varphi, x|s, x|t)$ ilksavlarının alınabileceğini de belirtelim (örneğin bkz. [71],[90]). $\curlywedge$ tanımlanmış imini $\varepsilon_3^0(x,y,z)$ aksiyomundan yok edelim ve $\varepsilon_3^0(x,y,z)$ savının dilimizde

$$\neg(x \doteq y \to \neg\,(y \doteq z)) \to x \doteq z$$

olduğunu belirtelim.

Tanım 5.14.17

$$
\begin{aligned}
\ulcorner \Sigma_1 \urcorner &:= \{\ulcorner \sigma_1(\varphi,\psi)\urcorner \mid \varphi,\psi \in \mathrm{Fm}\},\\
\ulcorner \Sigma_2 \urcorner &:= \{\ulcorner \sigma_2(\varphi,\psi,\eta)\urcorner \mid \varphi,\psi,\eta \in \mathrm{Fm}\},\\
\ulcorner \Sigma_3 \urcorner &:= \{\ulcorner \sigma_3(\varphi,\psi)\urcorner \mid \varphi,\psi \in \mathrm{Fm}\},\\
\ulcorner \Sigma_4 \urcorner &:= \{\ulcorner \sigma_4(\varphi,x,t)\urcorner \mid \varphi \in \mathrm{Fm}, x \in \mathcal{V}, t \in \mathrm{Tm}, \mathrm{Sb}(\varphi,x|t)\},\\
\ulcorner \Sigma_5 \urcorner &:= \{\ulcorner \sigma_5(\varphi,\psi,x)\urcorner \mid \varphi,\psi \in \mathrm{Fm} \wedge x \in \mathcal{V} \wedge x \notin \mathrm{Sb}(\varphi)\},\\
\ulcorner E_1 \urcorner &:= \{\ulcorner \varepsilon_1^0(x)\urcorner \mid x \in \mathcal{V}\},\\
\ulcorner E_2 \urcorner &:= \{\ulcorner \varepsilon_2^0(x,y)\urcorner \mid x,y \in \mathcal{V}\},\\
\ulcorner E_3 \urcorner &:= \{\ulcorner \varepsilon_3^0(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathcal{V}\urcorner\},\\
\ulcorner E_{3,4} \urcorner &:= \{\ulcorner \varepsilon(\varphi,x|s,x|t)\urcorner \mid \varphi \in \mathrm{At}, \mathrm{Sb}(\varphi,x|s), \mathrm{Sb}(\varphi,x|t)\},\\
\ulcorner \Lambda_m \urcorner &:= \bigcup_{i=1}^{5} \ulcorner \Sigma_i \urcorner \cup \bigcup_{j=1}^{3} \ulcorner E_j \urcorner \cup \ulcorner E_{3,4} \urcorner.
\end{aligned}
$$

Önerme 5.14.18 $\ulcorner \Lambda_m \urcorner$ *(basit) yinelgendir, başka sözlerle, mantık ilksavlarımız (basit) yinelgendir.*

Kanıt. $\ulcorner \Sigma_1 \urcorner, \ulcorner \Sigma_2 \urcorner, \ldots, \ulcorner E_3 \urcorner, \ulcorner E_{3,4} \urcorner$ kümelerinin (basit) yinelgen olduklarını göstermek yeterlidir. Bunlar ise listelediğimiz bilgiler ve (5.14.16) yardımıyla aşağıdaki denkliklerin bir sonucudur: $n \in \ulcorner \Lambda_m \urcorner \iff n \in \ulcorner \mathrm{Fm} \urcorner \wedge \cdots$ olmak üzere $\cdots$ aşağıdaki durumlardan biridir (burada (5.14.17)'deki sıralamayı izleyeceğiz):

1. $\exists^{<n} a,b\ (n = \mathrm{Con}(a, \mathrm{Con}(b,a)))$.
2. $\exists^{<n} a,b,c\ (\mathrm{Con}(\mathrm{Con}(a,(b,c)), \mathrm{Con}(\mathrm{Con}(a,b), \mathrm{Con}(a,c))))$.
3. $\exists^{<n} a.b\ (\mathrm{Con}\left(\mathrm{Con}\left(\mathrm{Neg}(a), \mathrm{Neg}(b)\right), \mathrm{Con}(b,a)\right))$.
4. $\exists^{<n} a,i,c\ (n = \mathrm{Con}([\mathrm{IN}(\dot{\forall}), i, a], \mathrm{Subs}(c,i,a)) \wedge (c,i,a) \in \ulcorner \mathrm{SBK} \urcorner)$.
5. $\exists^{<n} a,b,i\ (n = \mathrm{Con}([\mathrm{IN}(\dot{\forall}), i, \mathrm{Con}(a,b)], \mathrm{Con}(a, [\mathrm{IN}(\dot{\forall}), i, b])) \wedge (i,a) \notin \ulcorner \mathrm{SB} \urcorner)$.
6. $\exists^{<n} i\ \ (i \in \ulcorner \mathcal{V} \urcorner \wedge n = [\mathrm{IN}(\doteq), i, i])$.
7. $\exists^{<n} i,k\ \ (i,k \in \ulcorner \mathcal{V} \urcorner \wedge n = \mathrm{Con}\left([\mathrm{IN}(\doteq), i, k], [\mathrm{IN}(\doteq), k, i]\right))$.
8. $$\exists^{<n} i,j,k\ (i,j,k \in \ulcorner \mathcal{V} \urcorner \wedge \\ n = \mathrm{Con}(\mathrm{Neg}(\mathrm{Con}([\mathrm{IN}(\doteq), i, j], \mathrm{Neg}([\mathrm{IN}(\doteq), j, k]))), [\mathrm{IN}(\doteq), i, k])).$$
9. (5.14.12)(a) ile $$\exists^{<n} i,c,d,a\ (i \in \ulcorner \mathcal{V} \urcorner \wedge c,d \in \ulcorner \mathrm{Tm} \urcorner \wedge a \in \ulcorner \mathrm{Fm} \urcorner \wedge \\ n = \mathrm{Con}([\mathrm{IN}(\doteq), c, d], \mathrm{Con}(\mathrm{Subs}(c,i,a), \mathrm{Subs}(d,i,a)))).$$

■

$\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramının biçimsel kanıtları, $\varphi_i \in \operatorname{Fm} L$ olmak üzere belli koşulları sağlayan $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ formül dizileridirler. $(\varphi_0, \ldots, \varphi_n) = k$ formül dizisine

$$\ulcorner k \urcorner = \ulcorner \varphi_0, \ldots, \varphi_n \urcorner := [\ulcorner \varphi_0 \urcorner, \ldots, \ulcorner \varphi_n \urcorner]$$

Gödel sayısını karşılık getireceğiz. Formül dizilerinin Gödel sayıları kelimelerin Gödel sayılarından farklıdır. Ayrıca farklı formül dizilerinin Gödel sayıları da farklı olduğu gibi verilen bir doğal sayının bir formül dizisinin Gödel sayısı olup olmadığı belirlenebilir; eğer m bir formül dizisinin Gödel sayısı ise bu sayıdan bu formül dizisi kazanılabilir. Bir $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ formülünün $\mathcal{K}$ kuramındaki kanıtlarının kümesini daha önce $\mathcal{K}(\varphi)$ ile göstermiştik. $\varphi \notin \operatorname{Bc} \mathcal{K}$ ise elbette $\mathcal{K}(\varphi) = \emptyset$ olur.

Tanım 5.14.19 $\operatorname{Kan} \mathcal{K} = \operatorname{Kan} \Gamma$ *ile* $\mathcal{K}$ *kuramının biçimsel kanıtlarının kümesini gösterelim ve* $\operatorname{Bew} \Gamma := \{(\ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner k \urcorner) \mid \varphi \in \operatorname{Fm},\ k \in \mathcal{K}(\varphi)\}$ *olsun.*

Teorem 5.14.20 *L dilimiz ve* Γ *öz aksiyomlarımız (basit) yinelgense (veya yarı yinelgense)* $\operatorname{Kan} \Gamma$ *ve* $\operatorname{Bew} \Gamma$ *da (basit) yinelgendir (veya yarı yinelgendir).*

Kanıt. Sav aşağıdaki denklikler ve (5.12.4)'ten çıkar:

$$\begin{aligned} n \in \ulcorner \operatorname{Kan} \Gamma \urcorner \iff & \\ & \forall^{<\operatorname{lh}(n)} i\ ([n]_i \in \ulcorner \operatorname{Fm} \urcorner) \wedge \\ & (\forall^{<\operatorname{lh}(n)} k\ ([n]_k \in \ulcorner \Lambda_m \urcorner \cup \ulcorner \Gamma \urcorner\ \vee\ \exists^{<k} i\ \operatorname{Gen}([n]_i, [n]_k) \vee \\ & \exists^{<k} i, j\ \operatorname{MP}([n]_i, [n]_j, [n]_k))) \end{aligned}$$

ve

$$(m, n) \in \operatorname{Bew} \Gamma \iff m \in \ulcorner \operatorname{Fm} \urcorner \wedge n \in \ulcorner \operatorname{Kan} \Gamma \urcorner \wedge m = [n]_{\operatorname{lh}(n) \dot{-} 1}\,.$$

■

Herhangi bir $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramı (basit) yinelgen veya yarı yinelgen Σ ile aksiyomlaştırılabilirse (**basit**) **yinelgen** veya **yarı yinelgen aksiyomlaştırılabilir** diyelim.

Teorem 5.14.21 Γ *yarı yinelgense* $\operatorname{Bt} \Gamma$ *da yarı yinelgendir.*

Kanıt. $m \in \ulcorner \operatorname{Bt} \Gamma \urcorner \iff \exists n((m, n) \in \operatorname{Bew} \Gamma)$ olduğundan sav doğrudan (5.12.4) ve (5.14.20)'den çıkar. ■

Önerme 5.14.22 *Bir $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramı için aşağıdaki önermeler birbirine denktirler:*

1. $\mathrm{Bt}\,\Gamma$ *yarı yinelgendir.*
2. $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ *basit yinelgen aksiyomlaştırılabilir.*
3. $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ *yinelgen aksiyomlaştırılabilir.*

Kanıt. (1) $\Longrightarrow$ (2): $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ basit yinelgen ve $f(\mathbb{N}) := \ulcorner \mathrm{Bt}\,\Gamma \urcorner$ olsun. Gödel sayısı $f(n)$ olan formülü φ_n ile gösterelim; böylece $\ulcorner \varphi_n \urcorner = f(n)$ olur. Şimdi tümevarımla $\psi_0 := \varphi_0$ ve $\psi_{n+1} := \psi_n \curlywedge \varphi_{n+1}$ formüllerini tanımlayalım. $\Sigma := \{\psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ olsun. $\mathrm{Bt}\,\Gamma = \mathrm{Bt}\,\Sigma$ olduğu açıktır. $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dönüşümü $g(n) := \ulcorner \psi_n \urcorner$ olarak tanımlansın. Tanım gereği $\psi_n \curlywedge \varphi_{n+1}$ formülünün $\urcorner(\psi_n \to \urcorner\varphi_{n+1})$ olduğunu anımsarsak

$$\begin{aligned} g(0) &= 0 \\ g(n+1) &= \mathrm{Neg}(\mathrm{Con}(g(n), \mathrm{Neg}(f(n+1)))) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla g fonksiyonu $h(y, z) = \mathrm{Neg}(\mathrm{Con}(z, \mathrm{Neg}\, f(\mathrm{S}(y))))$ basit yinelgen fonksiyonundan yineleme ile elde edildiğinden basit yinelgendir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $n < \ulcorner \psi_n \urcorner$ olduğundan

$$m \in \ulcorner \Sigma \urcorner \Longleftrightarrow \exists^{<m} n \ (m = \ulcorner \psi_n \urcorner) \Longleftrightarrow \exists^{<m} n \ (m = g(n))$$

olduğundan $\ulcorner \Sigma \urcorner$ basit yinelgendir.

(2) $\Longrightarrow$ (3): Aşikâr.

(3) $\Longrightarrow$ (1): (5.14.21)+"$\mathrm{Fm}^0 = \mathrm{Sav}$ basit yinelgendir". ■

Teorem 5.14.23 Γ *yinelgen ve tamsa* $\mathrm{Bt}\,\Gamma$ *da yinelgendir.*

Kanıt. Γ tutarsızsa $\mathrm{Bt}\,\Gamma = \mathrm{Sav} = \mathrm{Fm}^0$ olduğundan sav (5.14.10)'dan çıkar. Diğer durumda (5.14.22)'den $\mathrm{Bt}\,\Gamma$ yarı yinelgendir. (5.12.6)'dan dolayı $\mathbb{N} \backslash \ulcorner \mathrm{Bt}\,\Gamma \urcorner$'nın da yarı yinelgen olduğunu görmek yeterlidir. Γ yinelgen olduğundan $\ulcorner \mathrm{Fm}^0 \urcorner$ yinelgen, dolayısıyla bunun tümleyeni de yarı yinelgendir. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$n \notin \ulcorner \mathrm{Bt}\,\Gamma \urcorner \Longleftrightarrow n \notin \ulcorner \overset{0}{\mathrm{F}}\mathrm{m} \urcorner \vee [\mathrm{IN}(\urcorner), n] \in \ulcorner \mathrm{Bt} \urcorner$$

olduğundan $\mathbb{N} \backslash \ulcorner \mathrm{Bt}\,\Gamma \urcorner$ de yarı yinelgendir. ■

- **(DK)(Dil Koşulu):** L (basit) yinelgen dilimiz $\mathbf{0}$ ve $\mathbf{S}$ imlerini içersin ve $\mathfrak{A} \in \mathrm{Yap}\, L$ ise $|\mathfrak{A}| = \mathbb{N}$ olan bir yapı olduğunda $\mathbf{0}^{\mathfrak{A}} := 0$ ve $\mathbf{S}^{\mathfrak{A}} := \mathrm{S}$ olarak yorumlansın. $\underline{0} := \mathbf{0}$ ve $\underline{n+1} := \mathbf{S}\underline{n}$ olarak açıklansın. $\underline{n}$ terimlerine yine L dilinin sayısalları diyeceğiz.

Tanım 5.14.24 *(DK) durumunda olalım.*

1. $\mathrm{Num} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *fonksiyonu* $\mathrm{Num}(n) := \ulcorner \underline{n} \urcorner$ *olsun.*
2. $n \in \mathrm{Nu} :\Longleftrightarrow n$ *bir sayısalın Gödel sayısıdır.*
3. $\mathrm{s} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *fonksiyonu* $\mathrm{s}(m,n) := \mathrm{Subs}(\ulcorner \underline{n} \urcorner, \ulcorner v_1 \urcorner, m)$ *olsun.*

Bu durumda

$$\mathrm{s}\left(\ulcorner \varphi \urcorner, n\right) := \ulcorner \varphi\left(v_1 | \underline{n}\right) \urcorner = \ulcorner \varphi(\underline{n}) \urcorner$$

olduğu apaçıktır.

Önerme 5.14.25 *(DK) durumunda* Num, Nu *ve* s *(basit) yinelgendirler.*

Kanıt. 1) $\mathrm{Num}(0) = 2^3$ ve $\mathrm{Num}(n+1) = \ulcorner \underline{n+1} \urcorner = \ulcorner \mathbf{S}\underline{n} \urcorner = 2^6 * 2^{\mathrm{Num}(n)}$. Basit yinelgen fonksiyonlardan yinelemeyle elde edildiğinden Num basit yinelgendir.
2) $x \in \mathrm{Nu} \Longleftrightarrow \exists^{<x} y \, (x = \mathrm{Num}(y))$ olduğundan sav aşikârdır.
3) $\mathrm{s}(m,n) = \mathrm{Subs}(\mathrm{Num}(n), 2^5, m)$ olduğundan sav (5.14.12) ve önermemizin birinci kısmından çıkar. ■

Önerme 5.14.26 *(DK) durumunda isek (5.7.5) ve (5.7.11)'de tanımlanan K ve $K_\neg$ bağıntıları (basit) yinelgendirler.*

Kanıt. Her $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ için $Q(m,n) := m \in \ulcorner \mathrm{Fm}^1 \urcorner \wedge n \in \ulcorner \mathrm{Kan}\, \Gamma \urcorner$ olmak üzere:

$$(m,n) \in K \Longleftrightarrow Q(m,n) \wedge [n]_{\mathrm{lh}(n) \dot{-} 1} = \mathrm{s}(m,m),$$
$$(m,n) \in K_\neg \Longleftrightarrow Q(m,n) \wedge [n]_{\mathrm{lh}(n) \dot{-} 1} = \mathrm{s}\left(\mathrm{Neg}(m), m\right).$$

■

Not 5.14.27 Cantor köşegen yönteminin mantığı bize şunu verir: $f : X \to Y$ herhangi bir fonksiyon ve $Z := \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ ise $Z \notin f(X)$. Gerçekten de, bir $x_0 \in X$ ile $Z = f(x_0)$ olduğunu varsayarsak $x_0 \in f(x_0) \Longleftrightarrow x_0 \in Z \Longleftrightarrow x_0 \notin f(x_0)$ çelişkisine ulaşırız. ▲

Teorem 5.14.28 (Tarski) *(DK) durumunda olalım, dd. L basit yinelgen bir dil, $\mathbf{0}$ ve $\mathbf{S}$ dilimizde olsun. $\mathfrak{A} \in \mathrm{Yap}\, L$, $|\mathfrak{A}| = \mathbb{N}$, $\mathbf{0}^{\mathfrak{A}} = 0$ ve $\mathbf{S}^{\mathfrak{A}} = \mathrm{S}$ olsun. Ayrıca her basit yinelgen bağıntı $\mathfrak{A}$-tanımlanabilir olsun. Bu koşullarda $\ulcorner \mathrm{Th}\, \mathfrak{A} \urcorner$ bağıntısı $\mathfrak{A}$-tanımlanamaz ve dolayısıyla $\mathrm{Th}\, \mathfrak{A}$ yinelgen aksiyomlaştırılamaz.*

Kanıt. $\mathcal{A} := \{R_\varphi \mid \varphi \in \mathrm{Fm}^1\}$ ailesi $\mathfrak{A}$-tanımlanabilir $A \subseteq \mathbb{N}$ bağıntılarının ailesidir; burada $R_\varphi = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{A} \models \varphi[n]\}$ olduğunu anımsatalım. $f : {}^\ulcorner\mathrm{Fm}^{1\urcorner} \to \mathcal{A}$ fonksiyonu $f({}^\ulcorner\varphi^\urcorner) := R_\varphi$ olarak tanımlansın. Bu durumda $Q := \{n \in {}^\ulcorner\mathrm{Fm}^{1\urcorner} \mid n \notin f(n)\}$ olarak tanımlarsak her $\varphi \in \mathrm{Fm}^1$ için $Q \neq R_\varphi$ olduğundan Q bağıntısı $\mathfrak{A}$-tanımlanamaz.

Şimdi ${}^\ulcorner\mathrm{Th}\,\mathfrak{A}^\urcorner$ bağıntısının $\mathfrak{A}$-tanımlanabilir olduğunu varsayalım. Bu durumda bir $\delta \in \mathrm{Fm}^1$ ile ${}^\ulcorner\mathrm{Th}\,\mathfrak{A}^\urcorner = R_\delta$ olacaktır. 2-yerli P bağıntısı $(a,b) \in P :\Longleftrightarrow a \in {}^\ulcorner\mathrm{Fm}^{1\urcorner} \wedge \mathrm{s}(a,a) = b$ ile tanımlansın. P bağıntısı basit yinelgen olduğundan $\mathfrak{A}$-tanımlanabilir, dd. bir $\psi \in \mathrm{Fm}^2$ formülü her $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ için $\mathfrak{A} \models \psi[a,b] \Longleftrightarrow a \in {}^\ulcorner\mathrm{Fm}^{1\urcorner} \wedge \mathrm{s}(a,a) = b$ olacak biçimde vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned} a \in Q &\Longleftrightarrow a \in {}^\ulcorner\mathrm{Fm}^{1\urcorner} \wedge a \notin f(a) \\ &\Longleftrightarrow a \in {}^\ulcorner\mathrm{Fm}^{1\urcorner} \wedge \mathrm{s}(a,a) \notin {}^\ulcorner\mathrm{Th}\,\mathfrak{A}^\urcorner \\ &\Longleftrightarrow \exists b \in \mathbb{N}(\mathfrak{A} \models \psi[a,b] \wedge b \notin {}^\ulcorner\mathrm{Th}\,\mathfrak{A}^\urcorner) \\ &\Longleftrightarrow \exists b \in \mathbb{N}(\mathfrak{A} \models \psi[a,b] \wedge \mathfrak{A} \models \neg\delta[b] \\ &\Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \eta\,[a]\,, \quad \eta(v_1) := \dot{\exists} y(\psi(v_1, y) \curlywedge \neg\delta(y)) \end{aligned}$$

olur. $\eta \in \mathrm{Fm}^1$ olduğundan Q bağıntısı $\mathfrak{A}$-tanımlanabilir olur; bu daha önce kanıtlananla çelişir. Varsayım yanlıştır, ${}^\ulcorner\mathrm{Th}\,\mathfrak{A}^\urcorner$ bağıntısı $\mathfrak{A}$-tanımlanamaz; dolayısıyla yarı yinelgen değildir. Öyleyse $\mathrm{Th}\,\mathfrak{A}$ yinelgen aksiyomlaştırılamaz. ■

5.15 Temsil Edilebilirlik

Bu kesimde de tüm formüllerimiz düzgün olacaklardır ve kolay izlenebilirlik açısından yine formülleri daha önceki gibi iç yazılımla yazacağız.

Daha önce "Gödel Teoremleri'ne Sezgisel Yaklaşım" başlıklı kesimde (5.6), dili L_a olan $\mathcal{K}$ kuramlarında temsil edilebilir fonksiyon ve bağıntıları tanımlamıştık. Bu kesimde bu kavramları (DK) dil koşulunu sağlayan dillere genişleteceğiz.

Bu kesimde—ayrıca belirtmesek de—(DK) dil koşulunun sağlandığını varsayacağız. $\mathrm{Fm}^n L$ yerine Fm^n yazalım.

Tanım 5.15.1 *$\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ olsun.*

1. *Bir $R \subseteq \mathbb{N}^n$ bağıntısına bir $\varphi \in \mathrm{Fm}^n$ formülü her $a_1, \ldots, a_n$ doğal sayıları için*

$$\begin{array}{ll} RI & (a_1, \ldots, a_n) \in R \Longrightarrow \Gamma \vdash \varphi(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}) \\ RII & (a_1, \ldots, a_n) \notin R \Longrightarrow \Gamma \vdash \neg\varphi(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}) \end{array}$$

*olacak biçimde bulunabiliyorsa Γ- (veya $\mathcal{K}$-) **temsil edilebilir** ve φ formülü R bağıntısını Γ- (veya $\mathcal{K}$-) **temsil eder** diyelim.*

2. *$f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ olsun. Bir $\varphi \in \mathrm{Fm}^{n+1}$ formülü ile her $a_1, \ldots, a_n$ doğal sayıları için $f(a_1, \ldots a_n) = b$ olmak üzere*

$$\Gamma \vdash \quad \varphi(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}, v_{n+1}) \longleftrightarrow v_{n+1} \doteq \underline{b} \tag{5.89}$$

*sağlanmışsa f fonksiyonu Γ- (veya $\mathcal{K}$-) **temsil edilebilir** ve φ formülü f fonksiyonu Γ-(veya $\mathcal{K}$-) **temsil eder** diyelim.*

3. *Eğer $R \subseteq \mathbb{N}^n$, $\varphi \in \mathrm{Fm}^n$ ve $\forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ için*

$$(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n \Longleftrightarrow \Gamma \vdash \varphi(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n})$$

*ise R bağıntısı $\mathcal{K}$- (veya Γ-) **zayıf temsil edilebilir** ve φ formülü R bağıntısını $\mathcal{K}$'de **zayıf temsil eder** diyelim.*

Not 5.15.2 (a) (5.89)'un söylediği şudur: Her $a_1, \ldots, a_n$ doğal sayıları için $f(a_1, \ldots a_n) = b$ olmak üzere

$$\Gamma \vdash \varphi(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}, \underline{b}) \curlywedge (\varphi(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}, v_{n+1}) \to v_{n+1} \doteq \underline{b})$$

olarak veya

$$\begin{array}{ll} FI & f(n_1, \ldots, n_k) = m \Longrightarrow \mathcal{K} \vdash \psi(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k}, \underline{m}) \\ FII & \mathcal{K} \vdash \dot{\exists}! y \psi(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k}, y). \end{array}$$

olarak da dile getirilebilir.

(b) (5.6.15) ve onun öncesindeki irdelemeler burada da geçerlidir.

(c) $\mathfrak{A} \in \mathrm{Yap}\, L$ ve $|\mathfrak{A}| := \mathbb{N}$, ayrıca $\mathbf{S}^{\mathfrak{A}} = \mathrm{S}$ ve $\mathbf{0}^{\mathfrak{A}} = 0$ olsun. $\varphi \in \mathrm{Fm}^n$ formülü $R \subseteq \mathbb{N}^n$ bağıntısını $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramında temsil etsin. Eğer ayrıca $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}\, \Gamma$ ise φ formülü R bağıntısını $\mathfrak{A}$-tanımlar. Gerçekten de $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}\, \Gamma$ olduğundan

$$\begin{array}{l} (a_1, \ldots, a_n) \in R \Longrightarrow \Gamma \vdash \varphi(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}) \Longrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}), \\ (a_1, \ldots, a_n) \notin R \Longrightarrow \Gamma \vdash \neg\varphi(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}) \Longrightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}). \end{array}$$

▲

Teorem 5.15.3 (Sabit Nokta Teoremi) *Tüm (basit) yinelgen fonksiyonlar Γ-temsil edilebilirse her $\varphi \in \mathrm{Fm}^1$ formülüne karşılık bir $\sigma_\varphi \in \mathrm{Sav}$ savı*

$$\Gamma \vdash (\sigma_\varphi \longleftrightarrow \varphi(\underline{\ulcorner \varphi \urcorner}))$$

olacak biçimde bulunabilir.

Kanıt. $\varphi \in \mathrm{Fm}^1$ keyfi verilsin. $\varphi \in \mathrm{Sav}$ ise $\varphi = \varphi(\ulcorner\varphi\urcorner)$ olacağından $\sigma_\varphi := \varphi$ alınır. Şimdi $\varphi \in \Phi^1_s$ olsun. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu her $a \in \mathbb{N}$ için $f(a) := \mathrm{s}(a, a)$ ile tanımlansın. f fonksiyonu (basit) yinelgen olduğundan bir $\psi \in \mathrm{Fm}^2$ ile Γ-temsil edilebilir. $\eta(x) := \dot{\exists} y(\psi(x, y) \curlywedge \varphi(y))$ olsun. Bu durumda her $a \in \mathbb{N}$ için

$$\Gamma \vdash (\eta(\underline{a}) \longleftrightarrow \varphi(\underline{\mathrm{s}(a, a)})) \tag{5.90}$$

olur. $k := \ulcorner\eta\urcorner$ için $\sigma_\varphi := \eta(\underline{k})$ alırsak $\mathrm{s}(k, k) = \ulcorner\eta(\underline{k})\urcorner = \ulcorner\sigma_\varphi\urcorner$ olur. Bu ve (5.90)'dan $\Gamma \vdash (\sigma_\varphi \longleftrightarrow \varphi(\underline{\ulcorner\varphi\urcorner}))$ elde ederiz. ■

Teorem 5.15.4 *$\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ tutarlı ve her yinelgen fonksiyon Γ-temsil edilebilirse $\mathrm{Bt}\,\Gamma$ yinelgen değildir, dd. $\mathrm{Bt}\,\Gamma$ belirlenemez.*

Kanıt. $T := \mathrm{Bt}\,\Gamma$'nın yinelgen olduğunu varsayalım. $\ulcorner T\urcorner$ bir $\varphi \in \mathrm{Fm}^1$ ile Γ-temsil edilebilir. $\psi := \neg\varphi$ olsun. Sabit Nokta Teoremi'nden dolayı bir σ_ψ savı $\Gamma \vdash \sigma_\psi \longleftrightarrow \psi(\underline{\ulcorner\sigma_\psi\urcorner})$, dolayısıyla

$$\Gamma \vdash \sigma_\psi \longleftrightarrow \neg\varphi(\underline{\ulcorner\sigma_\psi\urcorner}) \tag{5.91}$$

olacak biçimde vardır.

(a) $\Gamma \vdash \sigma_\psi$ varsayalım. (5.91)'den $\Gamma \vdash \neg\varphi(\underline{\ulcorner\sigma_\psi\urcorner})$ olur. $\mathcal{K}$ tutarlı olduğundan $\Gamma \nvdash \varphi(\underline{\ulcorner\sigma_\psi\urcorner})$ olur. Buradan, φ formülünün $\ulcorner T\urcorner$'yi Γ-temsil ettiğini düşünürsek $\underline{\ulcorner\sigma_\psi\urcorner} \notin \ulcorner T\urcorner$, dolayısıyla $\Gamma \nvdash \sigma_\psi$ olur. Bu, varsayımla çelişir.

(b) $\Gamma \vdash \neg\sigma_\psi$ varsayalım. $\mathcal{K}$ tutarlı olduğundan $\Gamma \nvdash \sigma_\psi$ ve dolayısıyla $\ulcorner\sigma_\psi\urcorner \notin \ulcorner T\urcorner$. Buradan, φ'nin $\ulcorner T\urcorner$'yi Γ-temsil ettiğini düşünürsek, $\Gamma \vdash \neg\varphi(\underline{\ulcorner\sigma_\psi\urcorner})$ ve ardından da (5.91) ile $\Gamma \vdash \sigma_\psi$ elde eder bir çelişkiye ulaşırız.

(a) ve (b) ile sav kanıtlanmış olur. ■

Teorem 5.15.5 (Birinci Gödel Eksiklik Teoremi) *Eğer tutarlı ve yinelgen aksiyomlaştırılmış $\mathcal{K}$ kuramında her yinelgen fonksiyon temsil edilebilirse $\mathcal{K}$ kuramı tam değildir, dd. eksiktir.*

Kanıt. (5.14.23) ve (5.15.4). ■

$\mathcal{K}_{ra}$ kuramında $x \prec y$ yerine $\prec(x, y)$ yazarsak bu L_{ra} dilinin iki yerli bir formülüdür. Aşağıdaki tanımda bunun yerine bir $\kappa \in \mathrm{Fm}\,L$ alacağız ve okur Z3'te Sr1, Sr2 ve Sr3'ü bulur.

Tanım 5.15.6 *Aşağıdakiler sağlandığında $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramı **yeterince güçlüdür** diyelim. Her $m, n \in \mathbb{N}$ için*

Z1 $\Gamma \vdash \neg(\mathbf{S}\underline{n} \doteq \mathbf{0})$
$\Gamma \vdash \mathbf{S}\underline{m} \doteq \mathbf{S}\underline{n} \to \underline{m} \doteq \underline{n}$
Z2 $+$ *ve* $\cdot$ *fonksiyonları* Γ*-temsil edilebilirler.*
Z3 *Aşağıdakileri sağlayan bir* $\kappa \in \mathrm{Fm}^2$ *vardır:*
(a) $\Gamma \vdash \dot{\forall} x \neg \kappa(x, \mathbf{0})$,
(b) $\Gamma \vdash \dot{\forall} x(\kappa(x, \mathbf{S}\underline{n}) \longleftrightarrow x \doteq \underline{n} \curlyvee \kappa(x, \underline{n}))$,
(c) $\Gamma \vdash \dot{\forall} x(x \doteq \underline{n} \curlyvee \kappa(x, \underline{n}) \curlyvee \kappa(\underline{n}, x))$.

Önerme 5.15.7 $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ *kuramı yeterince güçlüyse aşağıdakiler geçerlidir: Her* $a, b, k \in \mathbb{N}$ *ve* $\varphi \in \mathrm{Fm}$ *için*

(a) $a < b \Longrightarrow \Gamma \vdash \neg(\underline{a} \doteq \underline{b})$,

(b) $a \leq b \Longrightarrow \Gamma \vdash \neg\kappa(\underline{b}, \underline{a})$,

(c) $a < b \Longrightarrow \Gamma \vdash \kappa(\underline{a}, \underline{b})$,

(d) Her $k \geq 1$ *için* $\Gamma \vdash \varphi(x|\mathbf{0}) \curlywedge \cdots \curlywedge \varphi(x|\underline{k-1}) \curlywedge \kappa(x, \underline{k}) \to \varphi$.

Kanıt. (a) Kan it için a üzerinden tümevarım uygulayacağız. $b = m + 1$ olsun. $a = 0$ ise

$$Z1 \Longrightarrow \Gamma \vdash \neg(\mathbf{0} \doteq \mathbf{S}\underline{m}) \Longrightarrow \Gamma \vdash \neg(\underline{0} \doteq \underline{b}).$$

Şimdi $a = k + 1$ ve sav k için kanıtlanmış olsun. $k < m \overset{tvk}{\Longrightarrow} \Gamma \vdash \neg(\underline{k} \doteq \underline{m})$. Z1'den karşı konum ile $\Gamma \vdash \neg(\underline{k} \doteq \underline{m}) \to \neg(\mathbf{S}\underline{k} \doteq \mathbf{S}\underline{m})$. Son iki çıkarımdan modus ponens ile $\Gamma \vdash \neg(\mathbf{S}\underline{k} \doteq \mathbf{S}\underline{m})$, dd. $\Gamma \vdash \neg(\mathbf{S}\underline{a} \doteq \mathbf{S}\underline{b})$.

(b) Yine a üzerinden tümevarım uygulayacağız. $a = 0$ olsun. Z3(a)'da özelleştirme ile $\Gamma \vdash \neg\kappa(\underline{b} \doteq \underline{a})$. Şimdi $a = k + 1$ ve sav k için kanıtlanmış olsun. Tümevarım koşulu ve önermenin (a) şıkkından $\Gamma \vdash \neg\kappa(\underline{b}, \underline{k}) \curlywedge \neg(\underline{b} \doteq \underline{k})$ olur. Bu ve Z3(b)'den $\Gamma \vdash \neg\kappa(\underline{b}, \mathbf{S}\underline{k})$ yani $\Gamma \vdash \neg\kappa(\underline{b}, \underline{a})$.

(c) $a < b$ olsun. (a) ve (b) ile $\Gamma \vdash \neg(\underline{a} \doteq \underline{b}) \curlywedge \neg\kappa(\underline{b}, \underline{a})$. Bu ve Z3(c)'den $\Gamma \vdash \kappa(\underline{a}, \underline{b})$.

(d) k üzeriden tümevarım uygulayacağız. $k = 0$ olsun. $\underline{0} = \mathbf{0}$ olduğundan savımız $\Gamma \vdash \kappa(x, \mathbf{0}) \to \varphi$ şeklini alır. Bu ise $\neg p \to (p \to q)$ hepdoğrusu ve Z3(a)'dan elde ettiğimiz $\Gamma \vdash \neg\kappa(x, \mathbf{0})$ çıkarımından (MP) ile elde edilir. Şimdi $k = m + 1$ ve sav m için kanıtlanmış olsun. Bu durumda

$\Gamma \vdash \varphi(x\|\mathbf{0}) \curlywedge \cdots \curlywedge \varphi(x\|\underline{m-1}) \curlywedge \kappa(x, \underline{m}) \to \varphi$	tvk
$\Gamma \vdash \kappa(x, \underline{m+1}) \to \kappa(x, \underline{m}) \curlyvee x \doteq \underline{m}$	Z3(b)
$\Gamma \vdash \varphi(x\|\underline{m}) \curlywedge x \doteq \underline{m} \to \varphi$	eşitlik ilksavı

ve bunlardan $\Gamma \vdash \varphi(x|\mathbf{0}) \curlywedge \cdots \curlywedge \varphi(x|\underline{m}) \curlywedge \kappa(x, \underline{m+1}) \to \varphi$ olur. ■

Sonuç 5.15.8 *Her* $a, b, k \in \mathbb{N}$ *ve* $\varphi \in \mathrm{Fm}\, L_{ra}$ *için*

(a) $a < b \Longrightarrow \Gamma_{ra} \vdash \neg(\underline{a} \doteq \underline{b})$,

(b) $a \leq b \Longrightarrow \Gamma_{ra} \vdash \neg(\underline{b} \prec \underline{a})$,

(c) $a < b \Longrightarrow \Gamma_{ra} \vdash \underline{a} \prec \underline{b}$,

(d) $\Gamma_{ra} \vdash \varphi(x|\mathbf{0}) \curlywedge \cdots \curlywedge \varphi(x|\underline{k-1}) \curlywedge x \prec \underline{k} \to \varphi$.

Kanıt. (5.15.7)'nin kanıtında yalnızca Z1 ve Z3 kullanılmıştır. (5.15.6)'da $\mathcal{K}_{ra} = (L_{ra}, \Lambda_{ra})$ alırsak Z1 ve Z3 sağlanır çünkü $\vdash$ iminin sağında hep Λ_{ra}'ya ait ilksavlar vardır. ■

Lemma 5.15.9 *$t(v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{Tm}$, $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ ve her $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}^n$ için*

$$\Gamma \vdash t(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}) \doteq \underline{f(a_1, \ldots, a_n)} \tag{5.92}$$

ise $v_{n+1} \doteq t(v_1, \ldots, v_n)$ formülü f fonksiyonunu Γ-temsil eder.

Kanıt. φ ile $v_{n+1} \doteq t(v_1, \ldots, v_n)$ formülünü gösterelim. $\varphi(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}, v_{n+1})$ formülü $v_{n+1} \doteq t(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n})$ formülüdür. Diğer yandan (5.92)'den ve eşitlik ilksavlarından

$$\Gamma \vdash v_{n+1} \doteq t(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}) \longleftrightarrow v_{n+1} \doteq \underline{f(a_1, \ldots, a_n)}$$

olur, dd. $\Gamma \vdash \varphi(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}, v_{n+1}) \longleftrightarrow v_{n+1} \doteq \underline{f(a_1, \ldots, a_n)}$ ve bkb. ■

Not 5.15.10 Yeterince güçlü $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramlarında (5.15.7)'nin bir sonucu olarak

$$\forall a, b \in \mathbb{N}\ (a \neq b \Longrightarrow \Gamma \vdash \neg(\underline{a} \doteq \underline{b})) \tag{5.93}$$

olur. Özellikle $\Gamma \vdash \neg(\mathbf{0} \doteq \mathbf{1})$ olduğundan (5.6.15) ile R bağıntısının Γ-temsil edilebilir olması χ_R özgün fonksiyonunun Γ-temsil edilebilir olmasına denktir. Orada olduğu gibi R bağıntısı $\varphi \in \mathrm{Fm}^n$ ile Γ-temsil edilmişse χ_R fonksiyonu

$$\psi(\overline{v_k}, v_{n+1}) := (\varphi(\overline{v_k}) \curlywedge v_{n+1} \doteq \mathbf{1}) \curlyvee (\neg\varphi(\overline{v_k}) \curlywedge v_{n+1} \doteq \mathbf{0})$$

formülü ile Γ-temsil edilir. ▲

Lemma 5.15.11 *Her yeterince güçlü kuramda $=$ bağıntısı $\doteq$ bağıntısı ile ve $\chi_<$ fonksiyonu ise $(\kappa(v_1, v_2) \curlywedge v_3 \doteq \mathbf{1}) \curlyvee (\neg\kappa(v_1, v_2) \curlywedge v_3 \doteq \mathbf{0})$ formülü ile temsil edilebilirler.*

Kanıt. $a, b \in \mathbb{N}$ keyfi verilsinler. $v_1 \doteq v_2$ formülünün $x = y$ bağıntısını temsil ettiğini savunuyoruz. Eğer $a = b$ ise $\underline{a}$ ve $\underline{b}$ özdeş terimler olduğundan $x \doteq x$ özdeşlik ilksavından yerine koymalarla $\Gamma \vdash \underline{a} \doteq \underline{b}$ olur. Şimdi $a \neq b$ olsun. (5.93) ile $\Gamma \vdash \neg(\underline{a} \doteq \underline{b})$.

Savımızdaki formülü $\varphi(v_1, v_2, v_3)$ ile gösterelim. $\chi_<(a_1, a_2) = 1$ olsun. Bu durumda $a_1 < a_2$ ve buradan (5.15.7) ile $\Gamma \vdash \kappa(\underline{a_1}, \underline{a_2})$. Buradan ise $\Gamma \vdash \varphi(\underline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{1})$.

Şimdi $\chi_<(a_1, a_2) = 0$ olsun. Öyleyse $a_2 \leq a_1$ ve (5.15.7)'yi kullanarak $\Gamma \vdash \neg\kappa(\underline{a_1}, \underline{a_2})$. Buradan ise $\Gamma \vdash \varphi(\underline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{0})$. ■

Teorem 5.15.12 *$\mathcal{K}_{ra} = (L_{ra}, \Lambda_{ra})$ kuramı yeterince güçlüdür; dolayısıyla $\mathcal{K}_{ra} \leq \mathcal{K}$ ise, özellikle $\mathcal{K}_a$ kuramı yeterince güçlüdür.*

Kanıt. L_{ra} (DK)'yı sağlar ve $\kappa(v_1, v_2)$ olarak $v_1 \prec v_2$ bağıntısını alırsak Z1 veZ3 koşulları Λ_{ra}'nın aksiyomlarıdır. Geriye $+$ ve $\cdot$ fonksiyonlarının Λ_{ra}-temsil edilebilir olduklarını göstermek kalıyor. (5.15.9)'dan yararlanacağız.

$f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ fonksiyonu $f(x, y) = x + y$ ve $t \in \operatorname{Tm} L_{ra}$ terimi $t(v_1, v_2) := v_1 \dot{+} v_2$ olsun. Her $m, n \in \mathbb{N}$ için $\Lambda_{ra} \vdash t(\underline{m}, \underline{n}) \doteq \underline{m + n}$ olduğunu, dd. $\Lambda_{ra} \vdash \underline{m} \dot{+} \underline{n} \doteq \underline{m + n}$ olduğunu kanıtlarsak $v_3 \doteq t(v_1, t_2)$, dd. $v_3 \doteq v_1 \dot{+} v_2$ formülü f fonksiyonunu Λ_{ra}-temsil eder. Bunu n üzerinden tümevarımla kanıtlayacağız.

$n = 0$ için $(+0)$ ilksavından özelleştirmeyle $\Lambda_{ra} \vdash \underline{m} \dot{+} \mathbf{0} \doteq \underline{m}$ elde edilir. Bu ise $\Lambda_{ra} \vdash \underline{m} \dot{+} \underline{0} \doteq \underline{m + 0}$ demektir.

Sav n için kanıtlanmış olsun. $(+S)$ ilksavından özelleştirmeyle $\Lambda_{ra} \vdash \underline{m} \dot{+} \mathbf{S}\underline{n} \doteq \mathbf{S}(\underline{m} \dot{+} \underline{n}) \overset{tvk}{\Longrightarrow} \Lambda_{ra} \vdash \underline{m} \dot{+} \mathbf{S}\underline{n} \doteq \mathbf{S}(\underline{m + n})$ olur. Tanım gereği $\mathbf{S}\underline{n} = \underline{n + 1}$ ve

$$\mathbf{S}(\underline{m + n}) = \underline{(m + n) + 1} = \underline{m + (n + 1)}$$

olduğundan sonuçta $\Lambda_{ra} \vdash \underline{m} \dot{+} \underline{n + 1} \doteq \underline{m + (n + 1)}$ olur. $(\bullet 0)$ ve $(\bullet S)$ yardımıyla benzer biçimde $v_3 \doteq v_1 \bullet v_2$ formülünün $\mathbb{N}$'deki çarpmayı Λ_{ra}-temsil ettiğini kanıtlamayı okura bırakıyoruz. ■

Bu kesimde (DK) dil koşulumuzun geçerli olduğunu anımsatalım.

Teorem 5.15.13 *$\mathcal{K} = (L, \Gamma)$, Γ (basit) yinelgen ve ayrıca her $a, b \in \mathbb{N}$ için*

$$\Gamma \vdash \underline{a} \doteq \underline{b} \Longrightarrow a = b \tag{5.94}$$

ise Γ-temsil edilebilen her f fonksiyonu yinelgendir.

Sonuç 5.15.14 *Yeterince güçlü (basit) yinelgen aksiyomlaştırılmış kuramlarda–özellikle $\mathcal{K}_{ra}$ ve $\mathcal{K}_a$ kuramlarında–temsil edilebilen fonksiyonlar yinelgendirler.*

Kanıt. $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ fonksiyonunu $\varphi \in \mathrm{Fm}^{n+1}$ formülü Γ-temsil etsin, dd. her $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{N}$ için

$$\Gamma \vdash (\varphi(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}, v_{n+1}) \longleftrightarrow v_{n+1} \doteq \underline{f(a_1, \ldots, a_n)})$$

olsun. Bir $P_\varphi \subseteq \mathbb{N}^{n+2}$ bağıntısı

$$(u_1, \ldots, u_{n+1}, y) \in P_\varphi :\Longleftrightarrow (\ulcorner \varphi(\underline{u_1}, \ldots, \underline{u_{n+1}}) \urcorner, y) \in \operatorname{Bew} \Gamma \qquad (5.95)$$

olarak açıklansın, dd. $(\overline{u_{n+1}}, y) \in P_\varphi \Longleftrightarrow y$ sayısı $\varphi(\underline{u_1}, \ldots, \underline{u_{n+1}})$ savının bir Γ-kanıtının Gödel sayısıdır.

$(\overline{u_{n+1}}, y) \in P_\varphi$ ise $f(\overline{u_n}) = u_{n+1}$ olduğunu görelim. P_φ'nin tanımdan $\Gamma \vdash \varphi(\underline{u_1}, \ldots, \underline{u_{n+1}})$ olur. Diğer yandan φ formülü f fonksiyonunu tanımladığından $f(\overline{u_n}) = r$ ise $\Gamma \vdash \underline{u_{n+1}} \doteq \underline{r}$. buradansa (5.94) ile $u_{n+1} = r$ olur.

$m = \ulcorner \varphi \urcorner$ ise $m_1 := \operatorname{Subs}(\ulcorner \underline{u_1} \urcorner, \ulcorner v_1 \urcorner, m)$ ve $1 \leq k \leq n$ için $m_{k+1} = \operatorname{Subs}(\ulcorner \underline{u_{k+1}} \urcorner, \ulcorner v_{k+1} \urcorner, m_k)$ olarak açıklanırsa, her bir m_k (basit) yinelgen olduğundan

$$m_{n+1}(u_1, \ldots, u_n) := \ulcorner \varphi(\underline{u_1}, \ldots, \underline{u_{n+1}}) \urcorner$$

fonksiyonu (basit) yinelgendir. Bu ve (5.95)'ten P_φ bağıntısı (basit) yinelgendir. Şimdi $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ keyfi verilsinler ve $f(a_1, \ldots, a_n) = b$ olsun. $\Gamma \vdash \varphi(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}, \underline{b})$ ve dolayısıyla $\varphi(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}, \underline{b})$'nin Γ-kanıtları vardır. k böyle bir kanıtın Gödel sayısı ise $(\overline{a_n}, b, k) \in P_\varphi$ olur. Böylece her $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$ için $(\overline{x_n}, [y]_0, [y]_1) \in P_\varphi$ olacak biçimde bir y bulunabilir ve yukarıda bu durumda $f(x_1, \ldots, x_n) = [y]_0$ olduğunu kanıtladık. Böylece

$$f(x_1, \ldots, x_n) = [\mu y P_\varphi(x_1, \ldots, x_n, [y]_0, [y]_1)]_0$$

ve f yinelgendir.

Yeterince güçlü (basit) yinelgen aksiyomlaştırılmış kuramlar—özellikle $\mathcal{K}_{ra} = (L_{ra}, \Lambda_{ra})$ ve $\mathcal{K}_a = (L_a, \Lambda_a)$ kuramları—(5.15.7)'den dolayı teoremin koşullarını sağlarlar. ■

Teorem 5.15.15 *Yinelgen fonksiyonlar yeterince güçlü kuramlarda temsil edilebilirler.*

Kanıt. $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ yeterince güçlü olsun.
1. Önce başlangıç fonksiyonlarının Γ-temsil edilebilir olduklarını (5.15.9) ile kolayca görürüz. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f(()) = n$ fonksiyonunun $v_1 \doteq \underline{n}$ formülüyle temsil edildiği apaçıktır. c_0^1 fonksiyonu $v_2 \doteq \mathbf{0}$, S fonksiyonu $v_2 \doteq \mathbf{S}v_1$ ve π_i^n fonksiyonu ise $v_{n+1} \doteq v_i$ formülü ile Γ-temsil edilirler. (5.15.11)'den dolayı $\chi_<$ fonksiyonu Γ-temsil edilebilir.
2. $h \in \mathbf{F}^m$ ve $g_1, \ldots, g_m \in \mathbf{F}^n$ fonksiyonları Γ-temsil edilebilir olsunlar. $f = h(g_1, \ldots, g_m) \in \mathbf{F}^n$ fonksiyonunun da temsil edilebilir olduğunu gösterelim. $g_i(v_1, \ldots, v_n)$ yerine $g_i(\mathbf{v})$ ve $g_i(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n})$ yerine $g(\underline{\mathbf{a}})$ yazalım. Herhangi bir $\theta \in \operatorname{Fm}^{n+1}$ içinse $\theta(\overline{v_n}, v_{n+1})$ yerine $\theta(\mathbf{v}, v_{n+1})$ ve $\theta(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}, \underline{b})$ yerine $\theta(\underline{\mathbf{a}}, \underline{b})$ gösterimlerini kullanalım. Verilen g_i'yi temsil eden $\varphi_i \in \operatorname{Fm}^{n+1}$ ve h fonksiyonunu temsil eden $\psi \in \operatorname{Fm}^{m+1}$ formüllerimiz vardır. Böylece

(i) $h(\overline{b_m}) = b \Longrightarrow \Gamma \vdash \psi(\underline{b_1}, \ldots, \underline{b_m}, \underline{b}) \curlywedge \dot{\forall} y(\psi(\underline{b_1}, \ldots, \underline{b_m}, y) \to y \doteq \underline{b})$,

(ii) $g_i(\mathbf{a}) = b_i \Longrightarrow \Gamma \vdash \varphi_i(\underline{\mathbf{a}}, \underline{b_i}) \curlywedge \dot{\forall} y(\varphi_i(\underline{\mathbf{a}}, y) \to y \doteq \underline{b_i}), i = 1, \ldots, m.$

Şimdi $\eta(\mathbf{v}, v_{n+1})$ ise aşağıdaki formül olsun:

$$\dot{\exists} y_1, \ldots, y_m(\psi(y_1, \ldots, y_m, v_{n+1}) \curlywedge \varphi_1(\mathbf{v}, y_1) \curlywedge \cdots \curlywedge \varphi_m(\mathbf{v}, y_m)).$$

η'nın f fonksiyonunu Γ-temsil ettiğini savunuyoruz.

$f(\mathbf{a}) = b$ olsun. $1 \leq i \leq m$ ve $b_i = g_i(\mathbf{a})$ ile $h(b_1, \ldots, b_m) = b$ olur. (i) ve (ii)'den $\Gamma \vdash \psi(\underline{b_1}, \ldots \underline{b_m}, \underline{b}) \curlywedge \varphi_1(\underline{\mathbf{a}}, \underline{b_1}) \curlywedge \cdots \curlywedge \varphi_m(\underline{\mathbf{a}}, \underline{b_m})$ ve buradan da $\Gamma \vdash \eta\,(\underline{\mathbf{a}}, \underline{b})$ elde ederiz. Yine (i) ve (ii)'den

$$\begin{aligned}\Gamma \vdash &(\varphi_1(\underline{\mathbf{a}}, y_1) \to y_1 \doteq \underline{b_1}) \curlywedge \cdots \curlywedge \\ &(\varphi_m(\underline{\mathbf{a}}, y_m) \to y_m \doteq \underline{b_m}) \curlywedge (\psi(\underline{b_1}, \ldots, \underline{b_m}, y) \to y \doteq \underline{b})\end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan ise

$$\Gamma \vdash y_1 \doteq \underline{b_1} \curlywedge \cdots \curlywedge y_m \doteq \underline{b_m} \curlywedge \psi(y_1, \ldots, y_m, y) \to \psi(\underline{b_1}, \ldots, \underline{b_m}, y)$$

olduğundan

$$\Gamma \vdash \varphi_1(\underline{\mathbf{a}}, y_1) \curlywedge \cdots \curlywedge \varphi_m(\underline{\mathbf{a}}, y_m) \curlywedge \psi(y_1, \ldots, y_m, y) \to y \doteq \underline{b},$$

ardından

$$\Gamma \vdash \dot{\exists} y_1, \ldots, y_m(\psi(y_1, \ldots, y_m, v_{n+1}) \curlywedge \varphi_1(\mathbf{v}, y_1) \curlywedge \cdots \curlywedge \varphi_m(\mathbf{v}, y_m) \to y \doteq \underline{b},$$

dd. $\Gamma \vdash \eta(\underline{\mathbf{a}}, y) \to y \doteq \underline{b}$ elde ederiz.

3. $g \in \mathbf{F}^{n+1}$ yinelgen olsun. $\mathbf{a}, \underline{\mathbf{a}}$ ve $\mathbf{v}$ yukarıdaki anlamları taşımak üzere

$$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{N}^n \exists b \in \mathbb{N}\ (g(\mathbf{a}, b) = 0)$$

olsun. Bu koşullarda g fonksiyonu Γ-temsil edilebilirse $f := \mu g$ fonksiyonunun da Γ-temsil edilebilir olduğunu savunuyoruz. Şimdi g fonksiyonu $\varphi(\mathbf{v}, v_{n+1}, v_{n+2}) \in \mathrm{Fm}^{n+2}$ formülü ile Γ-temsil edilsin. Öyleyse v_{n+1} yerine w yazarsak

$$g(\mathbf{a}, b) = c \Longrightarrow \Gamma \vdash \varphi\,(\underline{\mathbf{a}}, \underline{b}, \underline{c}) \curlywedge \dot{\forall} y(\varphi\,(\underline{\mathbf{a}}, \underline{b}, y) \to y \doteq \underline{c}).$$

Şimdi

$$\psi(\mathbf{v}, w) := \varphi(\mathbf{v}, w, \mathbf{0}) \curlywedge \dot{\forall} x[\kappa(x, w) \to \dot{\exists} y(\neg(y \doteq \mathbf{0}) \curlywedge \varphi(\mathbf{v}, x, y))]$$

formülünün f fonksiyonunu Γ-temsil ettiğini savunuyoruz.

$f(\mathbf{a}) = k$ olsun. Bu durumda $g(\mathbf{a}, k) = 0$ ve her $i = 0, \dots k-1$ içinse $c_i := g(\mathbf{a}, i) > 0$. Yalınlık açısından aşağıda $\Gamma \vdash$ yerine $\vdash$ yazacağız:

(1) $\vdash \varphi(\underline{\mathbf{a}}, \underline{k}, y) \to y \doteq \mathbf{0}$
(2) $\vdash \varphi(\underline{\mathbf{a}}, \underline{i}, y) \to \neg(y \doteq \mathbf{0}),\ i = 0, \dots, k-1,$ (Z1)
(3) $\vdash \neg\varphi(\underline{\mathbf{a}}, \underline{i}, \mathbf{0})\ ,\ \ i = 0, \dots, k-1,$ ((2))
(4) $\vdash \kappa(x, \underline{k}) \to \neg\varphi(\underline{\mathbf{a}}, x, \mathbf{0}),$ ((3), (5.15.7)(d))
(5) $\vdash \varphi(\underline{\mathbf{a}}, x, \mathbf{0}) \to \neg\kappa(x, \underline{k}),$ (karşı konum)
(6) $\vdash \neg\dot{\exists} y(\neg(\mathbf{0} \doteq y) \curlywedge \varphi(\underline{\mathbf{a}}, \underline{k}, y)),$ ((1))
(7) $\vdash \dot{\forall} x(\kappa(x, w) \to \dot{\exists} y(\neg(y \doteq \mathbf{0}) \curlywedge \varphi(\underline{\mathbf{a}}, x, y))) \to \neg\kappa(\underline{k}, w),$ ((6))
(8) $\vdash \psi(\underline{\mathbf{a}}, w) \to \neg\kappa(w, \underline{k}) \curlywedge \neg\kappa(\underline{k}, w),$ ((5) ve (7))
(9) $\vdash \psi(\underline{\mathbf{a}}, w) \to w \doteq \underline{k},$ ((8) ve Z3(c))
(10) $\vdash \varphi(\underline{\mathbf{a}}, \underline{k}, \mathbf{0}),$ (φ formülü g'yi Γ-temsil eder)
(11) $\vdash \neg(\underline{c_i} \doteq \mathbf{0}) \curlywedge \varphi(\underline{\mathbf{a}}, \underline{i}, \underline{c_i}),\ \ i = 0, \dots, k-1$
(12) $\vdash \dot{\exists} y(\neg(y \doteq \mathbf{0}) \curlywedge \varphi(\underline{\mathbf{a}}, \underline{i}, y)),\ \ i = 0, \dots, k-1$
(13) $\vdash \psi(\underline{\mathbf{a}}, \underline{k})$

Sonuçta (13) ve (9)'dan ψ formülü f'yi Γ-temsil eder. Sav (5.9.4)'ten çıkar ■

Not 5.15.16 (5.15.15) ile tüm borçlarımızı ödemiş oluyoruz. $\mathcal{K}_{ra}$ yeterince güçlü olduğundan (5.14.26) ile (5.7.6) ve (5.7.12)'deki borçlarımız ödenmiştir. (5.7.10) borcumuz doğrudan (5.15.8)'den çıkar. (5.15.15) bize doğrudan (5.6.17) ve $\mathfrak{N}$ yapısı $\mathcal{K}_{ra}$'nın bir modeli olduğu için (5.6.5)(1)'i verir. Bu teoremin (2) ve (3) önermelerinin (1)'den çıktığını o zaman da belirtmiştik. (1) $\Longrightarrow$ (2) aşikârdır. (2) $\Longrightarrow$ (3)'ün kanıtı izleyen teoremin kanıtındaki gibidir. Böylece hiçbir borcumuz kalmamıştır. ▲

Teorem 5.15.17 *1. Her yarı yinelgen bağıntı $\mathfrak{N}$-tanımlanabilir.*

*2. (**Tarski**)* $\operatorname{Th}\mathfrak{N}$ *teorisi $\mathfrak{N}$-tanımlanamaz.*

3. $\operatorname{Th}\mathfrak{N}$ *yinelgen aksiyomlaştırılamaz.*

Kanıt. 1. $Q \subseteq \mathbb{N}$ yarı yinelgen olsun. Bu durumda (5.12.1)(1) ile yinelgen bir $P \subseteq \mathbb{N}^2$ bağıntısı ile $Q = \{a \in \mathbb{N} \mid \exists b \in \mathbb{N}\ (a, b) \in P\}$ olur. (5.15.12) ve (5.15.15)'ten P bağıntısı bir $\varphi \in \operatorname{Fm} L_{ra}$ ile temsil edilebilir. Buradansa, daha önce de irdelediğimiz gibi, $\mathfrak{N} \models \Lambda_{ra}$ olduğundan $P = \{(a, b) \mid \mathfrak{N} \models \varphi\,[a, b]\}$ elde edilir. Öyleyse $\psi(v_1) := \dot{\exists} y\ \varphi(v_1, y)$ olmak üzere $Q = \{a \mid \mathfrak{N} \models \psi[a]\}$ olur ve ψ formülü Q'yu $\mathfrak{N}$-tanımlar.

2. ve 3. ise (5.14.28) ve 1.'den çıkar. ■

Teorem 5.15.18 *Yinelgen fonksiyonlar $\mathcal{K}_{ra}$-temsil edilebilen fonksiyonlarla örtüşür.*

Kanıt. $\mathcal{K}_{ra}$ basit yinelgen aksiyomlaştırılmış ve yeterince güçlü olduğundan sav (5.15.14) ve (5.15.15)'ten çıkar. ■

Teorem 5.15.19 *$\mathcal{K}_{ra} \leq \mathcal{K}$ olan tutarlı $\mathcal{K}$ kuramları belirlenemez.*

Kanıt. (5.15.4) ve (5.15.15). ■

Teorem 5.15.20 (Birinci Gödel Eksiklik Teoremi) *$\mathcal{K}_{ra} \leq \mathcal{K}$ olan tutarlı ve yinelgen aksiyomlaştırılabilen $\mathcal{K}$ kuramları eksiktir.*

Kanıt. (5.15.5) ve (5.15.15). ■

5.16 İki Farklı Yaklaşım

Başlangıçta çoğu matematikçi Gödel'in teoremlerinden rahatsız olsa da bu teoremleri o kadar dert etmediler; ister Gödel'in, ister Rosser'in belirlenemez olarak verdikleri önermeler—onlara göre olağan matematikte hiç karşılaşmadığımız—ender garabetlerdir. Geçen zaman içinde bunun böyle olmadığı da örneklenmiştir. Aslında "Eksiklik Teoremi" yerine "Aritmetiğin Zenginliği Teoremi" denmiş olsa ve örneğin "Aritmetiğin savlarının doğrularını ve yanlışlarını makinalarla belirlemek olanaksızdır; bazı aritmetik önermeleri belirlemek matematikçilerin aritmetiği aşan yeni yaratıcı yöntemlerini beklemektedir" gibi bir önerme dile getirilse bu önerme çok daha az dirençle karşılaşırdı!

Gödel'in teoreminin sonradan başka kanıtları da verildi. Biz bunlardan iki tanesini, bir yandan özegöndermesiz oldukları, diğer yandan birini ise sıradan bir aritmetik teoremi olduğu için ele alacağız.

R.L. Goodstein 1944'te Sayılar Kuramı'na ilişkin alışıldık türden bir teorem kanıtladı. Bilindiği gibi $b > 1$ bir doğal sayı olmak üzere her x doğal sayısını, $a_n \neq 0$ olmak üzere b tabanına göre tek türlü

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0,\ 0 \leq a_i < b,\ 0 \leq i \leq n \qquad (5.96)$$

olarak yazabiliriz. (5.96) gösterimine x sayısının b tabanlı yazılımı, n sayısına ise bu yazılımın uzunluğu diyelim. Şimdi bundan farklı olarak **genişletilmiş b tabanlı** gösterimi tanımlayalım. Bu gösterim b tabanlı gösterimde $a_k \neq 0$ ise b^k'de k sayısını yinelgen biçimde b tabanında yazarak elde edilen gösterimdir. Örneğin bir x sayısının 3 tabanına göre yazılımında $a_{49} = 2$ ise $a_{49}3^{49}$ yerine

$$2 \cdot 3^{49} = 2 \cdot 3^{3^3+22} = 2 \cdot 3^{3^3+2\cdot 3^2+4} = 2 \cdot 3^{3^3+2\cdot 3^2+3^1+1} \qquad (5.97)$$

eşitliğindeki en son gösterimi alacağız. $b, c > 1$ olmak üzere bir x doğal sayısı için $S_c^b(x)$ doğal sayısı x sayısının genişletilmiş b tabanlı gösteriminde her b yerine c yazılarak elde edilen doğal sayıdır. Örneğin $x = 2 \cdot 3^{49}$ ise (5.97)'den

$$S_4^3(x) = 2 \cdot 4^{4^4+2\cdot 4^2+4+1}$$

olur. Ya da $x = 36$ sayısının genişletilmiş 2 tabanlı yazılımı $36 = 2^{2^2+1} + 2^2$ olduğundan

$$S_3^2(36) = S_3^2(2^{2^2+1} + 2^2) = 3^{3^3+1} + 3^3 = 22876792454988 \tag{5.98}$$

elde ederiz ve bu sayı 36'dan oldukça büyüktür. $c > b$ olduğunda *taban şişirme* diyeceğimiz $S_c^b(x)$ işlemi, b tabanlı yazılımın uzunluğu ≥ 1 ise x sayısını büyütür, bu uzunluk 0 ise $S_c^b(x) = x$ olur. Diğer yandan daima $S_c^b(0) = 0$.

Tanım 5.16.1 *Her $x \in \mathbb{N}$ için*

$$g_0(x) := x$$
$$g_{n+1}(x) := \begin{cases} S_{n+3}^{n+2}(g_n(x)) - 1, & g_n(x) > 0 \\ 0, & g_n(x) = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan $(g_n(x))$ dizisine x sayısının ***Goodstein dizisi*** *denir.*

Örneğin $x = 36$ için (5.98) ile $g_0(36) = 36$ ve

$$g_1(36) = S_3^2(36) - 1 = 3^{3^3+1} + 26 = 3^{3^3+1} + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2,$$
$$g_2(36) = S_4^3(g_1(36)) - 1 = 4^{4^4+1} + 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 1,$$
$$g_3(36) = S_5^4(g_2(36)) - 1 = 5^{5^5+1} + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5$$

elde ederiz. $g_1(36) = 22876792454987$ iken

$$g_2(36) = 53\,631\,231\,719\,770\,388\,398\,296\,099\,992\,823\,384\,509\,917\,463\,282\,369$$
$$573\,510\,894\,245\,774\,887\,056\,120\,294\,187\,907\,207\,497\,192\,667\,613$$
$$710\,760\,127\,432\,745\,944\,203\,415\,015\,531\,247\,786\,279\,785\,734\,596$$
$$024\,336\,425$$

olur. Çok daha büyük olan $g_3(36)$ sayısını yazmayacağız.

Goodstein Teoremi'nin kanıtında sırasayıları ve onların aritmetiğinden en basit bilgiler kullanılacaktır. Okur gerekli bilgileri [17]'de bulabilir. $\omega := \{0, 1, 2, \ldots\}$ sonsuz sırasayılarının en küçüğü olmak üzere $S_\omega^b(x)$'in ne olacağı

okurun sezdiğidir: x sayısının genişletilmiş b tabanlı yazılımında b gördüğümüz yerde ω yazılarak elde edilen sıra sayısıdır. Örnek vermek gerekirse

$$S^2_\omega(2^{2^2+1}+2^2) = \omega^{\omega^\omega+1}+\omega^\omega,$$
$$S^3_\omega(3^{3^3+1}+2\cdot 3^2+2\cdot 3+2) = \omega^{\omega^\omega+1}+2\omega^2+2\omega+2,$$
$$S^4_\omega(4^{4^4+1}+2\cdot 4^2+2\cdot 4+1) = \omega^{\omega^\omega+1}+2\omega^2+2\omega+1.$$

Ayrıca her $k,l>1$ ve her $x,y\in\mathbb{N}$ için

$$x<y \Longrightarrow S^k_\omega(x)<S^k_\omega(y) \text{ ve } S^k_\omega(x)=S^l_\omega(S^k_l(x)) \tag{5.99}$$

olduğu apaçıktır. Şimdi inanılmaz sav geliyor:

Teorem 5.16.2 (Goodstein) *Her x doğal sayısı için $(g_n(x))$ Goodstein dizisi bir yerden sonra yalnızca 0 değerini alır.*

Kanıt. $x,n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $g'_n(x) := S^{n+2}_\omega(g_n(x))$ olarak tanımlansın. Eğer $g_n(x)>0$ ise (5.99)'dan

$$\begin{aligned} g'_{n+1}(x) &= S^{n+3}_\omega(g_{n+1}(x)) = S^{n+3}_\omega(S^{n+2}_{n+3}(g_n(x))-1) \\ &< S^{n+3}_\omega(S^{n+2}_{n+3}(g_n(x))) = S^{n+2}_\omega(g_n(x)) = g'_n(x) \end{aligned}$$

elde ederiz. Her n için $g_n(x)>0$ olsaydı $(g'_n(x))$ dizisi sıra sayılarımızın kesin azalan bir dizisi olurdu ki bu olmaz; sırasayılarının kesin azalan dizileri sonlu olmak zorundadır. Öyleyse her x için $g_n(x)=0$ olan bir n vardır. Elbette bu durumda her $m\geq n$ için $g_m(x)=0$ olur. ■

Biraz yukarıda $g_1(36)$ ve $g_2(36)$ sayılarının değerlerini vererek bu değerlerin ne kadar hızla büyüdüğünü örnekledik. $x\geq 4$ için okur $g_1(x), g_2(x), \ldots$ dizisinin başlangıç değerlerini hesapladığında bu dizinin terimlerinin hızla büyüdüğünü görecektir ve teoremin savı inanılmaz gelecektir. Ancak taban şişirmenin hiçbir zaman uzunluğu büyütmediğini, bir zaman sonra uzunluğun zorunlu olarak küçülmesi gerektiğini vurgulayalım. Tüm bunları daha da ilginç kılan ise Kirby ve Paris'in [59]'da Goodstein Teoremi'nin $\mathcal{K}_a$'da belirlenemeyeceğini kanıtlamış olmalarıdır. Daha açık sözlerle $\sigma\in \operatorname{Sav} L_a$ savı Goodstein formülünü dile getiriyorsa $\mathcal{K}_a \nvdash \sigma$ ve $\mathcal{K}_a \nvdash \neg\sigma$. Matematiğin güzel yanı ve Birinci Gödel Eksiklik Teoremi'nin pozitif yanı da budur: Yeterince güçlü, yinelgen aksiyomlaştırılmış kuramlarda, Goodstein Teoremi'nde olduğu gibi, çözümleri için daima bu kuramların dışına çıkan kavram ve yöntemlerin matematikçiler tarafından geliştirilmesini bekleyen problemler olacaktır.

Chaitin [11]'de 1974 yılında Gödel'i telefonla arayıp Eksiklik Teoremi'ni Berry açmazını kullanarak kanıtladığını ve onunla buluşma arzusunu belirttiğini aktarır. Gödel "Hangi açmazı kullandığınız fark etmez" der. Bu

konuşmadan bizi ilgilendiren bu tümcesidir. [7]'de Boolos da Berry açmazından yola çıkarak Birinci Eksiklik Teoremi'ni özegönderme yapmayan bir önerme ile kanıtlamıştır. Boolos iki kanıtın da Berry açmazını kullanmasına karşın kanıtların farklı olduğunu, Chaitin'in Turing makinalarında minimum komut sayılarını, dolayısıyla bir doğal sayının *karmaşıklığı* kavramını kullandığını, kendi kanıtında bu kavramlara rastlanmadığın belirtir. Biz burada Boolos'un kanıtını özetleyeceğiz.

Hangi açmazı kullandığınız fark etmez! Gödel yalancı açmazından yola çıkmıştır. "Bu sav yanlıştır" açmazını "Bu sav $\mathcal{K}_a$'da kanıtlanamaz" şeklinde değiştirmiştir. Yalancı açmazından $\mathcal{K}_a$ kuramına ilişkin bir önermeye geçmiş olduk. "Bu sav $\mathcal{K}_a$'da kanıtlanamaz" ise "Bu sav kanıtlanamaz" önermesinden tümüyle farklı bir önermedir. Matematiksel irdelemelerin limitlerinden söz edebilmek için aksiyomlarımızın ve çıkarım kurallarımızın belirlenmiş olması gerekir. Bu, biçimsel kuramlarımızda sağlanmıştır. $\mathcal{K}_a$ kuramında biçimsel kanıtın ne olduğu netleştirilmiş ve kanıtlar denetlenebilir şekle getirilmiştir. Tek serbest değişkenli her ψ formülüne karşılık bir σ_ψ savının, Gödel sayıları üzerinden $\mathcal{K}_a \vdash \sigma_\psi \longleftrightarrow \psi(\ulcorner \sigma_\psi \urcorner)$ olacak biçimde bulunabileceği kanıtlanmıştır. Bu denklik σ_ψ savının "Benim (yani σ_ψ'nin) $\mathcal{K}_a$-kanıtlanabilir olmam ψ formülünün benim Gödel sayımın sayısalında $\mathcal{K}_a$-kanıtlanabilir olmasına denktir." dediği şeklinde okunur ve σ_ψ savı özegöndermelidir denir.

Boolos, Berry açmazından yola çıkarak [7]'de özegöndermeli olmayan, $\mathcal{K}_a$ kuramında belirlenemez bir $\sigma \in \operatorname{Sav} L_a$ savını vermiştir. Abecemiz Türkçe abecemiz olmak üzere Berry açmazını şöyle ifade edebiliriz:

"Altmışüçten az harfle tanımlanamayan doğal sayıların en küçüğü vardır."

Yukarıdaki önermeye B diyelim. $\neg B$ doğru olamaz: Bu tüm doğal sayıların altmışüçten az harfli tümcelerle tanımlanabilir olması anlamına gelir ki söz konusu olamaz! Çünkü bu tür tümce sayısı sonlu, $\mathbb{N}$ ise sonsuzdur. B'nin doğru olduğunu varsayalım. B ile varlığı ileri sürülen sayıya n dersek, bu sayı tek olarak belirlidir. Ancak B önermesi n sayısını tanımlar ve harf sayısı altmışüçten küçüktür. B bir açmazdır!

Şimdi B önermesini $\mathcal{K}_a$ kuramına taşımayı düşünüyoruz. Gödel'in yaptığı gibi bu B açmazı L_a dili yardımıyla $\mathcal{K}_a$ kuramına taşındığında açmaz karakterini yitirecek ve bize doğru ama kanıtlanamaz bir önerme verecektir. İlk olarak bir n doğal sayısının L_a dilinde tanımlanabilir olması ne demektir, bunu netleştireceğiz. Boolos, Church Tezi ile kanıtını vermiştir.

İzleyen irdelemelerimizde formüllerimizin uzunluğu işe karışacaktır. Burada formüllerimizin harfsel yazılımı dikkate alınacaktır. Örneğin $x \dot{+} x \doteq \underline{4}$ formülünün uzunluğu $\underline{4}$ aslında **SSSS0** olduğundan 9 olacaktır. k serbest değişkenli herhangi bir formülün serbest değişkenleri $v_1, \ldots, v_k$ olan bir for-

müle biçimsel denk olduğunu biliyoruz; bundan da yararlanacağız, formüllerimizi düzgün seçmeye çalışacağız. Gödel'in kanıtında anlamsal "doğru" kavramından "biçimsel kanıtlanabilir" kavramına geçiş yapılmıştır, burada ise anlamsal "tanımlanabilir" kavramından "algoritmik tanımlanabilir" kavramına bir geçiş yapılmıştır.

Tanım 5.16.3 *Elimizde herhangi bir* $\sigma \in \operatorname{Sav} L_a$ *girdisi verildiğinde sonlu adımda "evet" veya "hayır" çıktısını veren bir* $\mathcal{A}$ *algoritmamız olsun ve "evet" çıktısı* $\sigma \in \operatorname{Th} \mathfrak{N}$ *anlamına gelirken " hayır" çıktısı ise* $\sigma \notin \operatorname{Th} \mathfrak{N}$ *anlamına gelsin.* $\varphi \in \operatorname{Fm} L_a$ *tek serbest değişkenli bir formül ve* $n \in \mathbb{N}$ *olmak üzere*

$$\dot{\forall} v_1(\varphi(v_1) \longleftrightarrow v_1 \doteq \underline{n})$$

girdisinde $\mathcal{A}$ *algoritmamız "evet" çıktısını veriyorsa* n *doğal sayısı* $\operatorname{Th} \mathfrak{N}$ *kuramında* φ *formülü ile* $\mathcal{A}$***-tanımlanabilir*** *diyeceğiz.*

Teorem 5.16.4 $\operatorname{Th} \mathfrak{N}$ *belirlenemez.*

Kanıt. $\operatorname{Th} \mathfrak{N}$'nin belirlenebilir olduğunu varsayalım ve $\mathcal{A}$ ise (5.16.3)'teki gibi bir algoritma olsun.

$R \subseteq \mathbb{N}^2$ bağıntısı şöyle tanımlansın: $(n, l) \in R \Longleftrightarrow n$ doğal sayısı uzunluğu $\leq l$ olan bir $\varphi \in \operatorname{Fm} L_a$ ile $\mathcal{A}$-tanımlanabilir. R'nin yinelgen bir bağıntı olduğunu savunuyoruz. Bunun için χ_R'nin hesaplanabilir olduğunu göstermek yeterlidir. n, l doğal sayıları verilsinler. Uzunluğu $\leq l$ olan tek serbest değişkenli düzgün formüllerimiz

$$v_1, \ldots, v_l, \neg, \rightarrow, \dot{\forall}, \doteq,), (, \mathbf{S}, \dot{+}, \bullet, \mathbf{0}$$

sonlu abecesinin sözcükleri arasında olacağından bunlar sonlu sayıdadır. Sonlu sayıdaki bu φ formülleriyle oluşturacağımız $\sigma_\varphi := \dot{\forall} x(\varphi(x) \longleftrightarrow x \doteq \underline{n})$ girdileriyle $\mathcal{A}$ algoritması çalıştırıldığında en az bir kez "evet" çıktısı ile karşılaşırsak $\chi_R(n, l) = 1$, diğer durumda $\chi_R(n, l) = 0$. Elimizde χ_R'yi hesaplayan bir algoritmamız var. Öyleyse χ_R hesaplanabilir ve dolayısıyla yinelgendir. Dolayısıyla R bağıntısı bir $\psi_{\mathcal{A}} \in \operatorname{Fm}^2 L_a$ formülüyle $\mathfrak{N}$-tanımlanabilir.

$$\eta_{\mathcal{A}}(v_1, v_2) := \neg \psi_{\mathcal{A}}(v_1, v_2) \curlywedge \dot{\forall} v_3(\neg \psi_{\mathcal{A}}(v_3, v_2) \rightarrow \dot{\exists} v_4(v_1 \dot{+} v_4) \doteq v_3)$$

$\eta\mathcal{A}(\underline{n}, \underline{l})$ önermesi tam da n doğal sayısının uzunluğu $\leq l$ olan formüllerle $\mathcal{A}$-tanımlanamayan doğal sayıların en küçüğü olduğunu dile getirir.

Şimdi $\eta := \eta_{\mathcal{A}}$ formülümüzün uzunluğu l olsun (bu uzunluk hesaplanırken elbette $\dot{\exists}$ yerine onun $\dot{\forall}$ üzerinden tanımı alınacaktır). v_2 değişkeni η formülünde m kez geçiyorsa elbette $m \leq l$ olacaktır. t, uzunluğu $h + 1$

olan bir terimse $\eta(v_1, t)$ formülünün uzunluğu $l + mh$ olacaktır. Şimdi r doğal sayısı için $t = \underline{r} \bullet \underline{r}$ teriminin uzunluğu $2\,(r+1) + 1 = 2r + 3$, buna karşın $\underline{r^2}$ teriminin uzunluğu ise $r^2 + 1$'dir. $t = \underline{r} \bullet \underline{r}$ olmak üzere $\eta(v_1, t)$ formülünün uzunluğu $l + m(2r + 2)$, buna karşın $\eta(v_1, \underline{r^2})$ formülünün uzunluğu ise $l + mr^2$ olur. Şimdi r sayısını $l + m(2r + 2) < r^2$ olacak biçimde seçelim. Bu durumda r^2 sayısı $\eta(v_1, t)$ formülünün uzunluğundan daha büyük olacaktır. $\varphi(v_1) := \eta(v_1, t)$ olsun $(t = \underline{r} \bullet \underline{r})$. $\underline{r} \bullet \underline{r} \doteq \underline{r \cdot r} = \underline{r^2}$ olduğundan $\eta(v_1, t)$ önermesi $\eta(v_1, \underline{r^2})$ önermesine denktir. Uzunluğu $\leq r^2$ olan formüllerle $\mathcal{A}$-tanımlanayan doğal sayıların en küçüğü vardır ve tek olarak belirlidir, dd. $\dot{\exists}! v_1 \eta(v_1, \underline{r^2}) \in \operatorname{Th}\mathfrak{N}$. Öyleyse bir $a \in \mathbb{N}$ ile $\dot{\forall} v_1(\eta(v_1, \underline{r^2}) \longleftrightarrow v_1 \doteq \underline{a})$. Buradan ise $\eta(v_1, \underline{r^2})$ ile $\eta(v_1, t)$ denk olduklarından $\dot{\forall} v_1\,(\varphi(v_1) \longleftrightarrow v_1 \doteq \underline{a}) \in \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ olur. Buna karşın $\mathcal{A}$ algoritmamız $\dot{\forall} v_1\,(\varphi(v_1) \longleftrightarrow v_1 \doteq \underline{a})$ girdisine "hayır" çıktısını verecektir; çünkü $\varphi(v_1)$ formülümüzün uzunluğu r^2'den küçüktür. Dolayısıyla varsayımımız yanlıştır. $\operatorname{Th}\mathfrak{N}$'i belirlediğini varsaydığımız herhangi bir $\mathcal{A}$ algoritması bizi çelişkiye götürdü. Church Tezi'nden $\operatorname{Th}\mathfrak{N}$'nin belirlenemezliğini elde ederiz. ■

Aynı yöntem Gödel'in Birinci Eksiklik Teoremi'ni kanıtlamakta da kullanılır. $\mathcal{K}_{ra} \leq \mathcal{K}$ ve $\mathcal{K}$ kuramı yinelgen aksiyomlaştırılmış ve tutarlı olsun. Yapılacak tek şey (5.16.3) ve (5.16.4)'te $\operatorname{Th}\mathfrak{N}$ gördüğümüz yerde $\operatorname{Bt}\mathcal{K}$ almaktır. Kanıtta önemli olan R bağıntısının $\mathcal{K}$-temsil edilebilir olmasıdır ve biz bunun böyle olduğunu biliyoruz.

5.17 İkinci Dereceden Yüklem Mantığı

Bu kesimde ikinci dereceden yüklem mantığı hakkında kısaca bilgi vereceğiz. Birinci dereceden bir dilde

$$\forall P \subseteq \mathbb{N}((0 \in P \wedge \forall x(x \in P \Longrightarrow x + 1 \in P)) \Longrightarrow P = \mathbb{N})$$

tümevarım ilkesini biçimselleştiremediğimizi biliyoruz. Bunun için değerlerini $\mathcal{P}(\mathbb{N})$'de alan yeni türden $\mathbf{X}$ değişkenlerine gereksinimiz vardır. Biz şimdi birinci dereceden her L dilini ikinci dereceden bir L^2 diline genişleteceğiz.

L birinci dereceden bir dil olsun. L dilinin $\mathcal{V}$ değişkenler kümesine L ile ve kendi aralarında ayrık olan yeni $\mathcal{V}_F$ ve $\mathcal{V}_B$ değişkenler kümelerini ekleyeceğiz. Her $n \geq 1$ doğal sayısı için sırasıyla n yerli fonksiyon ve bağıntı değişkenleri kümelerini göstermek üzere

$$\mathcal{V}_F^n := \{\mathbf{F}_m^n \mid m \in \mathbb{N}\} \text{ ve } \mathcal{V}_B^n := \{\mathbf{X}_m^n \mid m \in \mathbb{N}\}$$

olsun ve $\mathcal{V}_F := \bigcup_{n\geq 1}\mathcal{V}_F^n$ ve $\mathcal{V}_B := \bigcup_{n\geq 1}\mathcal{V}_B^n$ olarak açıklansın. Ayrıca elbette $(m,n) \neq (m',n')$ ise $\mathbf{F}_m^n \neq \mathbf{F}_{m'}^{n'}$ ve $\mathbf{X}_m^n \neq \mathbf{X}_{m'}^{n'}$ alınacaktır.

$\mathcal{V}$'nin öğelerine **nesne değişkenleri**, $\mathcal{V}_F$'nin ve $\mathcal{V}_B$'nin öğelerine ise sırasıyla **fonksiyon** ve **bağıntı değişkenleri** denir. Böylece birinci dereceden her $L = \mathcal{R} \sqcup \mathcal{F} \sqcup \mathcal{C}$ dilinin birinci dereceden terim ve formüllerini oluştururken yalnızca $\mathcal{V}$ nesne değişkenlerini kullanırken, L diline ilişkin ikinci dereceden terim ve formülleri oluştururken $\mathcal{V} \sqcup \mathcal{V}_F \sqcup \mathcal{V}_B$ değişkenlerini kullanacağız. $L^1 := L \sqcup \mathcal{V}$, $L^2 := L^1 \sqcup \mathcal{V}_F \sqcup \mathcal{V}_B$ olmak üzere L^2'ye L diline ilişkin **ikinci dereceden tam dil** denir, her dereceden fonksiyon ve bağıntı değişkenleri eksiksiz bu dilde vardır. Bunun böyle olması gerekmez; örneğin $L^{2m} = L \sqcup \mathcal{V}_B^1$ kümesine L'ye ilişkin ikinci dereden **bir yerli** (**monadic**) dil denir.

L dili (basit) yinelgense L^2 de (basit) yinelgendir. L^2 dilinin $\operatorname{Tm} L^2$ terimlerini ve $\operatorname{Fm} L^2$ formüllerini tanımlayalım. Her ne kadar $\mathcal{V}_F$ fonksiyon değişkenleri ve $\mathcal{V}_B$ bağıntı değişkenleri kümeleri ise de terim ve formül tanımlarımızda sanki $\mathcal{V}_F$ birinci dereceden bir dilin fonksiyon imleri ve $\mathcal{V}_B$ ise birinci dereceden bir dilin bağıntı imleri gibi yer alırlar.

Tanım 5.17.1 *(a)* $\mathcal{C} \cup \mathcal{V} \subseteq \operatorname{Tm} L^2$.

(b) $t_1, \ldots, t_n \in \operatorname{Tm} L^2$, $f \in \mathcal{F}$ *bir* n *değişkenli fonksiyon imi ise* $ft_1 \cdots t_n \in \operatorname{Tm} L^2$ *ve her* $m \in \mathbb{N}$ *için* $\mathbf{F}_m^n t_1 \cdots t_n \in \operatorname{Tm} L^2$.

(c) $\operatorname{Tm} L^2$ *kümesi (a) ve (b) ile elde edile sözcüklerden oluşur.*

$\mathcal{V}_F^n$ için $\mathbf{f}^n, \mathbf{g}^n, \mathbf{h}^n, \ldots$ ve $\mathcal{V}_B^n$ içinse $\mathbf{X}^n, \mathbf{Y}^n, \mathbf{Z}^n, \ldots, \mathbf{P}^n, \mathbf{Q}^n, \mathbf{R}^n, \ldots$ sözeden değişkenlerini kullanacağız. Bağlamdan n'nin ne olduğu anlaşılıyor veya önemli değilse sözeden değişkenlerimizi $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}, \ldots, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \ldots, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \ldots$ olarak yazacağız. Açıkça $\operatorname{Tm} L \subseteq \operatorname{Tm} L^2$.

Tanım 5.17.2 *(a)* $s, t, t_1, \ldots, t_n \in \operatorname{Tm} L^2$, $R \in \mathcal{R}$ *bir* n *yerli bağıntı ve* $\mathbf{X}_m^n \in \mathcal{V}_B$ *ise* $s \doteq t$, $Rt_1 \cdots t_n$ *ve* $\mathbf{X}_m^n t_1 \cdots t_n$ *sözcükleri* $\operatorname{Fm} L^2$*'dedirler. Bunlar* L^2 *dilinin atomik formüllerini oluşturur.*

(b) $\varphi, \psi \in \operatorname{Fm} L^2$ *ise* $\neg\varphi, \varphi \to \psi \in \operatorname{Fm} L^2$.

(c) $\varphi \in \operatorname{Fm} L^2$ *ise her* $x \in \mathcal{V}$, *her* $\mathbf{X} \in \mathcal{V}_B$ *ve her* $\mathbf{f} \in \mathcal{V}_F$ *için* $\dot{\forall} x\varphi$, $\dot{\forall}\mathbf{X}\varphi$ *ve* $\dot{\forall}\mathbf{f}\varphi$ *sözcükleri de* $\operatorname{Fm} L^2$*'dedirler.*

(d) $\operatorname{Fm} L^2$ *kümesi tamı tamına (a), (b) ve (c) ile elde edilen sözcüklerden oluşur.*

Herhangi bir $\varphi \in \operatorname{Fm} L^2$ formülünde bir $\mathbf{f}$ fonksiyon veya bir $\mathbf{X}$ bağıntı değişkeninin bağlı veya serbest bulunması tıpkı x nesne değişkenlerinde olduğu gibi tanımlanır. Yine bir formülde $\mathbf{X}_m^n$ ve $\mathbf{F}_m^n$ değişkenleri için de yerine koymalar ve yerine koymada izinli olma birinci dereceden mantıkta olduğu gibi tanımlanır. $\operatorname{Fm} L^2$ formüllerinin serbest değişken içermeyenleri L^2

dilinin savlarının $\operatorname{Sav} L^2$ kümesini oluşturur. Tanım gereği $\operatorname{Fm} L \subseteq \operatorname{Fm} L^2$ ve $\operatorname{Sav} L \subseteq \operatorname{Sav} L^2$.

L^2 dilinin bir $\mathfrak{A}$ yapısından ve φ formülünün bu yapıda doğru olmasından ne anlayacağız, bunu netleştirelim. $A \neq \emptyset$ olmak üzere her $n \geq 1$ doğal sayısı için

$$\mathbf{F}^n(A) := \{f \mid f : A^n \to A\} \text{ ve } \mathbf{B}^n(A) := \{P \mid P \subseteq A^n\}$$

olarak tanımlayalım. $\mathbf{F}(A) := \bigcup_{n\geq 1}\mathbf{F}^n(A)$ ve $\mathbf{B}(A) := \bigcup_{n\geq 1}\mathbf{B}^n(A)$ olsun.

L^2 dilinin yapılarından L dilinin $\mathfrak{A} = (A, L^{\mathfrak{A}})$ yapılarını anlayacağız. Ancak $\mathfrak{A}$ yapısına bir L^2 yapısı olarak baktığımızda nesneleme, dd. yerine koyma tanımımızı $\mathcal{V}_F \sqcup \mathcal{V}_B$'ye genişletmemiz gerekir. Şimdi bir $\beta : \mathcal{V} \sqcup \mathcal{V}_F \sqcup \mathcal{V}_B \to A \cup \mathbf{F}(A) \cup \mathbf{B}(A)$ dönüşümüne $\beta(\mathcal{V}) \subseteq A$ ve her $n \geq 1$ için $\beta(\mathcal{V}_F^n) \subseteq \mathbf{F}^n(A)$ ve $\beta(\mathcal{V}_B^n) \subseteq \mathbf{B}^n(A)$ ise $\mathfrak{A}$ yapısında bir **2-değerleme** veya **2-yerine koyma** diyelim. Kabaca söylersek bize bir $\varphi \in \operatorname{Fm} L^2$ formülü ve $\mathfrak{A}$ yapısında bir β 2-değerlemesi verildiğinde φ formülünde geçen her $l \in L$ yerine $l^{\mathfrak{A}}$, her $\neg, \to$ mantık imi yerine $\neg, \Longrightarrow$, dolayısıyla $\curlywedge, \curlyvee, \longleftrightarrow, \dot{\exists}$ yerine sırasıyla $\wedge, \vee, \Longleftrightarrow, \exists$, her serbest $x \in \mathcal{V}$ değişkeni yerine $\beta(x)$, her serbest $\mathbf{F}_m^n$ fonksiyon değişkeni yerine $f_m^n := \beta(\mathbf{F}_m^n)$, her serbest $\mathbf{X}_m^n$ bağıntı değişkeni yerine $P_m^n := \beta(\mathbf{X}_m^n)$, bağlı değişkenleri değiştirmeden her $\dot{\forall}x$ yerine evreni A olan $\forall x$, her $\dot{\forall}\mathbf{F}_m^n$ yerine evreni $\mathbf{F}^n(A)$ olan $\forall\mathbf{F}_m^n$ ve her $\dot{\forall}\mathbf{X}_m^n$ yerine evreni $\mathbf{B}^n(A)$ olan $\forall\mathbf{X}_m^n$ yazdığımızda elde ettiğimiz geleneksel mantığa ilişkin formülü $\varphi^{\mathfrak{A}}[\beta]$ ile gösterelim. $\varphi^{\mathfrak{A}}[\beta]$ formülü doğru ise φ formülü *β 2-değerlemesinde $\mathfrak{A}$ yapısında 2-doğrudur* diyelim ve bunu $\mathfrak{A} \models^2 \varphi[\beta]$ ile gösterelim. Eğer φ formülü $\mathfrak{A}$ yapısındaki her β 2-değerlemesinde doğru ise o zaman φ formülü *$\mathfrak{A}$ yapısında 2-doğrudur* denir. Örneğin $\mathbf{P}^1 \in \mathcal{V}_B^1$ ve $\mathbf{P}^2 \in \mathcal{V}_B^2$ olmak üzere $P^2 := \beta(\mathbf{P}^2) \subseteq A^2$ olmak üzere

$$\varphi_= := \dot{\forall}x, y(\mathbf{P}^2xy \longleftrightarrow \dot{\forall}\mathbf{P}^1(\mathbf{P}^1x \longleftrightarrow \mathbf{P}^1y)) \text{ için} \tag{5.100}$$

$$\varphi_=^{\mathfrak{A}}[\beta] := \forall x, y(P^2xy \Longleftrightarrow \forall P^1(P^1x \Longleftrightarrow P^1y)) \tag{5.101}$$

olur. $\varphi_=^{\mathfrak{A}}[\beta]$'nın doğru olması için P^2'nin A'daki eşitlik bağıntısı olması gerek ve yeterlidir. Yukarıda söylenenleri netleştirelim.

Tanım 5.17.3 *β 2-değerlemesi verilsin. $f_m^n := \beta(\mathbf{F}_m^n)$ ve $P_m^n := \beta(\mathbf{X}_m^n)$ olmak üzere $t \in \operatorname{Tm} L^2$ olsun.*

(a) $t = c \in \mathcal{C}$ için $t^{\mathfrak{A}}[\beta] := c^{\mathfrak{A}}$, $t = x$ için $t^{\mathfrak{A}}[\beta] := \beta(x)$,

(b) $f \in \mathcal{F}$ bir n değişkenli fonksiyon imi ve $t_1, \ldots, t_n \in \operatorname{Tm} L^2$ ile $t = ft_1 \cdots t_n$ ise $t^{\mathfrak{A}}[\beta] := f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\beta], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[\beta])$, ve

(c) $t = \mathbf{F}_m^n t_1 \cdots t_n$ ise $t^{\mathfrak{A}}[\beta] := f_m^n(t_1^{\mathfrak{A}}[\beta], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[\beta])$
olarak tanımlanır.

Tanım 5.17.4 *$s, t, t_1, \ldots, t_n \in \operatorname{Tm} L^2$ ve $\varphi, \psi \in \operatorname{Fm} L^2$ olmak üzere:*

1. $\mathfrak{A} \models^2 s \doteq t[\beta] :\Longleftrightarrow s^{\mathfrak{A}}[\beta] = t^{\mathfrak{A}}[\beta]$,
2. $\mathfrak{A} \models^2 \mathbf{X}^n_m t_1 \cdots t_n[\beta] :\Longleftrightarrow (t^{\mathfrak{A}}_1[\beta], \ldots, t^{\mathfrak{A}}_n[\beta]) \in P^n_m$,
3. $\mathfrak{A} \models^2 \neg\varphi[\beta], \mathfrak{A} \models^2 \varphi \to \psi[\beta]$ *ve* $\mathfrak{A} \models^2 \dot\forall x\varphi[\beta]$ *birinci dereceden önermeler mantığında olduğu gibi açıklanır.*

Açıklanması gereken iki yeni tip vardır. $P^n \in \mathbf{B}^n(A)$ ve $f^n \in \mathbf{F}^n(A)$ olmak üzere $\beta^{P^n}_{nm}$ ile β'nın yalnızca $\mathbf{X}^n_m$'deki değerini yeniden P^n olarak açıkladığımızda elde ettiğimiz 2-değerlemesi ve $\beta^{f^n}_{nm}$ ile β'nın yalnızca $\mathbf{F}^n_m$'deki değerini yeniden f^n olarak açıkladığımızda elde ettiğimiz 2-değerlemesi olsun.

Tanım 5.17.5 1. $\mathfrak{A} \models^2 \dot\forall \mathbf{X}^n_m \varphi[\beta] :\Longleftrightarrow$ *Her* $P^n \in \mathbf{B}^n(A)$ *için* $\mathfrak{A} \models^2 \varphi[\beta^{P^n}_{nm}]$.

2. $\mathfrak{A} \models^2 \dot\forall \mathbf{F}^n_m \varphi[\beta] :\Longleftrightarrow$ *Her* $f^n \in \mathbf{F}^n(A)$ *için* $\mathfrak{A} \models^2 \varphi[\beta^{f^n}_{nm}]$.

Bu durumda

$$\mathfrak{A} \models^2 \dot\exists \mathbf{X}^n_m \varphi[\beta] \Longleftrightarrow \text{En az bir } P^n \in \mathbf{B}^n(A) \text{ için } \mathfrak{A} \models^2 \varphi[\beta^{P^n}_{nm}]$$

ve

$$\mathfrak{A} \models^2 \dot\exists \mathbf{F}^n_m \varphi[\beta] \Longleftrightarrow \text{En az bir } f^n \in \mathbf{F}^n(A) \text{ için } \mathfrak{A} \models^2 \varphi[\beta^{f^n}_{nm}]$$

olur. Ayrıca $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ ise $\mathfrak{A} \models^2 \varphi$ ve $\mathfrak{A} \models \varphi$ örtüşür.

(5.17.3), (5.17.4) ve (5.17.5) ile açıklanan yorum, **olağan yorum** veya **standart yorum** olarak adlandırılır. Başka bir yorum kullanmayacağımız için biz kısaca yorum diyeceğiz. Bir φ için $\mathfrak{A} \models^2 \varphi[\beta]$ ise φ formülü $\mathfrak{A}$ **yapısında** β **2-değerlemesinde doğrudur** denir. Eğer $\mathfrak{A}$'daki *her* 2-değerlemesi β için $\mathfrak{A} \models^2 \varphi[\beta]$ ise φ formülü $\mathfrak{A}$ **yapısında 2-doğrudur** denir ve bu $\mathfrak{A} \models^2 \varphi$ ile gösterilir. $\operatorname{Dog}^2 \mathfrak{A}$ ile $\mathfrak{A}$ yapısının 2-doğrularının kümesini gösterelim ve $\operatorname{Th}^2 \mathfrak{A} := \operatorname{Dog}^2 \mathfrak{A} \cap \operatorname{Sav} L^2$ olsun. $\operatorname{Dog} L^2 := \bigcap_{\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L} \operatorname{Dog}^2 \mathfrak{A}$ ise L^2 **dilinin 2-doğrularının (hepdoğrularının)** kümesidir. 2-yanlış ve benzeri kavramlar benzer biçimde aktarılır. Örneğin $\mathfrak{A} \models^2 \varphi$ ise $\mathfrak{A}$ yapısı φ **formülünün** bir **2-modeli**dir ve $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L^2$ olmak üzere $\mathfrak{A}$ yapısı her $\varphi \in \Gamma$ formülünün 2-modeli ise $\mathfrak{A}$ yapısı Γ**'nın** bir **2-modeli**dir denir. $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L^2$ ve $\varphi \in \operatorname{Fm} L^2$ olmak üzere Γ'nın her 2-modeli aynı zamanda φ'nin de bir 2-modeli ise φ formülü Γ'dan **2-mantıksal çıkar** diyelim ve bunu $\Gamma \Vdash^2 \varphi$ ile gösterelim. $\emptyset \Vdash^2 \varphi$ yerine birinci dereceden yüklem mantığına benzer biçimde $\Vdash^2 \varphi$ yazalım. Yine tanımlardan doğrudan $\operatorname{Dog} \mathfrak{A} \subseteq \operatorname{Dog}^2 \mathfrak{A}$, $\operatorname{Th} \mathfrak{A} \subseteq \operatorname{Th}^2 \mathfrak{A}$ ve $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$. Ayrıca $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ olması durumda $\Gamma \Vdash \varphi$ ve $\Gamma \vdash \varphi$ kavramları örtüşür.

Şimdiye kadar L^2 dilinin dilbilimsel yapısıyla ilgilendik. Bir yandan yeni değişkenlerimiz bizi yeni mantık aksiyomlarına ve çıkarım kurallarına zorlarken, diğer yandan Kümeler Kuramı'nın daha fazla işin içine girmesi de

bizi başka aksiyomlara zorlar. $\sigma_4(\varphi, x, t)$ ve $\sigma_5(\varphi, \psi, x)$ ilksavlarını $\mathbf{X}^n$ ve $\mathbf{f}^n$ değişkenlerine genişleteceğiz. Ayrıca σ_{der} ve σ_{fonk} gibi iki yeni ilksavımız olacaktır.

Tanım 5.17.6 (Yeni İlksavlar)

$$\begin{aligned}
\sigma_{4a}(\varphi, x, t) &:= \dot\forall \mathbf{X}^n \varphi \to \varphi(\mathbf{X}^n|\mathbf{Y}^n), \quad \mathrm{Sb}(\varphi, \mathbf{X}^n|\mathbf{Y}^n).\\
\sigma_{4a}(\varphi, x, t) &:= \dot\forall \mathbf{f}^n \varphi \to \varphi(\mathbf{f}^n|\mathbf{g}^n), \quad \mathrm{Sb}(\varphi, \mathbf{f}^n|\mathbf{g}^n).\\
\sigma_{5a}(\varphi, \psi, x) &:= \dot\forall \mathbf{X}\,(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \dot\forall \mathbf{X}\psi), \quad \mathbf{X} \notin \mathrm{Sb}\,\varphi.\\
\sigma_{5b}(\varphi, \psi, x) &:= \dot\forall \mathbf{f}\,(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \dot\forall \mathbf{f}\psi), \quad \mathbf{f} \notin \mathrm{Sb}\,\varphi.\\
\sigma_{der\varphi} &:= \dot\exists \mathbf{X}^n \dot\forall \overline{x_n}(\mathbf{X}^n x_1 \cdots x_n \longleftrightarrow \varphi),\\
&\qquad\qquad \mathrm{Sb}\,\varphi \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\} \ \textit{ve}\ \mathbf{X}^n \notin \mathrm{Sb}\,\varphi.\\
\sigma_{fon} &:= \dot\forall \mathbf{X}^{n+1}(\dot\forall \overline{x_n} \dot\exists! y \mathbf{X}^{n+1} \overline{x_n} y \to \dot\exists \mathbf{f}^n \dot\forall \overline{x_n}\ \mathbf{X}^{n+1} \overline{x_n} \mathbf{f}^n \overline{x_n}).
\end{aligned}$$

Elbette $\sigma_{der\varphi}$ ve σ_{fon} birer aksiyom şemalarıdır.

$$\Lambda_m^2 := \Lambda_m \cup \{\sigma_{4a}, \sigma_{4b}, \sigma_{5a}, \sigma_{5b}, \sigma_{der\varphi}, \sigma_{fon}\}$$

ikinci dereceden mantık ilksavlarımız olacaktır.

Tanım 5.17.7 (Çıkarım kurallarımız) *Modus ponens ve (Gen) ile yeni değişkenlere ilişkin*

Gen2a *φ'den $\dot\forall \mathbf{X}\varphi$ çıkar ($\mathbf{X} \in \mathcal{V}_B$),*
Gen2b *φ'den $\dot\forall \mathbf{f}\varphi$ çıkar ($\mathbf{f} \in \mathcal{V}_F$)*

genellemeleridir.

Üçüncü dereceden mantık yapmak istersek bu kez evrenleri $\mathcal{P}(\mathbf{B}^n(A))$ ve $\mathcal{P}(\mathbf{F}^n(A))$'lar olan niceleyicilere vs. gereksinim duyacağımız apaçıktır. Biraz ileride netleşecek nedenlerle bunlara girmeyeceğiz.

İkinci dereceden biçimsel kuramlar ve biçimsel kanıt kavramı birinci dereceden yüklem mantığında olduğu gibidir. $\mathcal{L}^2 := (\emptyset^2, \Lambda_m^2)$ ikinci dereceden yüklem mantığı kuramıdır. $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}\,L^2$, $\mathcal{K} := (L^2, \Gamma)$ ve $\varphi \in \mathrm{Fm}\,L^2$ olmak üzere φ'nin bir Γ biçimsel kanıtı varsa bunu $\Gamma \vdash^2 \varphi$ veya $\mathcal{K} \vdash^2 \varphi$ ile gösterelim.

Lemma 5.17.8 *$\Gamma \vdash^2 \varphi \Longrightarrow \Gamma \Vdash^2 \varphi$, dd. ikinci dereceden biçimsel kuramlar dürüsttürler.*

Kanıt. Birinci dereceden yüklem mantığında olduğu gibi gösterilir. Λ_m^2 mantık ilksavlarımız hepdoğrular olarak seçilmişlerdir; bunlardan σ_{der} ve

σ_{fonk} ilksavları Kümeler Kuramı'ndan alınmıştırlar. Çıkarım kurallarımız ise doğru önermelerden doğru önerme çıkacak biçimde verilmişlerdir. ■

(5.17.8)'in ters yönünün doğru olmadığını biraz ileride göreceğiz ve bu birinci dereceden yüklem mantığıyla ilk ayrılığımız olacaktır.

Biz birinci dereceden yüklem mantığında $\doteq$ eşitlik imini mantık imlerimiz arasına aldığımızdan bu yaklaşımımızı burada da sürdürüyoruz. Ancak şunu belirtelim ki $\doteq$ imini baştan almamıza gerek yoktur. Örneğin (5.100)'de verdiğimiz $\varphi_=$ formülü herhangi bir L^2 yapısında ancak ve ancak $\mathbf{P}^2$ bağıntı değişkeni $=$ ile yorumlandığında doğrudur. Öyleyse

$$\begin{aligned} s \doteq t &:\Longleftrightarrow \dot\forall \mathbf{P}^1(\mathbf{P}^1 s \longleftrightarrow \mathbf{P}^1 t),\\ \mathbf{f}^n \doteq \mathbf{g}^n &:\Longleftrightarrow \dot\forall x_1,\ldots,x_n\ (\mathbf{f}^n x_1\cdots x_n \doteq \mathbf{g}^n x_1\cdots x_n),\\ \mathbf{P}^n \doteq \mathbf{Q}^n &:\Longleftrightarrow \dot\forall x_1,\ldots,x_n\ (\mathbf{P}^n x_1\cdots x_n \longleftrightarrow \mathbf{Q}^n x_1\cdots x_n) \end{aligned}$$

olarak açıklayarak $\doteq$ bağıntısını L^2 diline katabiliriz. Bu bağıntı birinci dereceden mantık aksiyomlarını sağlayacaktır ve tek yorumu $=$ olacaktır.

Öte yandan $\doteq$ imini ve dolayısıyla eşitlik aksiyomlarını içermeyen birinci dereceden bir kuramda, bu aksiyomları sağlayan ve tek yorumu $=$ olan bir ikili bağıntıyı $\varphi_=$ ile yaptığımız gibi birinci dereceden bir formülle tanımlayamayız (bkz. [58]).

Lemma 5.17.9 *Birinci dereceden hiçbir $\sigma \in \operatorname{Sav} L$ savı her $\mathfrak{A} = (A, L^{\mathfrak{A}})$ yapısı için: "$\mathfrak{A} \models \sigma \Longleftrightarrow A$ sonludur" denkliğini sağlamaz.*

Kanıt. Bir an için σ savının her modelinin evreninin sonlu olduğunu varsayalım. Daha önce tanımladığımız $\emptyset$ dilinin $\sigma_{\geq n}$ savının modellerinin evrenleri en az n öğelidir. $\Gamma := \{\sigma_{\geq n} \mid n \geq 1\} \cup \{\sigma\}$ olsun. Γ'nın her sonlu altkümesinin bir modeli olduğundan Kompaktlık Teoremi'nden dolayı Γ'nın da bir $\mathfrak{A}$ modeli vardır. $\sigma_{\geq n}$ ilksavlarından dolayı $|\mathfrak{A}|$ sonsuz, σ'dan dolayı ise sonlu olmalıdır. Çelişki! ■

Örnek 5.17.10 Daha önce $\emptyset$ dilinin $\sigma_{=n}$ birinci dereceden savını tanımladık ve $\sigma_{=n}$ savının bir $\mathfrak{A} = \left(A, \emptyset^{\mathfrak{A}}\right)$ yapısında doğru olması tam da A kümesinin n öğeli olması demekti. Ancak (5.17.9)'da herhangi bir birinci dereceden L dilini ve onun bir σ savını, her $\mathfrak{A} = \left(A, L^{\mathfrak{A}}\right)$ için "$\mathfrak{A} \models \sigma \Longleftrightarrow A$ sonlu" olacak biçimde bulamayacağımızı biliyoruz. Şimdi L birinci dereceden bir dil ve $f \in L$ ise birinci dereceden bir fonksiyon imi olsun. σ_{fI} ve σ_{fS} formülleri sırasıyla

$$\sigma_{fI} := \dot\forall x, y(f(x) \doteq f(y) \to x \doteq y) \text{ ve } \sigma_{fS} := \dot\forall y \dot\exists x(y \doteq f(x))$$

formülleri olsun. $\sigma_{fI}, \sigma_{fS} \in \operatorname{Fm} L$ birinci dereceden formüllerdir. $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$ ise

$$\sigma_{fI} \in \operatorname{Th} \mathfrak{A} \Longleftrightarrow f^{\mathfrak{A}} \text{ birebir ve } \sigma_{fS} \in \operatorname{Th} \mathfrak{A} \Longleftrightarrow f^{\mathfrak{A}} \text{ örten}$$

olduğu apaçıktır. Kümeler Kuramı'ndan biliyoruz ki bir A kümesinin sonlu olması için gerek ve yeter koşul *her* birebir $g : A \to A$ fonksiyonunun örten olmasıdır (bkz. [17]). Bu önerme birinci dereceden bir formülün $\mathfrak{A}$ yapısındaki yorumu olamaz. Ancak $\mathbf{f} \in \mathcal{V}_F^1$ olmak üzere $\sigma_{<\omega} \in \operatorname{Sav} L^2$ savı

$$\sigma_{<\omega} := \dot{\forall}\mathbf{f}(\dot{\forall}x, y(\mathbf{f}x \doteq \mathbf{f}y \to x \doteq y) \to \dot{\forall}y\dot{\exists}x(y \doteq \mathbf{f}x))$$

olarak tanımlansın. $\sigma_{<\omega} \in \operatorname{Th}^2 \mathfrak{A}$ olması $A = |\mathfrak{A}|$ olmak üzere her birebir $f \in \mathbf{F}^1(A)$ fonksiyonunun örten olması demektir. Başka sözlerle A evrenin sonlu olması $\sigma_{<\omega}$ savının $\mathfrak{A}$'da 2-doğru olmasına denktir. ▲

Örnek 5.17.11 $A \neq \emptyset$ kümesinin sayılabilir olması için gerek ve yeter koşul bir $f : A \to A$ fonksiyonunun ve bir $a \in A$ öğesinin $A = \{a, f(a), f(f(a)), ..\}$ olacak biçimde bulunabilmesidir. $A \neq \emptyset$ kümesinin sonsuz olması için gerek ve yeter koşul birebir ve örten olmayan bir $f : A \to A$ fonksiyonunun bulunabilmesidir. Dolayısıyla

$$\sigma_{\leq\omega} := \dot{\exists}\mathbf{f}\dot{\exists}x\dot{\forall}\mathbf{P}(\mathbf{P}x \curlywedge \dot{\forall}y(\mathbf{P}y \to \mathbf{P}\mathbf{f}y) \to \dot{\forall}z\mathbf{P}z)$$
$$\sigma_{\infty} := \dot{\exists}\mathbf{f}(\dot{\forall}x, y(\mathbf{f}x \doteq \mathbf{f}y \to x \doteq y) \curlywedge \dot{\exists}z\dot{\forall}x \urcorner(\mathbf{f}x \doteq z))$$

formülleri sırasıyla "sayılabilir" ve "sonsuz" kavramlarının $\emptyset^2$ dilinde tanımlarıdırlar. $\sigma_{\omega} := \sigma_{\leq\omega} \curlywedge \urcorner\sigma_{<\omega}$ olarak tanımlarsak $\sigma_{<\omega}$, $\sigma_{\leq\omega}$, σ_{ω} ve σ_{∞} formüllerinin bir $\mathfrak{A} = (A, \emptyset)$ yapısında 2-doğru olmaları için gerek ve yeter koşul sırasıyla A kümesinin *sonlu, sayılabilir, sayılabilir sonsuz* ve *sonsuz* olmasıdır. ▲

Örnek 5.17.12 Sayfa 185'da $\mathcal{K}_a^2 = (L_a^2, \Lambda_a^2)$ ikinci dereceden Peano aritmetik kuramını tanımlamıştık. Birinci dereceden Peano aritmetiğini korumuş, yalnızca α_{a7}^{φ} tümevarım şemasını

$$\alpha_{a7} := \dot{\forall}\mathbf{X}(\mathbf{X}0 \curlywedge \dot{\forall}x(\mathbf{X}x \to \mathbf{X}\mathbf{S}x)) \to \dot{\forall}x\mathbf{X}x$$

tümevarım aksiyomuyla değiştirmiştik. Orada da belirttiğimiz gibi aslında $L = \{\mathbf{0}, \mathbf{S}\}$ dili ve $\Gamma := \{\alpha_{a1}, \alpha_{a2}, \alpha_{a7}\}$ aksiyomlarından yola çıkabilir ve $\dot{+}$ ve $\bullet$ imlerini tanımlanmış im olarak L^2 diline $\alpha_{a3}, \ldots, \alpha_{a6}$ sağlanacak biçimde katabiliriz. Her ne ise $\mathfrak{N}$ yapısı $\mathcal{K}^2$'nin bir modelidir ve $\mathcal{K}^2$'nin her modeli $\mathfrak{N}$ ile eşyapılıdır. Ayrıca (4.4.2)'de belirttiğimiz gibi $\sigma_{\alpha_{a7}}$ ilksavının hiçbir birinci dereceden dille ifade edilemeyeceğini biliyoruz, hatta hiçbir

$\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L_a$ aksiyom grubu $\Gamma \vdash \alpha_{a7}$ olacak biçimde bulunamayacağını daha önce göstermiştik. ▲

Örnek 5.17.13 $\mathcal{K}_{sc} = (L_{sc}, \Lambda_{sc})$ 182. sayfada tanımladığımız sıralanmış cisim kuramı olsun. Birinci dereceden dilde ifade edemediğimiz tamlık aksiyomunu L^2_{sc} dilinde rahatlıkla ifade edebiliriz. Önce L_{sc} dilimize $x \preceq y :\Longleftrightarrow x \doteq y \curlyvee x \prec y$ denkliği ile $\preceq$ tanımlanmış imini katalım. $\varphi_{\mathbf{X}}(y) := \dot\forall z(\mathbf{X}z \to z \preceq y)$ olmak üzere, boştan farklı ve üstten sınırlı her altkümenin bir en küçük üst sınırı olduğunu söyleyen σ_{tam} tamlık aksiyomu

$$\dot\forall \mathbf{X}(\dot\exists y \varphi_{\mathbf{X}}(y) \curlywedge \dot\exists x\ \mathbf{X}x \to \dot\exists y \dot\forall z(\varphi_{\mathbf{X}}(z) \longleftrightarrow y \preceq z)$$

olarak L^2_{sc} dilinde ifade edilebilir. $\Lambda_{tsc} := \Lambda_{sc} \cup \{\sigma_{tam}\}$ olmak üzere $\mathcal{K}^2_{tsc} := (L^2_{sc}, \Lambda_{tsc})$ ikinci dereceden kuramımız için şunu biliyoruz: $(\mathbb{R}, <, +, \cdot, 0, 1)$ bu kuramın bir modelidir ve bu kuramın her modeli bu modelle eşyapılıdır. ▲

İkinci dereceden dillerin böylesine bir ifade zenginliği varken niçin onlarla değil de birinci dereceden diller ve kuramlarla çalıştık? Bunun birçok nedeni var, bazılarını sıralayalım.

- İkinci dereceden dillerde Kümeler Kuramı işe birinci derece dillerden daha fazla karışmaktadır. Birçok mantıkçı sorunsuz olup olmadığından emin olmadığımız bir kuramı işe olabildiğince az katmaktan yanadır. Diğer yandan birinci dereceden birer kuram olan $\mathcal{K}_{ZF}$ ve $\mathcal{K}_{ZFC}$ kuramları neredeyse tüm matematiği ifade etmeye yeterlidir.

İkinci dereceden kuramlarda birinci dereceden kuramlara ilişkin en önemli teoremleri yitirmekteyiz.

- Kompaktlık Teoremi ikinci dereceden yüklem mantığında geçerli değildir. (5.17.9)'un kanıtındaki aynı mantıkla $\Gamma := \{\sigma_{\geq n} \mid n \geq 1\} \cup \{\sigma_{<\omega}\}$ olmak üzere Γ'nın her sonlu altkümesinin bir modeli varken Γ'nın bir modeli yoktur.

- Biçimsel tutarlı $\Gamma \subseteq \operatorname{Sav} L^2$ aksiyomlarının bir modeli olması gerekmez. L^2_a diline yeni bir $\mathbf{c}$ sabit imini ve Λ^2_a ilksavlarına ise $\Sigma = \{\neg(\underline{n} \doteq \mathbf{c}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ilksavlarını ekleyelim. $\Gamma := \Lambda^2_a \cup \Sigma$ olsun. Önce Γ'nın 2-biçimsel tutarlı olduğunu görelim. $\sigma \in \operatorname{Sav} L^2$ ve $\Gamma \vdash^2 \sigma$ olsun. Her Γ biçimsel kanıt Σ'den en fazla sonlu Δ aksiyomu içerir; dolayısıyla $\Lambda^2_a \cup \Delta \vdash \sigma$ olur. m ise Δ'da geçen n'lerden büyük bir doğal sayı olsun. $\mathbf{c}^{\mathfrak{N}} := m$ olarak yorumlandığında $\mathfrak{N}$ aynı zamanda $\Lambda^2_a \cup \Delta$'nın da bir

2-modelidir, böylece $\sigma \in \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ olur. Dolayısıyla Γ bir çelişki kanıtlayamaz, örneğin $\sigma = \bot$ için $\Gamma \nvdash^2 \bot$, dd. Γ tutarlıdır. Diğer yandan Γ'nın bir 2-modeli olamaz. Varsayalım ki $\mathfrak{A}$ yapısı Γ'nın bir 2-modeli olsun. $\mathfrak{A}$ aynı zamanda Λ_a^2'nın bir modelidir ve Λ_a^2'nın tüm modelleri $\mathfrak{N}$ ile eşyapılı olmak zorundadır. Ancak Σ ilksavlarından dolayı $\mathfrak{A}$ yapısının $\mathfrak{N}$ ile eşyapılı olması söz konusu değildir!

- $\mathcal{K}_a^2$'nin her modeli $\mathfrak{N}$ ile eşyapılı olduğundan Yukarı Doğru Löwenheim-Skolem Teoremi ikinci dereceden yüklem mantığında geçerli değildir.

- $\mathcal{K}_{tsc}^2$ kuramının her modeli $(\mathbb{R}, <, +, \cdot, 0, 1)$ ile eşyapılı olduğundan ne Yukarı Doğru ne de Aşağı Doğru Löwenheim-Skolem Teoremleri ikinci dereceden yüklem mantığında geçerli değildir.

- Birinci dereceden kuramlar için Gödel Tamlık Teoremi geçerlidir: $\Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$ ve $\varphi \in \operatorname{Fm} L$ ise $\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \Vdash \varphi$. Bu önemli teorem ikinci dereceden kuramlarda doğru değildir.

Son noktayı görebilmek için biraz hazırlık gereklidir. Λ_m^2 mantık ilksavlarımız hepdoğrular olarak seçilmişlerdir; bunlardan σ_{der} ve σ_{fonk} ilksavları Kümeler Kuramı'ndan alınmıştırlar. Çıkarım kurallarımız ise doğru önermelerden doğru önerme çıkacak biçimde verilmişlerdir. Dolayısıyla ikinci dereceden $\mathcal{K}^2 := (L^2, \Gamma)$ kuramları dürüsttürler, dd. $\mathcal{K}^2 \vdash^2 \varphi$ ise $\mathcal{K}^2$'nin her $\mathfrak{A}$ modelinde $\mathfrak{A} \models^2 \varphi$, dd. $\Gamma \vdash \varphi \Longrightarrow \Gamma \Vdash \varphi$.

$\sigma_a^2 := \alpha_{a1} \curlywedge \ldots \curlywedge \alpha_{a7}$ ile Λ_{ar}^2'nın ilksavlarının eklenmişlerini gösterelim.

Önerme 5.17.14 *Her $\varphi \in \operatorname{Fm} L_a^2$ için $\varphi \in \operatorname{Dog}^2 \mathfrak{N} \iff \sigma_a^2 \to \varphi \in \operatorname{Dog} L_a^2$. Özellikle her $\sigma \in \operatorname{Sav} L_a$ için $\sigma \in \operatorname{Th}\mathfrak{N} \iff \sigma_a^2 \to \sigma \in \operatorname{Dog} L_a^2$.*

Kanıt. $\sigma_a^2 \to \varphi \in \operatorname{Dog}^2 \mathfrak{N}$ olsun. $\sigma_a^2 \in \operatorname{Dog}^2 \mathfrak{N}$ ve $\operatorname{Dog}^2 \mathfrak{N}$ çıkarımsal kapalı olduğundan $\varphi \in \operatorname{Dog}^2 \mathfrak{N}$ olur.

Tersine $\varphi \in \operatorname{Dog}^2 \mathfrak{N}$ olsun. $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L_a^2$ keyfi verilsin. Eğer $\mathfrak{A} \not\models^2 \sigma_a^2$ ise tanım gereği $\mathfrak{A} \models^2 \alpha_a^2 \to \varphi$. Yok eğer $\mathfrak{A} \models^2 \alpha_a^2$ ise $\mathfrak{A}$ ile $\mathfrak{N}$ eşyapılı olduklarından $\mathfrak{A} \models^2 \varphi$ ve sonuçta $\mathfrak{A} \models^2 \alpha_a^2 \to \varphi$ olur. Böylece $\alpha_a^2 \to \varphi$ her $\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L_a^2$ yapısında doğrudur, dd. $\alpha_a^2 \to \varphi \in \operatorname{Dog} L_a^2$ olur. ■

(5.17.14)'ten peşpeşe önemli sonuçlar elde ederiz. Her şeyden önce her $\varphi \in \operatorname{Fm} L_a^2$ için ya $\varphi \in \operatorname{Dog}^2 \mathfrak{N}$ ya da $\neg\varphi \in \operatorname{Dog}^2 \mathfrak{N}$ olduğundan ya $\sigma_a^2 \to \varphi \in \operatorname{Dog} L_a^2$ ya da $\sigma_a^2 \to \neg\varphi \in \operatorname{Dog} L_a^2$ olacaktır. Aşağıdaki irdelemelerimizi sezgisel bazda yapacağız.

Lemma 5.17.15 *$\operatorname{Dog} L_a^2$ yarı yinelgen değildir.*

Kanıt. Gerçekten de $\operatorname{Dog} L_a^2$ yarı yinelgense her $\sigma \in \operatorname{Sav} L_a$ için için bu listede $\sigma_a^2 \to \sigma$ ve $\sigma_a^2 \to \neg\sigma$ taranır. Er veya geç bu listede bunlardan birine rastlanır; dolayısıyla $\sigma \in \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ veya $\neg\sigma \in \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ olur. Bu ise $\operatorname{Th}\mathfrak{N}$'nin belirlenebilir olması demektir ve bunun doğru olmadığını biliyoruz. ■

L birinci dereceden herhangi bir dil ve $\varphi \in \operatorname{Fm} L^2$ olsun. φ formülündeki sabit, fonksiyon ve bağıntı imlerini sırasıyla φ'de geçmeyen, farklı olanları farklı nesne, fonksiyon ve bağıntı değişkenleriyle değiştirelim ve böylece elde ettiğimiz bir formülü $\varphi_\emptyset$ ile gösterelim. Bu durumda $\varphi_\emptyset \in \operatorname{Fm}\emptyset^2$ ve doğrudan tanımlardan $\varphi \in \operatorname{Dog} L^2 \implies \varphi_\emptyset \in \operatorname{Dog}\emptyset^2$. Bu anlamda $\operatorname{Dog} L^2 \subseteq \operatorname{Dog}\emptyset^2$.

Lemma 5.17.16 $\operatorname{Dog}\emptyset^2$ *yarı yinelgen değildir.*

Kanıt. $\operatorname{Dog}\emptyset^2$ yarı yinelgen olsun. $\operatorname{Fm} L_a^2$ belirlenebilir ve $\operatorname{Dog} L_a^2 \subseteq \operatorname{Dog}\emptyset^2$ olduğundan $\operatorname{Dog} L_a^2$ yarı yinelgen olur. Bu ise (5.17.15) ile çelişir. ■

Lemma 5.17.17 *Hiçbir ikinci dereceden* $\mathcal{K} = (L^2, \Gamma)$ *kuramı için* $\operatorname{Bc}\mathcal{K} = \operatorname{Dog} L_a^2$ *olamaz!*

Kanıt. $\operatorname{Bc}\mathcal{K} = \operatorname{Dog} L_a^2$ olsun. $\operatorname{Bc}\mathcal{K}$ yarı yinelgen olduğundan $\operatorname{Dog} L_a^2$ yarı yinelgen olur; bu ise (5.17.15) ile çelişir. ■

Önerme 5.17.18 *Gödel'in Tamlık Teoremi ikinci dereceden yüklem mantığında geçerli değildir.*

Kanıt. Λ_m^2 belirlenebilir olduğundan $\operatorname{Bc}\Lambda_m^2$ yarı yinelgendir; ancak diğer yandan (5.17.16)'dan dolayı $\operatorname{Dog}\emptyset^2$ yarı yinelgen olmaz. Dolayısıyla $\Vdash \varphi$ ancak $\Lambda_m^2 \nvdash \varphi$ olan formüllerimiz vardır. ■

(5.17.18)'in savı, belirlenebilir olmak koşuluyla Λ_m^2 ilksavlarını nasıl seçersek seçelim doğrudur.

5.18 Nedir, Ne Değildir

Bugün bile matematikçilerin çoğunluğu Gödel'in adını duymuştur, ancak teoremlerini ifadelerini ve ne anlama geldiklerini tam olarak bilmez ve eskisi gibi yollarına devam etmektedirler.

Matematikçiler dışında da bir çok insan Gödel'i ve teoremlerini duymuştur, ancak bu teoremleri doğru anlayacak donanımları yoktur. Matematiğin en önemli teoremlerinden olan bu teoremler kadar yanlış anlaşılan ve yorumlanan başka teoremler yoktur. Bu yanlış yorumların bazıları oldukça eğlenceli olsa da bunlara girmeyeceğiz, ilgili okura kolay okunabilen [20]'yi

öneririz. Biz kısaca kimi olası yanlış anlamalara ve vurgulanması gereken bazı noktalara değineceğiz.

Mutlak anlamda çözülemez aritmetik önermeler var mıdır? Çözmekten anladığımız kanıtlamak veya çürütmektir. Birileri Gödel'in Birinci Eksiklik Teoremi'nden bunu, dolayısıyla Hilbert'in her matematiksel problemin çözülebilirliği savını çürüttüğü sonucunu çıkarır. Bu çıkarım doğru değildir. Biçimsel kuramlarda kanıtlanabilirlik göreceli bir kavramdır, kurama bağlıdır. $\mathcal{K}$ yeterince güçlü tutarlı bir kuram ve σ ise $\mathcal{K}$'nin kanıtlayamadığı ve çürütemediği bir aritmetik sav olsun, dd. $\mathcal{K}_a \nvdash \sigma$ ve $\mathcal{K}_a \nvdash \neg\sigma$ olduğunu kanıtladığımızı varsayalım. Bu durumda $\mathcal{K}' = \mathcal{K} \cup \{\sigma\}$ da tutarlıdır ve $\mathcal{K}' \vdash \sigma$. Bu durumda $\mathcal{K}' = \mathcal{K}_a \cup \{\sigma\}$ ve $\mathcal{K}'' = \mathcal{K}_a \cup \{\neg\sigma\}$ kuramlarının her ikisi de tutarlı kuramlardır ve her ikisiyle de yolumuza devam edebiliriz. Ancak onlardan yalnızca birisi için $\mathfrak{N}$ yapısı bir modeldir. Tutarlı bir kuramın bir σ aritmetik savını kanıtlaması σ savının $\mathfrak{N}$ yapısında doğru olmasını gerektirmez.

Geleneksel matematikte, açıkça belirtilmese de aslında $\mathcal{K}_{ZFC}$ kuramında çalışırız. Bu nedenle birileri *"mutlak kanıtlanabilirlik"ten* aslında $\mathcal{K}_{ZFC}$'de kanıtlanabilirliği anlıyor olabilir. Böyle anlaşıldığında ise iki durum söz konusudur: Ya $\mathcal{K}_{ZFC}$ tutarsızdır, o zaman her savı kanıtlar, ya da tutarlıdır, o zamanda en azından kendisinin tutarlı olduğunu söyleyen $\tau_{\mathcal{K}_{ZFC}}$ aritmetik savını kanıtlayamaz. Ancak $\mathcal{K}_{ZFC}$ matematiğin bittiği yer değildir!

$\mathcal{K}_0$ Gödel'in teoremlerinin koşullarını sağlayan herhangi bir kuram olsun, örneğin $\mathcal{K}_a$, $\mathcal{K}_{ZF}$ veya $\mathcal{K}_{ZFC}$'den herhangi biri olabilir. Yalınlık açısından $\mathcal{K}_0 := \mathcal{K}_a$ alalım. Biz $\mathcal{K}_0$ kuramının anlamsal da olsa tutarlı olduğunu biliyoruz. $\mathcal{K}_0$ kuramının tutarlılığını ifade eden önermemiz τ_0 ise $\mathcal{K}_0$'ın ilksavlarına τ_0 savını ekleyerek elde ettiğimiz kuram $\mathcal{K}_1$ olsun. $\mathcal{K}_1$ de tutarlıdır, Gödel teoremlerinin koşullarını sağlar ve kendi tutarlılığını ifade eden τ_1 savını kanıtlayamaz. $\mathcal{K}_1$'in ilksavlarına τ_1 savını katarak elde ettiğimiz kuram $\mathcal{K}_2$ olsun. Böyle devam ederek her $n \in \mathbb{N}$ için Gödel teoremlerinin koşullarını sağlayan bir $\mathcal{K}_n$ kuramı tanımlarız ve $\mathcal{K}_n \nvdash \tau_n$. Ayrıca tanım gereği her bir $\mathcal{K}_n$ kuramının tutarlılığını dile getiren τ_n savı doğrudur. Ancak bu iş burada bitmez! $\mathcal{K}_0$'ın ilksavlarına $\{\tau_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ilksavlarını ekleyerek elde edilen $\mathcal{K}_\omega$ kuramı da Gödel teoremlerinin koşullarını sağlar. Böylece $\mathcal{K}_{\omega+1}, \mathcal{K}_{\omega+2}, \ldots$ diye devam edebiliriz. Öykünün nasıl devam edeceği apaçıktır. Gödel'in [26] s. 309'da belirttiği gibi İkinci Eksiklik Teoremi hiç kimseye aksiyomları ve çıkarım kuralları doğru ve tüm matematiği kapsayan iyi tanımlı bir biçimsel sistem kurma şansı bırakmıyor. Matematiğin bu tüketilemezliği Gödel'e göre insan zihninin tüm bilgisayarları aştığını veya matematiğin insan zihni tarafından yaratılmadığını veya her ikisini birden ortaya çıkarır ([96], s.3).

Yeterince güçlü tutarlı bir kuramın kanıtladıkları aritmetik savlar arasın-

da $\mathfrak{N}$ yapısında doğru olduklarından emin olduğumuz bir sav sınıfı var mıdır? Evet, Π_1 savları! Gerçekten $\sigma \in \Pi_1$ ve yeterince güçlü tutarlı $\mathcal{K}$ kuramı σ'yı kanıtlasın. $\sigma \notin \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ olduğunu varsayalım. O zaman $\neg\sigma \in \Sigma_1 \cap \operatorname{Th}\mathfrak{N}$ olur ve $\mathcal{K}$ kuramı Σ_1'deki her doğru savı kanıtladığından $\neg\sigma$'yı da kanıtlar ve bu $\mathcal{K}$ kuramının tutarlılığı ile çelişir.

Yeterince güçlü tutarlı bir kuramda ikiz asal sayılar sanısını kanıtladığımızda bu savın $\mathfrak{N}$ yapısında doğru olduğunu söyleyebilir miyiz? Hayır! Bu sav Π_1'de değildir ve bir önceki irdeleme burada geçersizdir. Günün birinde $\mathcal{K}_{ZFC}$ kuramında ikiz asal sayılar sanısını kanıtlarsak aynı durumda olacağız; ancak kanıtımızın kendisi bizi *ikna* edebilir.

Gödel teoremlerinin koşulları olduğunu aklımızdan çıkarmayalım: L dili yeterince zengin belirlenebilir bir dil ve $\mathcal{K}$ kuramı ise tutarlı ve yeterince güçlü olacaktır. Örneğin $\mathcal{K}_{ra}$, $\mathcal{K}_a$ ve $\mathcal{K}_{ZF}$ kuramlarına bakalım. $\mathcal{K}_{ra}$ ve $\mathcal{K}_a$ kuramlarının modelleri oldukları için tutarlı olduklarını biliyoruz; ancak bu kuramlar kendi tutarlılıklarını kanıtlayamazlar. $\mathcal{K}_{ZF}$'nin tutarlı olduğunu bilmiyor, umuyoruz. Örneğin $L := \{\mathbf{S}, +, \mathbf{0}\}$ olmak üzere aksiyomlarımız $\mathcal{K}_a$'nın çarpıma ilişkin aksiyomlarının dışındaki aksiyomlar olsun. Böylece elde ettiğimiz $\mathcal{K}$ kuramının tutarlı, tam ve belirlenebilir olduğunu 1929'da Presburger kanıtlamıştır [78], dd. bu kuram için Gödel Eksiklik Teoremi doğru değildir. Şu kadarını kesinlikle söyleyebiliriz: Gödel Eksiklik Teoremleri $\mathcal{K}_{ra}$ kuramını kapsayan tutarlı kuramlar için geçerlidir.

Gödel'in Tamlık ve Eksiklik Teoremleri birbiriyle çelişmezler mi? Her $\sigma \in \operatorname{Sav} L_a$ için Tamlık Teoremi $\vdash \sigma \Longleftrightarrow \models \sigma$ olduğunu ileri sürerken Eksiklik Teoremi bunun bazı σ savları için doğru olmadığını ileri sürmüyor mu? Titiz okur bunun böyle olmadığını bilir, çünkü Eksiklik Teoremi'nde $\models \sigma$ yerine $\mathfrak{N} \models \sigma$ vardır. Ayrıca Tamlık Teoremi birinci dereceden yüklem mantığında geçerli iken ikinci dereceden yüklem mantığında doğru değildir. Buna karşın Eksiklik Teoremleri, koşulları sağlandığında her iki yüklem mantığında da doğrudurlar.

Herhangi bir tutarlı $\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ kuramının eşyapılı olmayan $\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$ gibi iki modeli varsa en az bir σ savı için $\sigma \in \operatorname{Th}\mathfrak{A}$ ve $\neg\sigma \in \operatorname{Th}\mathfrak{B}$ olur. Bu durumda elbette $\mathcal{K} \nvdash \neg\sigma$ ve $\mathcal{K} \nvdash \sigma$ ve $\mathcal{K}$ tam değildir. Bu çıkarım için ne L dili ne de Γ için söylenenler dışında başka koşullara gerek yoktur. Ancak Gödel Eksiklik Teoremleri ikinci dereceden Peano aritmetiği olan $\mathcal{K}_a^2$ kuramında da geçerlidir. $\mathcal{K}_a^2$ kuramının ise herhangi iki modeli eşyapılıdır; dolayısıyla Gödel teoremlerinin dile getirdiği eksiklik kesinlikle farklı türdendir.

Gödel'in Eksiklik Teoremleri'nin Gödel'in kendi kanıtlarından daha kısa olan kanıtları vardır. Özellikle hesaplanabilirlik kavramı üzerinden verilen kanıtlar oldukça kısadır. Ancak bu kavram Gödel çalışmasını sunduğunda ortada yoktu! Bu kısalık bazen de teoremlerin ifadelerinden kaynaklanır.

Örneğin Gödel'in Birinci Eksiklik Teoremi olarak şu iki önermeden biriyle karşılaşabilirsiniz:

(a) *$\mathcal{K}$ yeterince güçlü ve dürüstse tam değildir.*

(b) *$\mathcal{K}$ yeterince güçlü ve tutarlıysa tam değildir.*

Ancak bu iki önerme birbirine denk değildir. Her dürüst kuram tutarlıdır; ancak tutarlı kuramların dürüst olması gerekmez. (b) önermesi daha geneldir ve kanıtı elbette (b)'nin kanıtından daha zordur. Gödel de [29]'da kanıtı tutarlı kuramlar için değil, onlardan daha güçlü olan ω-tutarlı kuramlar için vermiştir.

Bir yanlış anlama da *Gödel'in İkinci Eksiklik Teoremi'nden dolayı $\mathcal{K}_a$ aritmetik kuramının tutarlılığının asla kanıtlanamayacağı sanısıdır.* $\mathcal{K}_a$ tutarlı ise kendisi kendi tutarlılığını kanıtlayamaz; ancak bu asla $\mathcal{K}_a$ kuramının tutarlılığının daha güçlü bir kuramda kanıtlanamayacağı anlamına gelmez. Nitekim Gentzen [22]'de bunu başardı. Gentzen $\mathcal{K}_a$'nın kanıtlarını ustaca sıra sayıları ile kodladı ve ε_0 tümevarımı kullanarak $\mathcal{K}_a$ kuramının tutarlılığını kanıtladı. İkinci Eksiklik Teoremi'nden dolayı, örneğin $\mathcal{K}_{ZFC}$ kuramı tutarlı ise kendi tutarlılığının ifadesi olan s. 394'de tanımlanan τ_{ZFC} önermesini kanıtlayamaz, dd. $\mathcal{K}_{ZFC} \nvdash \tau_{ZFC}$. Özellikle $\mathcal{G} \leq \mathcal{K}_{ZFC}$ kuramı $\mathcal{K}_{ZFC}$'nin güvenilebilir bir altkuramı olmak üzere $\mathcal{G}$ kuramının τ_{ZFC}'yi kanıtlaması asla söz konusu olamaz. Dolayısıyla çoğu matematikçi için İkinci Eksiklik Teoremi matematiğin tutarlılığının matematiğin güvenilir bir kısmıyla kanıtlanmasının olanaksız olduğunu ortaya çıkarmıştır.

Yöntemin saflığı tezi doğru mudur? Aritmetikte bazı aritmetik önermeler önce aritmetik dışı, örneğin analizden bazı gereçlerle kanıtlanmış, ancak ardından saf aritmetiksel kanıtları verilmiştir. Bu ve benzerleri matematikçileri şu *yöntemin saflığı* tezine götürmüştür: Herhangi bir kuramın bir önermesi bu kuramın dışında olan bazı yöntemler kullanılarak kanıtlanabiliyorsa, kuram dışı araçları kullanmayan, yalnızca kuramı kullanan bir kanıtı da vardır. İkinci Eksiklik Teoremi'nden dolayı bu tez doğru olamaz. Örneğin $\mathcal{K}_a$'nın tutarlılığını ileri süren $\mathcal{K}_a$ kuramı savını $\mathcal{K}_{ZFC}$ kanıtlıyor; ancak bunu $\mathcal{K}_a$ kanıtlayamaz.

Gödel'in İkinci Eksiklik Teoremi Hilbert'in programıyla çelişir mi? Çoğu matematikçi için evet! İşin ilginç yanı Gödel bu görüşte değildir ve bunu [29]'da açıkça belirtir:

> "Teorem XI (ve M ve A'ya ilişkin benzeri sonuçlar) Hilbert'in formalistik duruşuyla hiçbir çelişkide değildir. Çünkü bu [Hilbert'in formalistik duruşu, y.n.] yalnızca sonlu araçlarla gerçekleşmiş bir çelişkisizlik teoremini öngörür ve P'de (benzer biçimde M'de, A'da) ifade edilemeyen sonlu kanıtların varlığı düşünüle-

bilir ([29], [24] s.194).”[33]

Bu alıntıda geçen Satz XI Gödel’in İkinci Eksiklik Teoremi’dir. Burada yine tanımlanmamış *sonlu araçlarla kanıt* kavramı karşımıza çıkar.

7 Eylül 1930 Berliner Geselschaft für emprische Philosophie’nin düzenlediği etkinliğin son gününün herkese açık son saatindeki tartışma oturumunda Gödel: “*Klasik matematiğin tutarlılığını varsayarak (hatta Goldbach ve Fermat önermeleri türünden) içeriksel olarak doğru ancak klasik matematiğin biçimsel sisteminde kanıtlanamayan önermeler verilebilir*” der. Gödel’i kimsenin anlamadığı gibi masalları bir kenara bırakabiliriz; ilgili okur bu konuda örneğin [69] ve orada belirtilen diğer kaynaklara bakabilir. Von Neumann Gödel’e toplantı sonrasında buluşma teklifinde bulunur. Buluşurlar ve von Neumann Amerika’ya dönüşünde bu konu üzerinde çalışır ve birkaç hafta içerisinde Gödel’in İkinci Eksiklik Teoremi’ni kanıtlar ve bunu Gödel’e bildirir. Gödel verdiği yanıtta bu sonuca kendisinin de ulaşmış olduğunu bildirir. Elbette von Neumann, önceliği Gödel’e bırakmak adına kanıtını yayınlamamıştır, Gödel ise bu önerme için bir kanıt taslağı vermiştir. Ayrıntılı kanıtı çalışmanın ikinci kısmında vermeyi planlamıştır. Ancak bu ikinci kısım asla yayınlanmamıştır. İkinci Eksiklik Teoremi’nin ilk yayınlanmış kanıtı 1939’da Hilbert-Ackermann tarafından verilmiştir. En azından bu bile karşımızda programı patlamış ve hayata küsmüş bir Hilbert olmadığının kanıtıdır.

Von Neumann 7 Haziran 1931’de Carnap’a yazdığı bir mektupta şunları yazar:

> “Königsberg’de ve ardından mektuplaşmamızda Gödel’in (onu siz de tanıyorsunuz?) bulgularından bilgilendim. (O günden bugüne yayınlanmış olan) bu teoremler bazı mantık ve matematik teoremlerinin, örneğin analizin çelişkisizliğinin, bazı biçimsel sistemlerde kanıtlanamayacağını göstermektedirler. Bana göre bunlar aynı zamanda bunun içeriksel olarak da olamayacağını gösterirler; çünkü benim görüşüm şudur: Tüm içeriksel çıkarım tarzları (şimdi ayrıntılı olarak anlatmayacağım, ama kendisinde Gödel teoremlerinin geçerli olduğu) *bir tek* biçimsel sistemde tekrarlanabilirler. Dolayısıyla bugün görüşüm şudur:
>
> 1. Gödel, Hilbert programının yürütülemeyeceğini kanıtladı,

[33]“Es sei ausdrücklich bemerkt, dass Satz XI (und die entsprechenden Resultate über M, A) in keinem Widerspruch zum Hilbertschen formalistischen Standpunkt stehen. Denn dieser setzt nur die Existenz mit finiten Mitteln geführten Widerspruchsfreiheitsbeweises voraus und es wäre denkbar, dass es finite Beweise gibt, die sich in P (bwz. M, A) nicht darstellen lassen.”

> 2. Artık (benim için de belirleyici olacak olan estetik gerekçeleri bir kenara bırakırsak) sezgiciliği dışlamak için hiçbir neden kalmamıştır. [...] (Gödel'in kendi sonuçlarının değerlendirmesinde temkinli olduğunu biliyorum, ama bana göre bu noktada ilişkileri doğru kavramıyor.) [...]
>
> [Vurgulamak isterim: Hilbert'in niyetlerinde *hiçbir şey yanlış* değildir. Gerçekleşebilselerdi, onlardan Hilbert'in ileri sürdükleri çıkardı. Ancak onlar ne yazık ki gerçekleşemezler, bunu ilk 1930 Eylül'ünden beri biliyorum.] ([69], s.10)"[34]

Daha baştan, matematik için yıkıcı sonuçları olacağından sezgicilere uzak durmuş von Neumann için mantık artık asla eskisi olamazdı—bugün de bu görüşü paylaşan mantıkçılar var. Von Neumann, Eksiklik Teoremleri üzerine defalarca ders verdikten sonra dünyanın ilk gerçek bilgisayarı olan ENIAC'ın inşasına koyuldu.

15 Ocak 1931 Schlick-Zirkel'deki tutanak notlarının bir parçasını verelim: Hahn, Cantor Köşegen Yöntemi'nin Kümeler Kuramı'ndaki önemine işaret eder;

> "Gödel, tam da bu düşüncenin uygulanmasının, tüm kusursuz sezgisel[35] kanıtların *bir tek* biçimsel sistemde yer bulabileceğini sorunlu hale getireceğini belirtir. [Gödel'e göre, y.n.] Bu, von Neumann'ın argümanının zayıf noktasıdır ([69], s. 7)."[36]

[34]"Ich habe in Königsberg und nacher im Briefwechsel, von K.Gödel (den Sie auch kennen?) über seine Resultate erfahren. Diese (seither Veröffentlichten) Sätze zeigen, daß gewisse logische und mathematische Sätze, so z.B. die Widerspruchfreiheit der Analysis, in gewissen formal-logischen Systemen unbeweisbar sind. M.E. zeigen sie aber auch, daß dies inhaltlich unmöglich ist, denn ich bin der Ansicht, daß alle inhaltlichen Schlußweisen in *einem* gewissen formalen System (das ich hier nicht näher beschreiben will, aber für welches Gödels Sätze gelten) wiederhohlbar sind. Ich bin daher heute der Ansicht daß

1. Gödel die Undurchführbarkeit von Hilberts Programm erwiesen hat

2. kein Anlaß zur Ablehnung der Intuitionismus mehr vorliegt (wenn man von Ästhetischen absicht, der freilich im praxi auch für mich der ausschlaggebende sein wird.) [...] (Ich weiß, Gödel ist in der Wertung seiner Resultate viel vorsictiger, aber m.E. übersieht er die Verhältnisse an diesem Punkte nicht richtig.).[...]

[Ich möchte betonen: *Nichts* an Hilberts Absichten ist *falsch.* Wären sie durchführbar, so würde aus ihnen durchaus das von ihm Behauptete folgen. Aber sie sind eben undürchführbar, das weiß ich erst seit Sept. 1930.]"

[35]Burada "sezgisel" sözcüğü "içeriksel" anlamındadır. O dönemde çoğu mantıkçı "sezgisel" sıfatını aynı zamanda "içeriksel" anlamında da kullanır. Biz tercümede aslına sadık kalmak adına "sezgisel" yazacağız ve okurun bağlamdan hangi anlamda kullanıldığını çıkaracağını umuyoruz.

[36]"Gödel bemerkt, daß die Anwendung eben dieses Gedankens auch fraglich erscheinen läßt, ob die Gesammtheit aller intuitionistish einwandfreien Beweise in *einem* formalen System Plaz finden. Das sei die schwache Stelle in der Neumannschen Argümantation."

Sonlu araçlarla kanıt kavramının matematiksel bir tanımına ne Hilbert'te ne de Gödel'de rastlamıyoruz. Gödel'in sonlu araçlarla kanıt kavramını tanımlamamasının nedeni aşağıdaki alıntıda çok net görülür; böyle bir tanımın verilemeyeceğini düşünür:

> "Şimdi sezgisel kanıtların bazı biçimsel sistemlerde (örneğin Princ. Math.'da) biçimselleştirilmesi sorusunu ele alacağım; çünkü burada bir fikir ayrılığının olduğu görülüyor. Her şeyden önce bu soruya net bir anlam yüklenmek istenirse ('sonlu kanıt' kavramının tanımlanamazlığından dolayı bundan haklı olarak kuşku duyulabilir) yegâne doğru yaklaşımın bu konuda hiçbir şey bilmediğimizi itiraf etmek olacağına inanıyorum. (Benim gibi) siz de 'sonlu kanıt' kavramının eksiksiz bir tanımının olanaksız olduğu görüşündesiniz [...]. Sizin sonlu aritmetik yaklaşımınız da beni asla tersinden ikna etmedi.
>
> Her ne olursa olsun Princ. Math.'da biçimselleştirilemeyecek bir sonlu kanıt *sıra dışı karmaşık*[37]olmalıdır ve tümüyle pratik bu nedenden dolayı bir tanesini bulma olasılığı çok düşüktür; ancak bana göre bu *ilkesel olabilirlikte* hiçbir şey değiştirmez ([28], s. 22)."[38]

Gödel her ne kadar sonlu kanıtın matematiksel tanımını vermese de biçimselleştirilemeyecek sonlu kanıtların ilkesel olabilirliğini saklı tutar. Hilbert'in matematikçilerin araştırması gereken konulardan biri olarak belirttiği "matematik kanıtların *basitlik ölçütleri*" ki biz bunu "matematik kanıtların *karmaşıklık ölçütleri*" olarak da okuyabiliriz, burada yine karşımıza çıkıyor. Kitabımızda kısaca değindiğimiz Karmaşıklık Kuramı, özellikle Algoritmik Karmaşıklık Kuramı, Gödel Teoremleri'ne ve matematiğe de başka bakış açıları getirmiştir.

---

[37] Vurgu yazarlarındır.

[38] "Ich möchte jetzt auf die Frage der Formalisierbarkeit der intuitionistischen Beweise in bestimmten Formalen Systemen (etwa den Princ. Math.) eingehen, da hier eine Meinungsverschiedenheit zu bestehen scheint. Ich glaube, wofern man dieser Frage überhaupt einen Präzisen Sinn zuerkennt (wegen der Undefinierbarkeit des Begriffs 'finiter Beweis' könnte man mit Recht daran zweifeln), kann der einziegt korrekte Standpunkt nur der sein, daß man zugibt, darüber nichts zu wissen. Sie sind ja (ebenso wie ich) der Meinung, daß eine erschöpfende Definition für den Begriff 'finiter Beweis' unmöglich ist; [...]. Auch Ihre Darstellung der finiten Arithmetik hat mich keineswegs vom Gegenteil überzeugt.

"Jedenfalls müßte ein in den Princ. Math. nicht formalisierbarer finiter Beweis ganz außerordentlich kompliziert sein und es besteht aus diesem rein praktischen Grunde sehr wenig Aussicht einen zu finden, aber es ändert nach meiner Meinung nichts an der prinzipiellen Mölichkeit."

Sonlu kanıtlar hakkında Gödel'in görüşlerinin zaman içinde seyrini [95] ve [96]'da bulabilirsiniz. Yine son yıllarda canlanan "Hilbert Programı", "sonlu kanıt", "mekanik kanıt" ve benzerleri üzerindeki tartışmalar için [68], [69], [83], [84] çalışmalarına ve orada belirtilen kaynaklara bakılabilir.

İmler Dizini

Bölüm 1 Önbilgiler

$\lvert A\rvert$	A kümesinin çokluk sayısı	1
$\sqcup$	ayrık birleşim	1
$:\subseteq$	$f :\subseteq X \to Y$, f kısmi fonksiyon	1
$\xrightarrow{p}$	$f : X \xrightarrow{p} Y$ kısmi fonksiyon	1
G_f	f fonksiyonunun grafı	1
$\operatorname{dom} f$	f fonksiyonunun tanım bölgesi	1
$\operatorname{im} f$	f fonksiyonunun resmi	1
χ_A	A'nın özgün fonksiyonu	2
$\mathcal{P}(X)$	X'in güç kümesi	2
$\mathcal{P}^*(X)$	$\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$	2
R_x	$R \subseteq X \times X$ bağıntısın x dikey kesiti	3
R^y	$R \subseteq X \times X$ bağıntısın y yatay kesiti	3
D_R	$R \subseteq X \times X$ bağıntısın köşegeni	3
D_R^c	$R \subseteq X \times X$ bağıntısın köşegen karşıtı	3
$\operatorname{bs}(n)$	n'nin başlangıcı	4
${}^n A$		4
$\operatorname{Sz} A$	A abecesinin sözcükler kümesi	4
${}^{<\omega} A$		4
$\lhd$	sözcük ekleme işlemcisi	5
A-fonksiyonu	$f : A^n \to A,\ n \in \mathbb{N}$	6
FK	F'ye göre kapanış özelliği	7
B^F	B'nin F'ye göre dıştan kapanışı	7
B_F	B'nin F'ye göre içten kapanışı	8
$\overline{(B, F)}$	B'nin F kapanışı	8

Bölüm 2 Önermeler Mantığı

$\neg$	biçimsel "değil"	14
$\wedge$	biçimsel "ve"	14
$\vee$	biçimsel "veya"	14

$\rightarrow$	biçimsel "ise"	14
$\longleftrightarrow$	biçimsel "ancak ve ancak"	14
$\dot{\forall}$	biçimsel "her"	14
$\dot{\exists}$	biçimsel "var"	14
$\doteq$	biçimsel "eşit"	14
$\neg$	anlamsal "değil"	13
$\vee$	anlamsal "veya"	13
$\wedge$	anlamsal "ve"	13
$\Longrightarrow$	anlamsal ise	13
$\Longleftrightarrow$	anlamsal "ancak ve ancak"	13
$\forall$	anlamsal "her"	13
$\exists$	anlamsal "var"	13
MP	modus ponens-ayırma kuralı	18
ZK	zincir kuralı-geçişlilik kuralı	18
J	mantık imleri kümesi	23
Omf P	önermemantıksal P formüllerinin kümesi	23
O	ortak imler kümesi	27
Omf	önermemantıksal formüller kümesi	29
TVT	tümevarımsal tanımlama	30
FYT	formüller için yinelemeli tanımlama	34
$\bigvee_{1\leq k\leq n}$		36
$\bigwedge_{1\leq k\leq n}$		36
uz	uzunluk fonksiyonu	38
sv	seviye fonksiyonu	38
mu	mantıksal uzunluk fonksiyonu	38
alf (φ)	φ'nin altformüllerinin kümesi	39
$\varphi\,(p\vert\psi)$	φ'de geçtiği her yerde p yerine ψ koyma	40
aso (φ)	φ'nin asal önermelerinin kümesi	41
deg (φ)	φ'nin değişkenlerinin kümesi	41
$d \models \varphi$	φ, d değerlemesinde doğrudur	43
$\varphi\,[d]$	$d\,(\varphi)$ değeri	43
$\varphi\,[a_1, \ldots, a_n]$		45
$\models \varphi$	φ bir hepdoğrudur	47
$\equiv$	mantıksal denklik imi	49
$hd\,(\varphi)$	φ bir hepdoğrudur	49
$\vert_k$	kısmi yer değiştirme imi	51
$\Delta\varphi$	φ formülünün ikilisi	55
$\bigtriangledown$	dışlayan veya	59
$\downarrow$	nor, "veya"nın değillemesi	59
$\uparrow$	nand, "ve"nin değillemesi	59

$\mathbf{p}^a$	saf ekleme	60
$\mathbf{p}_a$	saf ayrışma	60
$\operatorname{mod}\varphi$	φ'nin modellerinin kümesi	65
$\operatorname{mod}\Gamma$	Γ'nın modellerinin kümesi	65
$\Vdash$	mantıksal çıkarım imi	65
$\Gamma \Vdash \psi$	ψ mantıksal olarak Γ'dan çıkar	65
$\Gamma \Vdash \Psi$	her $\psi \in \Psi$ için $\Gamma \Vdash \psi$	65
$\Vdash \psi$	$\emptyset \Vdash \psi$	66
Γ-ayırma		68
Ilk FL	Frege-Lojasewicz İlksavları	80
Ilk	Frege-Lojasewicz İlksavları	80
Hd	hepdoğrular kümesi	80
$\sigma_1(\varphi,\psi)$	FL- ilksavı	80
$\sigma_2(\varphi,\psi,\eta)$	FL- ilksavı	80
$\sigma_3(\varphi,\psi)$	FL- ilksavı	80
Γ-bkanıt	Γ biçimsel kanıtı	80
$\Gamma \vdash \varphi$	φ biçisel olarak Γ'dan çıkar	81
$\vdash \varphi$	$\emptyset \vdash \varphi$	81
$\Gamma \vdash \Psi$	$\forall \psi \in \Psi \ (\Gamma \vdash \psi)$	81
$\operatorname{Bc}\Gamma$	Γ'dan bçimsel çıkan φ'lerin kümesi	82
Bc	$\operatorname{Bc}\emptyset$	82
$\overline{\Gamma}$	$\Gamma \cup$ Ilk'in modus ponense göre kapanışı	82
$\mid$	çıkarım kuralı imi	94

Bölüm 3 Birinci Dereceden Kuramlar

$\mathfrak{R}$	$(\mathbb{R},+,\cdot,0,1)$ yapısı	102
$\lvert\mathfrak{A}\rvert$	$\mathfrak{A}$ yapısının evreni, desteği	102
$\mathcal{R}^{\mathfrak{A}}$	$\mathfrak{A}$ yapısının bağıntılarının kümesi	102
$\mathcal{F}^{\mathfrak{A}}$	$\mathfrak{A}$ yapısının fonksiyonlarının kümesi	102
$\mathfrak{N}$	$(\mathbb{N},S,+,\cdot,0)$ yapısı, S ardıl fonksiyonu	103
$\mathcal{C}^{\mathfrak{A}}$	$\mathfrak{A}$ yapısının sabitlerinin kümesi	103
$L^{\mathfrak{A}}$	$\mathfrak{A}$ yapısının dili, $\mathcal{R}^{\mathfrak{A}} \sqcup \mathcal{F}^{\mathfrak{A}} \sqcup \mathcal{C}^{\mathfrak{A}}$ kümesi	103
$\mathfrak{R}_<$	$(\mathbb{R},<,+,\cdot,0,1)$ yapısı	105
$\operatorname{Tm} L^{\mathfrak{A}}$	$L^{\mathfrak{A}}$ dilinin terimlerinin kümesi	106
$t(x_1,\ldots,x_n)$	$\deg(t) \subseteq \{x_1,\ldots,x_n\}$	106
$\operatorname{FmL}^{\mathfrak{A}}$	$L^{\mathfrak{A}}$ dilinin formüllerinin kümesi	106
$\mathfrak{N}_<$	$(\mathbb{N};<;S,+,\cdot,0)$ yapısı	107
$x,y,z,\ldots$	sözeden değişkenler	112
$\mathcal{V}$	$\{v_0,v_1,\ldots\}$ biçimsel değişkenler kümesi	112
$\dot{\exists}x\varphi$	$\dot{\neg}\dot{\forall}x\dot{\neg}\varphi$ formülü	113

M	$\left\{\neg, \to, \dot{\forall}, \doteq\right\}$ kümesi	113
$\mathcal{C}$	sabit imleri kümesi	113
$\mathcal{F}$	fonksiyon imleri kümesi	113
$\mathcal{R}$	bağıntı imleri kümesi	113
L	$\mathcal{R} \sqcup \mathcal{F} \sqcup \mathcal{C}$ kümesi, biçimsel dil	113
$\mathcal{R}_n$	n basamaklı bağıtı imleri kümesi	113
$\mathcal{F}_n$	n değişkenli fonksiyon imleri kümesi	113
$\mathcal{C}_L$	L dilinin sabit imler kümesi	114
$\mathcal{R}_L$	L dilinin bağıntı imleri kümesi	114
$\mathcal{F}_L$	L dilinin fonksiyon imleri kümesi	114
$L_\emptyset$	yüklemselmantık dili	114
L_g	$\{\bullet, \mathbf{e}\}$ grup biçimsel dili	114
L_h	$\{\dot{+}, \bullet, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ halka biçimsel dili	114
L_{sc}	$\{\prec, \dot{+}, \bullet, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ sıralanmış cisim dili	114
L_s	$\{\prec\}$ sıralama dili	114
L_a	$\{\mathbf{S}, \dot{+}, \bullet, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ aritmetik dili	114
L_k	$\{\dot{\in}\}$ kümeler kuramı dili	114
$\operatorname{Tm} L$	L dilinin terimlerinin kümesi	115
$\operatorname{Fm} L$	L dilinin formüllerinin kümesi	116
$(\varphi \curlyvee \psi)$	$(\neg\varphi \to \psi)$	116
$(\varphi \curlywedge \psi)$	$\neg(\varphi \to \neg\psi)$	116
$(\varphi \longleftrightarrow \psi)$	$\neg((\varphi \to \psi) \to \neg(\psi \to \varphi))$	116
FTT	formüller için tümevarımla tanımlama	117
FTK	formüller için tümevarımla kanıtlama	117
$x \neq y$	$\neg x \doteq y$	120
$\dot{\exists}!x\varphi(x)$	$\dot{\exists}x\dot{\forall}y(\varphi(x) \longleftrightarrow x \doteq y)$	120
$\dot{\forall}x_1, \ldots, x_n\varphi$	$\dot{\forall}x_1 \cdots \dot{\forall}x_n\varphi$	120
$\dot{\exists}x_1, \ldots, x_n\varphi$	$\dot{\exists}x_1 \cdots \dot{\exists}x_n\varphi$	120
$\overline{x_n}$	$x_1, \ldots, x_n$	120
$\overline{t_n}$	$t_1, \ldots, t_n$	120
$f(\overline{x_n})$	$f(x_1, \ldots, x_n)$	120
$\varphi(\overline{x_n})$	$\varphi(x_1, \ldots, x_n)$	120
$\varphi_1 \to \cdots \to \varphi_n$	$\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \cdots(\varphi_{n-1} \to \varphi_n)\cdots)$	121
$\varphi_1 \curlywedge \cdots \curlywedge \varphi_n$	$\varphi_1 \curlywedge (\varphi_2 \curlywedge \cdots(\varphi_{n-1} \curlywedge \varphi_n)\cdots)$	121
$\deg t$	t'nin değişkenlerinin kümesi	121
$\deg \varphi$	φ'nin değişkenlerinin kümesi	121
$\operatorname{alf} \varphi$	φ'nin altformüllerininkümesi	122
$\operatorname{Bg} t$	t'nin bağlı değişkenlerinin kümesi	122
$\operatorname{Bg} \varphi$	φ'nin bağlı değişkenlerinin kümesi	122
$\operatorname{Sb} t$	t'nin serbest değişkenlerinin kümesi	122

$\mathrm{Sb}\,\varphi$	φ'nin serbest değişkenlerinin kümesi	122
$\mathrm{Sav}\,L$	L dilinin savlarının kümesi	124
$\mathrm{Tmc}\,L$	L dilinin kapalı terimlerinin kümesi	124
$\mathrm{Fmc}\,L$	L dilinin kapalı formüllerinin kümesi	124
$t\,(x\|s)$	t teriminde x yerine s koyma	124
$\varphi\,(x\|s)$	φ'de serbest olduğu her yerde x yer. s koyma	124
$\mathrm{Sb}\,(\varphi, x\|s)$	φ'de x yerine s konabilir	127
P_L	L'nin asal formüllerinin kümesi	128
$\equiv_{\mathrm{om}}$	önermemantıksal denklik imi	129
$\models_{\mathrm{om}}$	önermemantıksal doğruluk bağıntısı	129
$\shortmid\!\vdash_{\mathrm{om}}$	önermemantıksal mantıksal çıkarım	129
$\vdash_{\mathrm{om}}$	önermemantıksal biçimsel çıkarım	129
D_L	önermemantıksal değerlemeler kümesi	129
$\models_{\mathrm{om}} \varphi\,[d]$	$d \in D_L$ ve $d\,(\varphi) = 1$	129
$\models_{\mathrm{om}} \varphi$	$\forall d \in D_L\ d(\varphi) = 1$	129
$\models_{\mathrm{om}} \Psi\,[d]$	$\forall d \in \Psi\ \models_{\mathrm{om}} \psi\,[d]$	129
$\Psi \shortmid\!\vdash_{\mathrm{om}} \varphi$	$\forall d \in D_L(\models_{\mathrm{om}} \Psi\,[d] \Longrightarrow \models_{\mathrm{om}} \varphi\,[d])$	129
$\Psi \vdash_{\mathrm{om}} \varphi$		129
$\varphi \equiv_{\mathrm{om}} \psi$		129
L-yapısı	L biçimsel diline ilişkin yapı	131
$\mathrm{Yap}\,L$	L dilinin yapılarının sınıfı	132
$l^{\mathfrak{A}}$	$l \in L$ iminin $\mathfrak{A}$ yapısındaki yorumu	132
$t^{\mathfrak{A}}\,[\beta]$		136
$\varphi^{\mathfrak{A}}\,[\beta]$		136
$N^{\mathfrak{A}}$	$\{\beta \mid \beta : \mathbb{N} \to \|\mathfrak{A}\|\}$	136
$\mathfrak{A} \models \varphi\,[\beta]$	φ'nin $\mathfrak{A}$'daki yorumu d değ...de doğru	136
$(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi$	φ'nin $\mathfrak{A}$'daki yorumu d değ...de doğru	136
$\models_{\mathfrak{A}} \varphi\,[\beta]$	φ'nin $\mathfrak{A}$'daki yorumu d değ...de doğru	136
$\mathfrak{A} \not\models \varphi\,[\beta]$	$\mathfrak{A} \models \varphi\,[\beta]$ değil	136
$t^{\mathfrak{A}}\,[a_1, \ldots, a_n]$		137
$\mathfrak{A}' \restriction L,\ L \subseteq L'$	$\mathfrak{A}'$'nın L'ye kısıtlanmışı	138
$\mathfrak{A}_B$		138
L_B		138
β^a_x	β'dan tek farkı x'te a değ. almasıdır	139
$d^{\mathfrak{A}}_\beta$		140
$D^{\mathfrak{A}}$	$\{d^{\mathfrak{A}}_\beta \mid \beta \in N^{\mathfrak{A}}\}$	140
D_L	$\{d^{\mathfrak{A}}_\beta \mid \beta \in N^{\mathfrak{A}}, \mathfrak{A} \in \mathrm{Yap}\,L\}$	140
$\top$	$\theta \to \theta,\ \theta := \dot\forall v_0\,(v_0 \doteq v_0)$	140
$\bot$	$\neg\top$	140
$\mathfrak{A} \models (\varphi \curlyvee \psi)\,[\beta]$		142

$\mathfrak{A} \models (\varphi \curlywedge \psi)\,[\beta]$		142
$\mathfrak{A} \models (\varphi \longleftrightarrow \psi)\,[\beta]$		142
$\mathfrak{A} \models \dot{\exists} x \varphi\,[\beta]$		142
$\mathfrak{A} \models [a_1, \ldots, a_n]$		143
$d^{\mathfrak{A}}$		144
$\mathfrak{A} \models \varphi$	$\forall \beta \in N^{\mathfrak{A}}\,(\mathfrak{A} \models \varphi\,[\beta])$	144
$\operatorname{Mod} \varphi$	$\{\mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L \mid \mathfrak{A} \models \varphi\},\ \varphi \in \operatorname{Fm} L$	145
$\operatorname{Dog} \mathfrak{A}$	$\{\varphi \in \operatorname{Fm} L \mid \mathfrak{A} \models \varphi\},\ \mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$	145
$\operatorname{Th} \mathfrak{A}$	$\{\sigma \in \operatorname{Sav} L \mid \mathfrak{A} \models \sigma\},\ \mathfrak{A} \in \operatorname{Yap} L$	145
$\operatorname{Mod} \Gamma$	$\bigcap_{\varphi \in \Gamma} \operatorname{Mod} \varphi$	145
$\models_L \varphi$	$\operatorname{Mod} \varphi = \operatorname{Yap} L$	145
$\models \varphi$	$\models_L \varphi$, L karşıştırılmayacaksa	145
$\operatorname{Dog} L$	$\{\varphi \in \operatorname{Fm} L \mid \ \models_L \varphi\}$	145
$\varphi^{\forall}$	$\dot{\forall} x_1, \ldots, x_n \varphi,\ \varphi(x_1, \ldots, x_n)$	146
$\varphi^{\exists}$	$\dot{\exists} x_1, \ldots, x_n \varphi,\ \varphi(x_1, \ldots, x_n)$	146
$\beta^{a_1 \cdots a_n}_{x_1 \cdots x_n}$		150
$\dot{\forall}$-atma		154
$\dot{\exists}$-katma		155
$\Gamma \Vdash \Omega$	$\operatorname{Mod} \Gamma \subseteq \operatorname{Mod} \Omega$	156
$\Gamma \Vdash \varphi$	$\operatorname{Mod} \Gamma \subseteq \operatorname{Mod} \{\varphi\}$	156
$\operatorname{Mc} \Gamma$	$\{\varphi \in \operatorname{Fm} L \mid \Gamma \Vdash \varphi\},\ \Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$	157
$\operatorname{Mt} \Gamma$	$\{\sigma \in \operatorname{SavL} \mid \Gamma \Vdash \sigma\},\ \Gamma \subseteq \operatorname{Fm} L$	157
$\operatorname{Mod}^* \Gamma$		157
$\Gamma \Vdash^* \Omega$		157
$\Vdash_L$	mantıksal çıkarım imi	157
$\Vdash$	L biliniyorsa $\Vdash_L$ yerine	158
$\Gamma^{\dot{\forall}}$	$\{\varphi^{\dot{\forall}} \mid \varphi \in \Gamma\}$	161
$\varphi \equiv \psi$	$\models (\varphi \longleftrightarrow \psi)$	165
$\sigma_4(\varphi, x, t)$	$\dot{\forall} x \varphi \to \varphi(x \mid t),\ \operatorname{Sb}(\varphi, x \mid t)$	171
$\sigma_5(\varphi, \psi, x)$	$\dot{\forall} x(\varphi \to \psi) \to \left(\varphi \to \dot{\forall} x \psi\right), x \notin \operatorname{Sb} \varphi$	171
$E1, \ldots, E5$	eşitlik ilksavları	171
Λ_{mL}	L dilinin mantıksal ilksavlarının kümesi	172
Λ_m	L biliniyorsa Λ_{mL} yerine	172
Λ_{om}	$\{\sigma_1(\varphi, \psi), \sigma(\varphi, \psi, \eta) \mid \varphi, \psi, \eta \in \operatorname{Fm} L\}$	172
$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_5$	eşitlik ilksavları	172
Gen	genelleme	172
(L, Γ)		173
$\mathcal{L}$	(L, Λ_m) kuramı	174
$\operatorname{Mod} \mathcal{K}$	$\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ ise $\operatorname{Mod} \mathcal{K} = \operatorname{Mod} \Gamma$	174
$\operatorname{Mc} \mathcal{K}$	$\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ ise $\operatorname{Mc} \Gamma$	174

$\mathrm{Mt}\,\mathcal{K}$	$\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ ise $\mathrm{Mt}\,\Gamma$	174
Γ-bkanıt	Γ biçimsel kanıt	174
$\mathrm{Bc}\,\Gamma$		175
$\mathrm{Bt}\,\Gamma$	$\mathrm{Bc}\,\Gamma \cap \mathrm{Sav}\,L$	175
$\mathrm{Bt}\,\mathcal{K}$	$\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ ise $\mathrm{Bt}\,\Gamma$	175
$\mathrm{Bc}\,\mathcal{K}$	$\mathcal{K} = (L, \Gamma)$ ise $\mathrm{Bc}\,\Gamma$	175
$\vdash_{\mathcal{K}} \varphi$	$\varphi \in \mathrm{Bc}\,\mathcal{K}$	175
$\mathcal{K} \vdash \varphi$	$\varphi \in \mathrm{Bc}\,\mathcal{K}$	175
$\Gamma \vdash \varphi$	$\varphi \in \mathrm{Bc}\,\Gamma$	175
$\vdash \varphi$	$\varphi \in \Lambda_m$	175
Γ-bteorem		175
Bc	$\mathrm{Bc}\,\emptyset$	175
$\vdash_L$	L dilini vurgulanacaksa $\vdash$ yerine $\vdash_L$ yazılır	175
MP	$\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$	175
Gen	$\forall x \in \mathcal{V}$ için $\varphi \vdash \dot{\forall} x\varphi$	175
Γ-bkanıtlanabilir		175
$\Gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$	$\Gamma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \varphi$	176
$\Gamma \vdash \Delta$	$\forall \varphi \in \Delta\ (\Gamma \vdash \varphi)$	176
$\Gamma \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$	$\Gamma \vdash \varphi_i,\ 1 \leq i \leq n$	176
$\Gamma_1 \approx \Gamma_2$	$\mathrm{Bc}\,\Gamma_1 = \mathrm{Bc}\,\Gamma_2$	176
$\mathcal{K}_1 \approx \mathcal{K}_2$	$\mathrm{Bc}\,\mathcal{K}_1 = \mathrm{Bc}\,\mathcal{K}_2$	176
$\Delta \vdash_{\mathcal{K}} \varphi$	$\Delta \cup \Gamma \vdash \varphi,\ \mathcal{K} = (L, \Gamma)$	177
$\mathcal{K}\,[\Delta] \vdash \varphi$	$\Delta \vdash_{\mathcal{K}} \varphi$	177
$\overline{\Gamma}$	Γ'nın MP ve Gen'e göre FmL'de kapanışı	177
$\alpha_{g1}, \ldots, \alpha_{g4}$	grup ilksavları	180
$\mathcal{K}_g = (L_g.\Lambda_g)$	gruplar kuramı	180
Λ_g	$\{\alpha_{g1}, \alpha_{g2}, \alpha_{g3}\}$ grup ilksavları	180
Λ_{ag}	$\{\alpha_{g1}, \ldots, \alpha_{g4}\}$ abel grupları ilksavları	180
$\mathcal{K}_{ag}$	(L_g, Λ_{ag}) abel grupları kuramı	180
α_G	$\alpha_{g1} \curlywedge \alpha_{g2} \curlywedge \alpha_{g3}$ grup ilksavı	180
α_{aG}	$\alpha_{g1} \curlywedge \cdots \curlywedge \alpha_{g4}$ abel grupları ilksavı	180
L_c	cisim kuramları dili	181
Λ_h	birim ögeli halka ilksavları	181
Λ_{ec}, Λ_c	eğik cisim ve cisim ilksavları	181
$\mathcal{K}_h, \mathcal{K}_c$	halkalar kuramı, cisimler kuramı	181
$\underline{n}$	$\mathbf{1} \dotplus \cdots \dotplus \mathbf{1}, n$ tane	182
χ_p	$\underline{p} \doteq \mathbf{0}$	182
$\mathcal{K}_{pc}$	karakteristiği p olan cisimler kuramı	182
$\mathcal{K}_{ck}$	cebirsel kapalı cisimler kuramı	182
$\mathcal{K}_{sc}$	sırlı cisimler kuramı	182

$\alpha_{a1}, \ldots \alpha_{a7}$	aritmetiğin aksiyomları	184
Λ_a	$\{\alpha_{a1}, \ldots \alpha_{a7}\}$ aritmetiğin ilksavları	184
$\mathcal{K}_a = (L_a, \Lambda_a)$	birinci dereceden Peano arit. kuramı	184
$\underline{n}$	$\mathbf{S}^n\mathbf{0}$	184
$\mathcal{K}_a^2$	ikinci ereceden Peano ilksavları	185
Λ_{ZF}	Zermelo-Fraenkel ilksavları	188
$\mathcal{K}_{ZF}$	(L_{ZF}, Λ_{ZF}) Zermelo-Fraenkel kuramı	188
$\mathcal{K}_{\leq n}$	en fazla n ögeli kümeler kuramı	189
$\mathcal{K}_{\geq n}$	en az n ögeli kümeler kuramı	189
$\mathcal{K}_{=n}$	n ögeli kümeler kuramı	189
$\mathcal{K}_\infty$	sonsuz ögeli kümeler kuramı	189
$\sigma_{\geq n}, \sigma_{\leq n}, \sigma_{=n}, \Sigma_\infty$	yukarıdaki kuramların ilksavları	189
$QA,\ QK$	Q-atma, Q-katma, $Q = \dot{\forall}, \dot{\exists}$	194
$\dot{\forall}$-dağılımı		197
$\dot{\exists}$-dağılımı		198
$\sigma_4' (\varphi, x, t)$	$\varphi (x\|t) \to \dot{\exists} x\varphi$	202
$\Delta\varphi$	φ'nin yüklemmantıksal ikilisi	207
S-kuralı	seçme kuralı	214
S-bkanıt	seçmeli biçimsel kanıt	215
$\Gamma \vdash^S \varphi$		215
$\mathcal{K} \leq \mathcal{K}'$	$\mathcal{K}'$ kuramı $\mathcal{K}$'nin bir genişlemesidir	222
$\Phi_s^n (L), \Phi_s^n$	n serbest değişkenli L formüllerinin kümesi	227
x_φ	$\varphi \in \Phi_s^1$ ve $\deg \varphi = \{x_\varphi\}$	227
$\|L\|$	$\max\{\|L\|, \|\mathcal{V}\|\}$	231
c_φ	φ ile tanımlanmış sabit imi	254
$\tau_{c\varphi}$	c_φ'yi tanımlayan sav	254
R_φ	φ ile tanımlanmış bağıntı imi	256
$\tau_{r\varphi}$	R_φ'yi tanımlayan sav	256
f_φ	φ ile tanımlanmış fonksiyon imi	256
$\tau_{f\varphi}$	f_φ'yi tanımlayan sav	256
Ω_c	$\{c_\varphi \mid \varphi \in \Omega\}$	257
Ψ_r	$\{R_\varphi \mid \varphi \in \Psi\}$	257
Φ_f	$\{f_\varphi \mid \varphi \in \Phi\}$	257
U_I		260

Bölüm 4 Modeller Kuramına Giriş

$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$	$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$'nin altyapısıdır	265
$\langle B \rangle^{\mathfrak{A}}, \overline{B}$	B'nin ürettiği altyapı	266
$\hookrightarrow$	gömme	267
$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$	$\mathfrak{A}$ ile $\mathfrak{B}$ eşyapılıdırlar	267

$\tilde{\to}$	eşyapı dönüşümü	267
$h\,[\mathfrak{A}]$	h altında $\mathfrak{A}$'nın resmi	268
i_A	$i_A : A \to B,\ A \subseteq B,\ \forall x \in A\ i_A\,(x) = x$	268
At,$\mathrm{At}\,L$	atomik formüllerin kümesi	271
Bz	baz formüllerinin kümesi	271
$h_*\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$ yapısının h altında doğrudan resmi	272
$h^*\mathfrak{B}$	$\mathfrak{B}$ yapısının h altında ters resmi	272
$\mathfrak{A}/\sim$		273
$\mathfrak{A} \equiv_b \mathfrak{B}$	$\mathfrak{A}$ yapısı $\mathfrak{B}$ yapısına basit denktir	274
$(\mathfrak{A}$,$\mathcal{D}^{\mathfrak{A}'})$		275
$\mathfrak{A}_B$		275
$\hookrightarrow_b$	basit gömme	278
$\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$	$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$'nin basit altyapısı	278
$D_L\,(\mathfrak{A})$	$\mathfrak{A}$ yapısının Γ-diyagramı	281
Γ-diyagramı	Γ-diyagramı	281
$D_+\,(\mathfrak{A})$	$D_{\mathrm{At}\,L}\,(\mathfrak{A})$, pozitif diyagram	281
$D\,(\mathfrak{A})$	$D_{\mathrm{Bz}\,L}\,(\mathfrak{A})$, Robinson diyagramı	281
$D_L\,(\mathfrak{A})$	$D_{\mathrm{Fm}\,L}\,(\mathfrak{A})$, basit diyagram	281
$\dot\forall$-formülleri		282
$\dot\exists$-formülleri		282
$\Gamma_{\dot\forall}$	Γ kuramının evrensel kısmı	282
$\bigcap_{i\in I}\mathfrak{A}_i$	yapıların arakesiti	285
$\bigcup_{i\in I}\mathfrak{A}_i$	yapıların birleşimi	285
α-zinciri		285
$\dot\forall\dot\exists$-savı		291
$\dot\forall\dot\exists$-kuramı		291
$\mathrm{Th}\,M$	$\bigcap_{\mathfrak{A}\in M}\mathfrak{A},\ M \subseteq \mathrm{Yap}\,L$	291
Δ-sınıfı		294
κ-kesin		297
$\mathcal{K}_a^{1<}$		304
a_Z	$\{\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots\}$	306
$\mathbb{A}_Z$		306
$L_{sc\mathbb{R}}$		309
Σ_ρ		309
$L_{sc}^\star$		310
$\mathfrak{R}^\star$		310
$\mathbb{R}^\star$	$\lvert\mathfrak{R}^\star\rvert$	310
$\mathbb{A}$	$\mathbb{R}^\star\backslash\mathbb{R}$	310
$l^\star$	$l^{\mathfrak{R}^\star},\ l \in L_{sc}^\star$	311
$\mathbb{S}$	sonlu sayıların kümesi	314

$\mathbb{A}_k$	aşırı(sonsuz) küçük sayıların kümesi	314
$x \approx y$	$x - y \in \mathbb{A}_k$, aşırı yakınlık	315
$\mathbb{A}_k(r)$	$r + \mathbb{A}_k,\ r \in \mathbb{R}$	316
$\mathrm{st}(s)$	$s \in \mathbb{S}$ sonlu sayısının standart kısmı	316
$\mathbb{A}_b$	aşırı(sonsuz) büyük sayılar	318
$[\alpha, \beta]^\star$	$\{x \in \mathbb{R}^\star \mid \alpha \leq^\star x \leq^\star \beta\}$	323
$(\alpha, \beta)^\star$	$\{x \in \mathbb{R}^\star \mid \alpha <^\star x <^\star \beta\}$	323
$\mathbb{I}_p(\alpha)$		323
$\mathbb{A}_k^+,\ \mathbb{A}_k^-$		323
$\lim_{x \to a^+}$		323
$\lim_{x \to b^-}$		323
$\lim_{x \to c}$		324
$df^\star(a, dx)$		327
$f'(a)$		327

Bölüm 5 Gödel Eksiklik Teoremleri

$\mathfrak{S}$	sezgisel algoritmaların sınıfı	352
$\mathbf{L}_\bullet$		359
Z	bir biçimsel dil	359
$S0$		374
SS		374
$+0$		374
$+S$		374
$\cdot 0$		374
$\cdot S$		374
$Tv\varphi$		374
$\prec,\ \preccurlyeq$		375
$Sr1, Sr2, Sr3$		375
Λ_{ra}	Robinson aritmetiğinin aksiyomları	375
$\mathcal{K}_{ra}$	(L_a, Λ_{ra}), Robinson aritmetiği	375
$U\left(\subseteq \mathbb{N}^2\right)$	$(m,n) \in U :\Longleftrightarrow \varphi_m(\underline{n}) \in \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$	377
$V,\ V_{\mathcal{K}}$	$(m,n) \in V_{\mathcal{K}} :\Longleftrightarrow \mathcal{K} \vdash \varphi_m(\underline{n})$	379
$RI,\ RII$		381
$ZRI,\ ZRII$		381
$FI,\ FII$		381
$\mathfrak{g}$	Gödel fonksiyonu	385
$\mathfrak{g}\varphi,\ \ulcorner\varphi\urcorner$	φ'nin Gödel sayısı	386
ω-tutarlı		387
$\mathcal{K}(\varphi)$	φ'nin $\mathcal{K}$ bkanıtlarının kümesi	376
$K\left(\subseteq \mathbb{N}^2\right)$		387

$K_{\neg}\left(\subseteq \mathbb{N}^2\right)$		389
$\mathfrak{g}\mathcal{K}$	$\{\mathfrak{g}\sigma \mid \sigma \in \mathrm{Bt}\,\mathcal{K}\}$	392
$\mathbf{F}^n, \mathbf{R}^n, \mathbf{F}, \mathbf{R}$	sayısal fonk. ve bağ. kümeleri	395
c_0^1		395
π_i^m	$\pi_i^m(\overline{z_m}) = x_i,\ 1 \leq i \leq m$	395
BF	başlangıç fonksiyonlarının kümesi	395
YK	yerine koyma	395
Yn	yineleme	396
$\mathrm{Yn}(g,h)$	g ve h'nin basit yinelemesi	396
$\mu g,\ \mu y g$	g'nin (y'ye göre) minimalleştirilmesi	397
(k)	"kıtlama" veya "arama koşulu"	397
BYF	basit yinelgen fonksiyonların kümesi	397
YF	yinelgen fonksiyonların kümesi	398
$\mathbf{BYF}^n, \mathbf{YF}^n$	n değ. basit yin. fonk. ve yin. fonk. küm.	398
δ	öncül fonksiyonu	401
$\mathrm{sub}, \mathrm{sg}, \overline{\mathrm{sg}}$	bazı fonksiyonlar	401
rm, qt	kalan ve bölüm fonksiyonları	402
$\sum_{y<z},\ \prod_{y<z}$		403
YB, **BYB**	yinelgen ve basit yin. bağ. kümeleri	404
$\mathbf{YB}^n,\ \mathbf{BYB}^n$	n bas. yin. ve basit yin. bağ. kümeleri	404
$\forall^<, \forall^\leq . \exists^<, \exists^\leq$	sınırlanmış niceleyiciler	404
$\mu y R$		405
$\mu^{<x},\ \mu^{\leq x}$		406
$\mu^< P, \mu^\leq P$		406
$\Pr(x)$	x bir asal sayıdır	409
$*\mathbf{YF}$	$*$-yinelgen fonksiynolar kümesi	410
$\beta(x,y,z)$	Gödel'in β fonksiyonu	411
$v(x,y)$		414
$\langle z_1, \ldots, z_n \rangle$		414
Seq	dizi sayılarının (veya kodların) kümesi	414
$\mathrm{lh}(x)$	x sayısının uzunluğu	414
CV-yineleme		417
ϕ-damgası		419
$\ulcorner c_k^n \urcorner, \ulcorner \pi_k^n \urcorner, \ulcorner S \urcorner$		419
$\ulcorner g(h_1, \ldots, h_n) \urcorner$		419
$\ulcorner \mathrm{Yn}(g,h) \urcorner$		419
CBYF	basit yin. fonk. kodlarının kümesi	419
$\mathbf{KF}^n$	n değişkenli kısmi fonksiyonların kümesi	422
$f(x)\downarrow$	f fonksiyonu x'de tanımlıdır	423
$f(x)\uparrow$	f fonksiyonu x'de tanımsızdır	423

$f(x) \simeq g(x)$		423
KYn		424
μ-Min	kısıtlanmamış minimalleştirme	425
YKF	yinelgen kısmi fonksiyonlar	425
CYKF	yinelgen kısmi fonk. kodlarının kümesi	426
$T_n(e, \overline{x_n}, z)$	Kleene T-bağıntısı	429
q-makinası		438
$\tau_{\mathcal{M}}$	$\mathcal{M}$ ardılı veya $\mathcal{M}$-geçişi	439
$\mathcal{M}$-hesaplaması		440
$\mathcal{M} : \mathbf{x}_0 \Longrightarrow \mathbf{x}_T$		440
$\mathbf{x}_0 \overset{\mathcal{M}}{\Longrightarrow} \mathbf{x}_T$		440
$\mathcal{S}_i$	i. kütüğü sıfırlama makinası	441
$\mathcal{T}_{ik}$	taşıma veya kopyalama makinası	441
$\mathcal{T}_{ik}^{l}$		442
$d + \mathcal{M}'$		442
$\mathcal{M}\mathcal{M}'$	makinaların kenetlenmesi	443
$\mathcal{M}^n$		443
$(\mathcal{M})_i$		444
s_i, a_i	özel basit makinalar	445
$\langle f \rangle$		448
$f_{\mathcal{M}}$	$\mathcal{M}$ makinasının tanımladığı kısmi fonk.	448
$\tau_{\mathcal{M}}$		448
$\tau_{i\mathcal{M}}$		449
$\sharp(a)$	a iminin yer sayısı	453
Klm	kelimeler kümesi	453
$x * y$		454
IN	im numarası	456
$\ulcorner \kappa \urcorner$	κ'nın Gödel sayısı	457
Fm^n	n yerli formüllerin kümesi	459
SB, SBK		459
Subs		461

Kaynakça

[1] **Behmann, Heinrich:** *Zu den Widersprüchen der Logik und der Mengenlehre*, Jahr.Deutsch.Math.

[2] **Behmann, Heinrich:** *Über mathematische Logik.* Behmann Arşivi, Erlangen, yayınlanmamış konuşma notu, 1914.

[3] **Behmann, Heinrich:** *Die Atinomie der transfiniten Zahlen und ihre Auflösung durch die Theorie von Russell und Whitehead.* Yayınlanmamış doktora tezi, Göttingen Üniversitesi, 1918.

[4] **Behmann, Heinrich:** *Entscheidungsproblem und Algebra der Logik.* Behmann Arşivi, Erlangen, yayınlanmamış not, 1921.

[5] **Behmann, Heinrich:** *Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem.* Mathematische Annalen, Bd. 86, 1922.

[6] **Behmann, Heinrich:** *Die Atinomie der transfiniten Zahlen und ihre Auflösung durch die Theorie von Russell und Whitehead.* Jahrbuch der Math.-Naturwiss. Fakultät in Göttingen, Bd. 23, 1922.

[7] **Boolos, G.:** *New proof of the Gödel Incompleteness Theorem.* Not. of the Amer. Math. Soc., vol. 36, 1989.

[8] **Brouwer, L.E.J:** *Collected Works 1.*

[9] **Buchholz, Wilfried:** *Mathematische Logik I*, Skript, 1992.

[10] **Cantor, George:** *Über eine elementareFrage der Mannigfaltigkeitslehre,* Jahresbericht der Deutsch. math. Ver., BdI, 1890-91.

[11] **Chaitin, G.J:** *The Limits of Mathematics.*Discr. Math. and Comp. Scien. 2002.

[12] **Dalen, Dirk van:** *Logic and Structure.* Springer, 1994.

[13] **Davis, Martin:** *The Undecidable. Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions.* Raven Press, 1965.

[14] **Davis, Martin:** *Why Gödel didn't Church's thesis.* Inform. and Control., 54(1-2), 1982.

[15] **Ebbinghaus, H. D.-Flum, J-Thomas, W.:** *Mathematical Logic.* Springer, 1984.

[16] **Enderton, Herbert B.:** *A Mathematical Introduction to logic.* Harcourt Academic Press, 2001.

[17] **Eroğlu, Mehmet Sait:** *Cantor Kümeler Kuramı.* Papatya Yayıncılık, 2007.

[18] **Finsler, Paul:** *Formale Beweise und Entscheidbarkeit,* Math. Zeitschrift, Bd.25, 1926.

[19] **Finsler, Paul:** *Gibt es unentscheidbare Sätze?* Comentarii Mathematici Helvici, Vol. 16, 1944.

[20] **Franzen, Torkel:** *Gödel's Theorem.* A K Peters, 2005.

[21] **Frege, G.:** *Grundgesetze der Arithmetik.* Erster Band, 1893.

[22] **Gentzen, G.:** *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie.* Math. Ann.112, 1936.

[23] **Geschke, Stefan:** *Einführung in die Logik und Modeltheorie,* Skript, 2003.

[24] **Gödel, Kurt:** *Collected works I.* Oxford Univ. Press, 1986.

[25] **Gödel, Kurt:** *Collected works II.*

[26] **Gödel, Kurt:** *Collected works III.*

[27] **Gödel, Kurt:** *Collected works IV.*

[28] **Gödel, Kurt:** *Collected works V.*

[29] **Gödel, Kurt:** *Über formal unentscheibare Sätze der Principia matematica und verwandter Systeme I(1931),* Monatshefte für Math. und Ph. 38, 1931.

[30] **Gödel, Kurt:** *Diskussion zur Grundlegund der Mathematik.* Coll. Works I, s. 200-3.

[31] **Gödel, Kurt**: *The present situation in the foundation of mathematics.* Philos.Math., 16(1),1933; CWIII, s. 45-53.

[32] **Gödel, Kurt:** *On undecidable proposition of formal mathematical systems.* 1934; CWI, s. 346-372.

[33] **Gödel, Kurt:** *Über die Länge von Beweisen.* Philos.Math., 16(1), 1936; CWI, s. 396-98.

[34] **Gödel, Kurt:** *Undecidable Diophantine propositions*, 193?; CWIII, s. 164-175.

[35] **Gödel, Kurt:** *In what sense is intiutionistic logic constructive?*, 16(1), 1941; CWIII, s. 189-201.

[36] **Gödel, Kurt:** *Russell's mathematical logic.* 1944, CWII, s. 119-149.

[37] Gödel, Kurt: *Remark before the Princton bicentennial conference on problems in mathematics*, 1936, CWII, s. 149-152.

[38] **Gödel, Kurt:** *What's Cantor continuum problem?*, 1947, CWII, s. 176-188.

[39] **Gödel, Kurt:** *Some basic theorems on the fondation of mathematics and their philosophical implications,* Philos.Math., 16(1), 1951; CWIII, s. 304-23.

[40] **Gödel, Kurt:** *Über eine noch nicht benutzte Erweiterung des finiten Standpunktes,* Dialectica 12, 1958; CWII, s. 240-52.

[41] **Gödel, Kurt:** *The modern development of the foundations of mathematicsin the light of philosophy*, Philos.Math., 16(1), 1961; CWIII, s. 374-387.

[42] **Gödel, Kurt:** *What is Cantor's Continuum Problem?*, 1964; CWII, s. 254-70.

[43] **Gödel, Kurt:** *On an extension of finitary mathematic which has been not jet used.* 1972; CWII, 271-80. s. 305-6.

[44] **Gödel, Kurt:** *Some remarks on the undecibality results*, 1972; CWII, s. 305-6.

[45] **Hamilton, Alan G.:** *Logic for mathematicians*, Cambridge University Press, 1978.

[46] **Hedman, Shawn:** *An Introduction to Modeltheory, Proof Theory, Computability and Complexity,* Oxford University Press, 2006.

[47] **Hermes, H.:** *Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit: Einfhrung in die Teorie der rekursiven Funktionen.* Heidelberg, Springer, 1978.

[48] **Herbrandt, Jacques:** *Sur la non-ctradiction de L'Arithmétique.* Journal für reine und angewandte Mathematik, Band 166, 1932.

[49] **Hilbert, David:** *Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung.* Abhandl. aus dem Math. Sem. d. Hamb. Univ. Bd. 1 (1922).

[50] **Hilbert, David:** *Axiomatisches Denken.* Math. Annalen Bd. 78, 1918.

[51] **Hilbert, David:** *Mathematische Probleme.* Archiv f. Math. u. Phys. 3. Reihe, Bd. 1. 1901.

[52] **Hilbert, David:** *Über das Unendliche,* Math. Ann. 95(1), 1926.

[53] **Hilbert, David:** *Die Grundlagen der Mathematik.* Abhandlungen aus dem Sem. der Hamburgischen Univ. 6, 1928.

[54] **Hilbert, David:** *Die logischen Grundlagen der Mathematik.* Math. Ann. 88, 1923.

[55] **Hilbert, David:** *Gesmmelte Abhandlungen*, Band III, Springer 1970

[56] **Hilbert-Ackermann**: *Grundzüge der mathematischen Logik.* Springer.

[57] **Hinman, Peter G.:** *Fundamentals of Mathematical Logic,* A K Peters, 2005.

[58] **Hoffmann, Dirk W.:** *Grenzen der Mathematik.* Spektrum-Akademischer Verlag, 2011.

[59] **Kirby, L.-Paris, J.:** *Accessible independence result for Peono arithmetic.* Bull. of The London Math. Society 14(1982).

[60] **Kolmogorov, A.N.**: *Selected Works 1.*

[61] **Kolmogorov, A.N.**: *Zur Deutung der intuitionistischen Logik*, Math. Zeitschrift, Bd. 35, 1932.

[62] **Kolmogorov, A.N.**: *On the tertium non datur principle.* Mat. Sb. 32:4, 1925.

[63] **Kunnen, K.**: *Set Theory: An Introduction to independence proofs.* D.Van. Nostrand, 1980.

[64] **Schmieden, K.-Laugwitz, D.:** *Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung.* Math. Zeitschr. Bd.69 (1958).

[65] **Laugwitz, D.:** *Ein Weg zur Nonstandard-Analysis.* Jberr. der Deutsch. Math.-Verein. 75.

[66] **Leary, Christopher C.:** *A Friendly Introduction to Mathematical Logic.* Printice Hall, 2000.

[67] **Luxemburg, W. A. J.:** *Nonstandard Analysis.* Lecture Notes, Calif. Inst. of Techn., Pasedana 1962.

[68] **Mancosu, Paolo:** *Between Russell and Hilbert-Behmann on the Fondation of Mathematics,* The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 5, 1999.

[69] **Mancosu, Paolo:** *Between Vienna and Berlin-The Immediate Reception of Gödel's Incomleteness Theorems.* History and Philosophy of Logic 20(1999).

[70] **Margaris, Angelo:** *Firstorder Mathematical Logic.* Dover Publication, 1990.

[71] **Mendelson, Elliott**: *Introduction to Mathematical Logic.* D.Van. Nostrand, 1964.

[72] **Neumann, J. von:** *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre,* J.f. Math..154, 1925.

[73] **Neumann, J. von:** *Zur Hilbertschen Beweistheorie.* Math. Zschr. 26. Vol I, 1927.

[74] **Neumann, J. von:** *Coll. Works,* Vol I. Pergamon Press, 1961.

[75] **Pohlers, Wolfram:** *An Introduction to Mathematical Logic,* Lecturenote, 1992.

[76] **Poincaré, H.:** *The value of Science.* Cosimo Classics, Dover Pub. 2007.

[77] **Poincaré, H.:** *Science and Method.* Thomas Nelson and Sons.

[78] **Presburger, M.:** *Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik der ganzen Zahlen,..* .Congrès des Math. des Pays Slaves, Warschau, 1929.

[79] **Rautenberg, W.:** *A Concise Introduction to Mathematical Logic.* Springer, 2005.

[80] **Richard, Jules**: *The principles of mathematics and the problem of sets,* Revue générale des sciences pure et appliquées, 1906.

[81] **Russell, Bernard:** *Autobiography*,Roudledge, 1998.

[82] **Shoenfield, Josef R.:** *Mathematical Logic.* Adison-Wesley, 1967.

[83] **Sieg, Wilfried:** *Mechanical procedures and mathematical experience.*

[84] **Sieg, Wilfried:** *Hilbert's programs: 1917-22.* The Bulletin of Symbolic Logic, Vol.5, 1999.

[85] **Skolem,Thoralf:** *Some remarks on axiomatized set theory.* Fifth Congress of Scandinavian Mathematishans, Helsinki, 1922.

[86] **Smullyan, Raymond M.:** *Gödel's Incompleteness Theorems.* Oxford University Press, 1992.

[87] **Srivastava, Shashi M.:** *A Cours on Mathematical Logic.* Springer, 2013.

[88] **Turing, Alan:** *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, 1937,*([13]).

[89] **Turing, Alan:** *Systems of logic based on ordinals.*([13])

[90] **Tourlakis, George:** *Lectures in Logics and Set Theory.* Cambridge University Press, 2003.

[91] **van Dalen, Dirk:** *The Selected Correspondance of L.E.J. Brouwer.* Springer, 2011.

[92] **van Dalen, Dirk:** *Mistic, Geometer and Intuitionist. The Life of L.E.J. Brouwer.* Clarendon Press, Oxford, 2005.

[93] **van Heijenoort, Jean:** *From Frege to Gödel. a Source Book in Mathematical Logic.* Harward Univ. Press, 1967.

[94] **Waerden, B.L. van der**: *Einfall und Überlegung in der Mathematik.* Elemente der Mathematik, 8.

[95] **Wang, Hao:** *From Mathematics to Philosophy.*Roudledge&Paul, 1974.

[96] **Wang, Hao:** *A logical Journey from Gödel to Philosophy.* MIT Press, 1996.

[97] **Weyl, Hermann:** *Über das Symbolismus der Mathematik und mathematischen Physik.* Studium generale 6, 1953.

[98] **Weyl, Hermann:** *Über die neuen Grundlagenkrise der Mathematik.* Math. Z. 10(1921), 39-79.

Dizin

$\dot{\forall}$-atma, 154
$\dot{\exists}$-katma, 155

A
$\mathcal{A}$-tanımlanabilir, 482
abece, 4
Ackermann fonksiyonu, 399
açık formül, 268
açık kuram, 284
adres, 437
A-fonksiyonu, 6
ağaç, 76
aksiyom, 80
aksiyomların modeli, 145
aksiyomlaştırılabilir, 174, 295
algoritma, 350
algoritmik sayılabilir, 356
altçizge, 74
altformül, 39, 122
altyapı, 265
altyapı kapalı, 283
altyapı ısrarcı, 283
Altyapı Teoremi, 266
anlambilimsel yapı, 26
anlamsal çelişkili, 66, 163
anlamsal çelişkisiz, 163
anlamsal denk, 165
anlamsal dil, 101, 103
anlamsal kavram, 131
anlamsal kısaltmalar, 13
Anlamsal Sonluluk Teoremi, 177
anlamsal tam, 164
anlamsal tutarlı, 66, 163
anlamsal tutarsız, 163
arakesit (yapılarda), 284
arama koşulu, 397
ardıl kurulum, 439
aritmetik fonksiyon, 376
aritmetikleştirme, 456, 457
aritmetiksel bağıntı, 376
Arşimedik sıralama, 182
art yazılım, 23
asal formül, 29, 128
asal önerme, 16, 27, 41
Aşağı Doğru Löwenheim-Skolem Teoremi, 249, 280
aşırı büyük, 314
aşırı küçük, 314
aşırı yakın, 315
atmalar, 190
atomik formül, 106, 116
aykırı model, 303
aynılık, 111
ayraç azaltma, 120
ayrılmışların eklenmişi, 62
ayırma, 80
ayırma kuralı, 18, 191
Ayırma Teoremi, 49
ayrışım, 61
ayırt edilemezlik, 111
Ayırt Edilemezlik İlkesi, 212

B
bağlamak, 108
bağlı değişken, 122
bağlı değişken değişimi, 211

Bağlı Değişken Değiştirme Teoremi, 168, 211
bağıntı imleri, 113
bağıntısal yapı, 103
bakışımlı, 74
basit altyapı, 278
basit bağıntı, 255
basit denk, 274
basit diyagram, 281
basit genişleme, 278
basit gömme, 278
basit sistem, 287
basit sınıf, 294
basit yineleme, 396
basit yinelgen, 397, 448
basit yinelgen bağıntı, 404
(basit) yinelgen dil, 456
basit zincir, 285, 286
başlangıç, 4
başlangıç fonksiyonları, 395
başlangıç kurulumu, 439
baz formülleri, 271
belirlenebilir, 354
belirlenebilir kuram, 361
benzeşme, 111, 272
biçimsel çelişkili, 90, 217
biçimsel çelişkisiz, 90, 217
biçimsel çıkarılabilir, 81
biçimsel çıkarım, 81, 99
biçimsel çıkarım kuralları, 99
biçimsel denk, 202
biçimsel dil, 23, 99, 101
biçimsel formül, 23
biçimsel kanıt, 24, 80, 81, 174
biçimsel kanıtlanabilir, 81
biçimsel kuram, 173, 174
Biçimsel Sonluluk Teoremi, 177, 218
biçimsel sözcük, 23
biçimsel tam, 220
biçimsel teorem, 24, 81, 99, 175
biçimsel türetilebilir, 81
biçimsel tutarlı, 90, 217
biçimsel tutarsız, 90, 217
bileşik formül, 29
bir yapıda doğru olmak, 145
birinci dereceden biçimsel dil, 113
Birinci Dereceden Mantığın Ana Teoremi, 239
birleşik önerme, 16
birleşim (yapılarda), 285
bitiş kurulumu, 439
bitmiş hesap, 440
bkanıt, 24, 80, 82
bkanıtlanabilir, 82, 175
Boole fonksiyonları, 58
Boole formülü, 53, 207
Boole işlemlerine göre kapalı, 404
bölüm yapısı, 273
burulmasız gruplar, 181

C

Cantor Köşegen Lemması, 3
Cantor köşegen yöntemi, 3
Cantor Teoremi, 298
cebir, 103
cebirsel kapalı, 182
Chang-Loś-Suszko Teoremi, 291
Church Tezi, 353
cisim, 181

Ç

Çakışma Önermesi, 45, 137
Çakışma Teoremi, 143
çelişki, 46
çelişkili, 66
çelişkisiz, 66
çıkarım, 66
çıkarım kuralları, 80, 172
Çıkarım Teoremi, 68, 162, 193, 201
çıkarımsal kapalı, 221
çıktı, 440

çok türlü yapı, 104

D
dal, 76
dallanma noktaları, 76
damga, 419, 430
De Morgan kuralı, 56
değerleme, 38, 43
değişken, 41, 112, 121
denk kuramlar, 176, 222
denklik bağıntısı, 111
Denklik Teoremi, 203
destek, 59
dışlayan veya, 59
dışsal tanım, 8
dikey kesit, 3
dil eklemek, 138
dil eksiltmek, 138
dilbilimsel yapı, 26
dilin işareti, 113
dilin bir diğer dilde yorumu, 260
dilin bir diğer kuramda yorumu, 260
diyagram, 281
Diyagram Teoremi, 282
dizi sayısı, 414
dizimsel yapı, 26
(DK) dil koşulu, 468
DOĞRU, 31
doğru, 145
doğrudan resim, 272
doğruluk değeri, 16, 39
doğruluk fonksiyonları, 58
doğruluk tablosu, 47
Doğruluk Teoremi, 85, 178
doğrusal sıralama, 182
dolaysız ardıl, 76
dolaysız öncül, 76
dosdoğru, 129
Dosdoğru İlksavı, 190
Dosdoğru Teoremi, 189
Dört Renk Teoremi, 75
dual, 54
Durma Problemi, 450
durumlara göre tanımlama, 408
düğüm, 76
düzgün formül, 459
düzlemsel çizge, 75

E
ekleme, 416
ekleme işlemi, 5
eklenme, 5
eklenmiş, 61
eklenmişlerin ayrışımı, 62
Erdös-de Bruijn Teoremi, 74
Eşitlik İlksavları, 154, 171
eşitlik imi, 111
eşyapı dönüşümü, 267
eşyapı kapalı, 292
eşyapılı, 267
Eşyapı Teoremi, 271
eşzamanlı yineleme, 418
etki alanı, 110, 116
etkin sayılabilir, 356, 433
evrensel, 3, 430
evrensel formül, 282
evrensel kayıt makinası, 353, 450
evrensel kuram, 284
evrensel niceleyici, 110

F
F-kapalı, 7
falsum, 31
fonksiyon imleri, 113
fonksiyonel gösterim, 21
fonksiyonel tam, 63
fonksiyonel yapı, 103
fonksiyonel yazılım, 21
formül, 106
formül yorumu, 135, 136
FTK, 30, 117
FTT, 117

G
Γ-teoremi, 156
geçerli, 145
geçiş belirteci, 438
geçiş numarası, 438
geçişli, 67
geçişli kural, 18
Genel Yineleme Teoremi, 2
genelleştirilmiş bkanıt, 83
genelleştirilmiş kanıt, 179
genelleştirme, 146, 147, 159, 172
Genelleştirme Teoremi, 161
gerçel kısım, 316
gezen değişken, 110, 116
girdi, 440
Goldbach benzeri, 371
Goodstein dizisi, 479
Gödel Eksiklik Teoremi, 379, 388
Gödel fonksiyonu, 411
Gödel Kompaktlık Teoremi, 248
Gödel sayısı, 419
Gödel Tamlık Teoremi, 239
Gödel-Rosser Eksiklik Teoremi, 389
gömme, 267
Gömme Teoremi, 269
grup, 181
Gruplar Kuramı, 180

H
halka, 181
harf, 4
harfsel, 62
harfsel gösterim, 6
harfsel yazılım, 6
Henkin kuramı, 230
hepdoğru, 26, 46, 145
hepyanlış, 47, 145
Herbrand Çıkarım Lemması, 84
hesaplama, 440
Hilbert-Bernays, 94
hipotez, 19, 66
homomorfizm, 267

İ
iç yazılım, 22
içsel tanım, 8
ikili formül, 55
ikili kavram, 54
ikililik ilkesi, 54
İkililik Teoremi, 55, 208
ikinci dereceden Peano aritmetiği, 185
ilksav, 80
im numarası, 456
İndirgeme Teoremi, 224
iyi sıralama, 183
izomorfik, 267
izomorfizm, 267

K
Kalmár, 89
kanonik model, 240
kanıt, 24
kanıt taslağı, 83, 179
kanıtlanabilir denk, 202
kapalı formül, 124
kapalı terim, 124
kapanmış hesap, 440
kapanış, 146
karşı konum ilkesi, 19
katmalar, 190
kayıt makinası, 438
Keisler Teoremi, 283
kelime, 453
kenar, 74
kesin kuram, 297
kısaltmalar, 120
kısmi basit yineleme, 424
kısmi fonksiyon, 1
kısmi yerine koyma, 423
kısmi yinelgen, 448
kısıtlanmış minimalleştirme, 396

kısıtlanmış niceleyici, 209
Kleene Normal Biçim Teoremi, 430
Kleene T-bağıntısı, 429
KM-hesaplanabilir, 445
KM-kısmi hesaplanabilir, 445
kod, 414
Kompaktlık Teoremi, 70
komut, 438
kopyalama makinası, 441
Korunum Kuralı, 311
kök, 76
König Teoremi, 76
köşe, 74
köşegen karşıtı, 3
Köşegen Lemması, 3
kuram genişlemesi, 222
kuramın bir diğer kuramda yorumu, 261
kurulum, 439

L
L dilinin terimleri, 115, 116
limit, 287
L-modeli, 131
Lós-Tarski Teoremi, 284
Luxemburg, 331
L-yapısı, 131

M
makina uzunluğu, 438
makinaların kenetlenmesi, 443
maksimal biçimsel tutarlı, 221
mantık ilksavları, 99, 171
mantık imleri, 113
mantık kuramı, 174
mantıksal bağlaç, 15
mantıksal çelişkili, 66
mantıksal çelişkisiz, 66
mantıksal çıkarım, 156, 174
mantıksal denk, 19, 49, 165
mantıksal doğrular, 174
mantıksal geçerli, 47
mantıksal imler, 14
mantıksal işlemci, 15
mantıksal olarak çıkar, 65
mantıksal sonuç, 156
mantıksal teoremler, 174
mantıksal tutarlı, 66
mantıksal tutarsız, 66
mantıksal uzunluk, 38
metadil, 24, 100
metateorem, 14, 24, 100
Min, 396
model, 43, 65
modeller sınıfı, 145, 174
modus ponens, 18, 49
monoton, 67
Morley Teoremi, 299
MP, 172

N
nand, 59
nesne dili, 23, 99
nesneleme, 136
nesnelemeye göre yorum, 136
niceleyici, 15
Nicod, 95
nor, 59
Normal Biçim Teoremi, 208
normal gösterim, 62
normal model, 132

O
olağan model, 303
olağandışı model, 303
Omf-Tümevarım Teoremi, 30
Omf-Yinelgen Tanım Teoremi, 33
otomorfizm, 267

Ö
ön yazılım, 21
öncül, 66
öncül fonksiyon, 401

önerme, 15, 124
önerme değişkenleri, 27
önerme mantığı alfabesi, 27
önermeler mantığı, 15
önermemantıksal çelişki, 129
önermemantıksal çıkarım, 130
önermemantıksal denk, 130
önermemantıksal hepdoğru, 129
önermemantıksal hepyanlış, 129
önermemantıksal sağlanabilir, 65
önermemantıksal sonuç, 65
Önermemantıksal Kompaktlık Teoremi, 225
Önermemantıksal Tamlık Teoremi, 226
önsav, 19, 66
öz başlangıç, 4
öz ilksav, 99
öz ilksavlar, 174
özdeşlik ilksavları, 111
özelleştirme, 159
Özelleştirme Teoremi, 195
özeşyapı dönüşümü, 267
özgün fonksiyon, 2

P
P-formülleri, 28
parametrik tanımlanabilir, 321
parçalanamaz formül, 128
Peano aritmetiği, 184
Polonya yazılımı, 21
Post Teoremi, 192
pozitif diyagram, 281
program, 438

R
R-boyanabilir, 74
regula falsi, 49
Rice Teoremi, 437
Robinson Aritmetiği, 375
Robinson diyagramı, 281

S
S Kuralı, 214–216
sabit imleri, 113
Sabit Nokta Teoremi, 391, 471
Sabitler Teoremi, 223
saf ayrışma, 60
saf dilsel zenginleşme, 253
saf ekleme, 60
sağ parantezleme, 121
sağlamak, 43
sağlanabilir, 46
sağlanamaz, 47, 149
sav, 15, 66, 124
sayı uzunluğu, 414
sayısal terimler, 184
sayısallar, 184
Seçme Kuralı, 214
semantik, 26
semantik kavram, 131
serbest, 127
serbest değişken, 122
seviye, 38
Shoenfield, 95
sıfırlama makinası, 441
sınırlandırılmamış arama, 397
sınırlandırılmamış minimalleştirme, 425
sınırlanmış niceleyici, 404
sınırlanmış niceleyicilere göre kapalı, 405
sıralama, 182
sıralama kuramı, 182
sıralanmış cisim, 182
sintaks, 26
Skolem fonksiyonları, 280
Skolem Yanıltmacı, 251
son kurulum, 439
sonlu (yaban sayı), 314
sonlu çelişkisiz, 70
sonlu dallanma, 76

sonlu nesne, 352
Sonluluk Teoremi, 248
sonsuz (yaban sayı), 314
sonsuz küçük, 314
sonsuz küçük aralık, 316
sonsuz yakın, 315
söylenebilir, 381
söylenebilme, 381
sözcük, 4
sözcük uzunluğu, 4
sözcükler kümesi, 4
sözeden dil, 24, 100
sözeden teorem, 14, 24, 100
standart kısım, 316
standart model, 132, 303
standart sayı, 310
süre, 440
süzgeç, 331

T
tam yineleme, 416
Tamlık Teoremi, 89, 93
tanık, 230
tanımlanabilir bağıntı, 255
tanımlanmış bağıntı imi, 256
tanımlanmış dil genişletmeleri, 257
tanımlanmış fonksiyon imi, 256
tanımlanmış kuram genişletmeleri, 257
tanımlanmış mantık imleri, 80
tanımlanmış sabit imi, 254
tanımlayan aksiyom, 254
Tarski, 279, 287
Tarski Teoremi, 285
Tarski-Vaught Ölçütü, 279
Taşma Lemması, 322
taşıma makinası, 441
temel formül, 116
temel mantıksal denklikler, 167
temiz yazılmış, 212
temsil edilebilir, 381
temsil edilebilme, 381
terim, 105
terim yorumu, 135
terimler için tümevarımsal kanıtlama, 115
terimler için tümevarımsal tanımlama, 115
ters resim, 272
tertium non datur, 48
tez, 19, 66
totoloji, 47
Totoloji Teoremi, 189
TTK, 115
TTT, 115
tutarlı, 66
tutarsız, 47, 66
tutucu genişleme, 222
tümel, 1
tümevarım şeması, 184
tümevarımsal kanıtlama, 8, 117
tümevarımsal kuram, 291
tümevarımsal tanım, 30, 117
türetilmiş çıkarım kuralı, 179

U
ulama, 416
ultra süzgeç, 331
uz dil, 360
uz kuram, 361
uzlaşmalar, 5, 28, 29, 81, 127, 175, 181, 311, 352, 360, 375, 397, 459

Ü
Üretilen Yapı Teoremi, 266
üstyapı, 265

V
varlık niceleyicisi, 110
varlıksal formül, 282
Vaught Teoremi, 297
vektör uzayları, 183

versum, 31

Y
*yinelgen, 410
yaban açık aralık, 315
yaban analiz, 308
yaban model, 303, 310
yaban sayı, 305
yaban sayılar, 310
YANLIŞ, 31
yansımalı, 67
yansımasız, 74
yanıtlama, 350
yanıtlama yöntemi, 350
yapı, 102
yapıda doğru, 144
yapıda sağlanabilme, 144
yapıda yanlış, 145
yapı dönüşümü, 267
yapı genişlemesi, 265
yapı kısaltmak, 138
yapılandırma, 439
yapının desteği, 101
yapının doğruları, 145
yapının evreni, 101, 102
yapının teoremleri, 145
yapının teorisi (kuramı), 145
yapısal resim, 268
Yapısallık Teoremi, 273
yarı belirlenebilir, 354
yarı hesaplama, 354
yarı yanıtlama, 354
yarı yinelgen, 433
yarı yinelgen dil, 456
yatay kesit, 3
Yeni Sabitler Teoremi, 159, 248
yer değiştirme, 51
Yer Değiştirme Teoremi, 52
yerine konabilme, 127
yerine koyma, 40, 51, 125, 395
Yerine Koyma Kuralı, 209
Yerine Koyma Teoremi, 51, 150, 203, 210
yeterince güçlü, 472
yeterince zengin dil, 367
yineleme, 10, 396
yineleme formülü, 2
Yineleme Teoremi, 2
yinelgen, 398
yinelgen dil, 456
yinelgen kısmi fonksiyon, 425
yinelgen sayılabilir, 356, 433
yinelgen tanımlama, 34
yinelgen yerine koymalara göre kapalı, 405
Yinelgenlik Teoremi, 431
YK, 395
Yn, 396
yoğun sıralama, 183
yorum, 25, 38, 43
Yorum Teoremi, 261
yönerge, 438
yönlenmemiş çizge, 74
Yukarı Doğru Löwenheim-Skolem Teoremi, 282
yüklem mantığı, 15, 174
yükseltilmiş yapı, 138

Z
ZF kuramı, 186
zincir, 285, 286
Zincir Kuralı, 18, 86
zincirin birleşimi, 287